ФОРМАЛЬНО ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ : ОЦЕНКИ РОСТА ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ РЕШЕНИЙ

В. Н. Маргарян

Бюраканская астрофизическая обсерватория, Бюракан, Армения

Резюме. В статье найдены достаточные условия, при которых решения формально гипозеллиптических уравнений принадлежат мультианизотропным классам Жевре.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Через $\mathbb{R}^n$ обозначим n -мерное евклидово пространство, $\mathbb{Z}_+^n$ – n -мерное множество мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ с неотрицательными целыми компонентами, и

$$\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n \times i\mathbb{R}^n, \quad \mathbb{R}_+^n = \{\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n : \xi_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}.$$

Для $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}_+^n$ и $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ положим

$$\xi^\alpha = (\xi_1^{\alpha_1}, \dots, \xi_n^{\alpha_n}), \quad \xi\eta = (\xi_1\eta_1, \dots, \xi_n\eta_n), \quad \text{sign } \xi = (\text{sign } \xi_1, \dots, \text{sign } \xi_n),$$

$$\|\xi\| = \left(\sum_{j=1}^n \xi_j^2 \right)^{1/2}, \quad |v| = \sum_{j=1}^n v_j,$$

$$\Pi(v) = \{\mu \in \mathbb{R}_+^n : \mu \neq 0, \mu \neq v, \text{ либо } \mu_j = v_j \text{ либо } \mu_j = 0, 1 \leq j \leq n\},$$

т.е. $\Pi(v)$ – множество проекций точки v на координатные гиперплоскости. Далее

$$D^\alpha = (D_1^{\alpha_1}, \dots, D_n^{\alpha_n}), \text{ где либо } D_j = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \text{ либо } D_j = -i \frac{\partial}{\partial \xi_j}, j = 1, \dots, n.$$

Пусть $P(\xi)$ – ненулевой многочлен. Известно (см., например, [2]), что поведение решений уравнения $P(D)U = 0$ зависит от поведения на бесконечности функции

$$f(\xi) = \sum_{\alpha \neq 0} |P^\alpha(\xi)/P(\xi)|^{1/|\alpha|}, \quad P(\xi) \neq 0.$$

Если $f(\xi) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$, то скорость убывания определяет некоторый класс Жевре, которому принадлежат решения уравнения $P(D)U = 0$. Аналогичные результаты имеют место для дифференциальных операторов с переменными коэффициентами, близких к операторам с постоянными коэффициентами.

Некоторые условия, при которых решения уравнения $P(x, D)U = 0$ принадлежат классам Жевре были получены И. Г. Петровским [1], Л. Хермандером [2], Ф. Тревом [3], В. И. Буренковым [4], М. Дурантом [5], Л. Родионо [6]. Поведение решений гипозллиптических уравнений рассматривалось в работах [7] – [9]. Г. О. Акопян и В. Н. Маргарян [9] определили мультианизотропные классы Жевре и доказали, что при некоторых условиях все решения уравнения $P(x, D)U = 0$ принадлежат некоторому мультианизотропному классу Жевре, который определяется оператором $P(x, D)$.

В настоящей статье аналогичный результат доказан для формально гипозллиптических уравнений.

Определение 1. Ограниченное множество $A \subset \mathbb{R}_+^n$ называется многогранником, если существуют натуральное число r , векторы $\{\lambda^j\}_1^r \subset \mathbb{R}_+^n$ и неотрицательные числа $\{\rho^j\}_1^r$ такие, что $A = \{v \in \mathbb{R}_+^n : (v, \lambda^j) \leq \rho_j, 1 \leq j \leq r\}$. Многогранник называется вполне правильным, если $\{\lambda^j\}_1^r \subset \mathbb{R}_+^n \cap \mathbb{R}_0^n$, где $\mathbb{R}_0^n = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi_1, \dots, \xi_n = 0\}$.

Для многогранника A , через A^0 обозначим множество его вершин, $A(t) = \{v : v/t \in A\}$ для $t \geq 0$, $A(0) = \{0\}$ и $A(t) = \emptyset$ при $t < 0$. Известно, что многогранник совпадает с выпуклой оболочкой своих вершин.

Определение 2. Выпуклое множество $B \subset \mathbb{R}_+^n$ называется вполне регулярным, если для любого $v' \in \Pi(v)$, $v \in B$ существует окрестность нуля U в $\mathbb{R}^n$ такая, что $v' + \tau \text{sign } v' \in B$ для всех $\tau \in U$.

Легко видеть, что многогранник A является вполне регулярным тогда и только тогда, когда A является вполне регулярным множеством.

Определение 3 [2]. Многочлен P с постоянными коэффициентами называется гипозллиптическим, если для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ имеем

$$|P^\alpha(\xi)/P(\xi)| \equiv |D_\xi^\alpha P(\xi)/P(\xi)| \rightarrow 0, \quad \alpha \neq 0, \quad P(\xi) \neq 0,$$

при $\|\xi\| \rightarrow \infty$.

Для многочлена P с постоянными коэффициентами и для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ положим

$$D(P) = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : P(\zeta) = 0\}, \quad d_P(\xi) = \inf_{\zeta \in D(P)} \|\xi - \zeta\|,$$

а также определим регулярное весовое множество гипозэллиптичности многочлена P

$$M_P = \left\{ v \in \mathbb{R}_+^n : \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \frac{|\xi|^v}{1 + d_P(\xi)} < \infty \right\}.$$

Легко проверить, что для любого многочлена P множество M_P является выпуклым. Известно, что если P является гипозэллиптическим многочленом, то существует число $\delta \in (0, 1]$ такое, что $\{v \in \mathbb{R}_+^n : |v| \leq \delta\} \subset M_P$.

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Лемма 1. Для любого гипозэллиптического многочлена P с постоянными коэффициентами множество M_P является вполне регулярным.

Доказательство. Достаточно показать, что для любого $v' \in \Pi(v)$ и для каждого $v \in M_P$ существует число $\delta > 0$ такое, что $v' + r \operatorname{sign} v' \in M_P$ для всех $r \in \mathbb{R}_+^n$, $|r| \leq \delta$. Для простоты предположим, что

$$v' = (v_1, \dots, v_k, 0, \dots, 0), \quad v = (v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_m, 0, \dots, 0), \quad \prod_{j=1}^m v_j \neq 0.$$

Покажем, что для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ существует функция $\eta(\xi) \in \mathbb{R}^n$ такая, что для достаточно малых r имеем

$$|\xi|^{v' + r \operatorname{sign} v'} \leq c_1 |\xi + \eta(\xi)|^v \leq c_2 (d_P(\xi + \eta(\xi)) + 1) \leq c_3 (d_P(\xi) + 1), \quad (1)$$

где c_1, c_2, c_3 – некоторые постоянные. Для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ рассмотрим функции

$$\eta_j(\xi) = \begin{cases} \operatorname{sign} \xi_j (|\xi|^\tau + 1) & \text{при } \xi_j \neq 0, \\ |\xi|^\tau + 1 & \text{при } \xi_j = 0, \quad j = k+1, \dots, m, \\ 0 & \text{при } j = 1, \dots, k, \quad j = m+1, \dots, n, \end{cases}$$

где $\tau \in (0, 1)$ – некоторое число, для которого

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \frac{(|\xi| + 1)^\tau}{1 + d_P(\xi)} < \infty.$$

Существование такого числа τ следует из гипозэллиптичности многочлена P . Для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем $\|\eta(\xi)\| \leq (m - k)(|\xi| + 1)^\tau \leq \chi_1 (d_P(\xi) + 1)$, где $\chi_1 \geq m - k$ – постоянная. По определению $d_P(\xi)$, при любом $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$d_P(\xi + \eta(\xi)) \leq d_P(\xi) + \|\eta(\xi)\| \leq (\chi_1 + 1)(d_P(\xi) + 1). \quad (2)$$

Так как $v \in M_P$, в силу неравенства (2) для некоторой постоянной χ_2 и любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\chi_2 |\xi + \eta(\xi)|^v \leq d_P(\xi + \eta(\xi)) + 1 \leq (\chi_1 + 2)(d_P(\xi) + 1). \quad (2')$$

Для завершения доказательства оценки (1) нам остаётся показать, что для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ и для достаточно малого $r \in \mathbb{R}_+^n$ имеем

$$|\xi + \eta(\xi)|^v \geq \chi_3 |\xi|^{v' + r \operatorname{sign} v'},$$

где χ_3 – постоянная. Для любого $r \in \mathbb{R}_+^n$, удовлетворяющего условию

$$|r| \leq r|v - v'| = r \sum_{j=k+1}^m v_j \neq 0$$

и любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем $|\xi + \eta(\xi)|^v \geq |\xi|^{v'} (|\xi| + 1)^{r|v-v'|} \geq |\xi|^{v' + r \operatorname{sign} v'}$. Отсюда, в силу (2') вытекает (1). Этим утверждение Леммы 1 доказано.

Пусть $(P) \subset \mathbb{Z}_+^n$ – конечное множество мультииндексов, а $a_\alpha(x)$, $\alpha \in (P)$ – бесконечно дифференцируемые функции в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Положим

$$P(x, \xi) = \sum_{\alpha \in (P)} a_\alpha(x) \xi^\alpha, \quad P(x, D) = \sum_{\alpha \in (P)} a_\alpha(x) D^\alpha.$$

Определение 4. Многочлен $P(x, \xi)$ с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами называется формально гипозэллиптическим в Ω , если

- $P(x, \xi)$ имеет постоянную силу в Ω (см. [2], Определение 7.1.1),
- $P(x, \xi)$ гипозэллиптичен в некоторой точке $x^0 \in \Omega$.

Дифференциальный оператор $P(x, D)$ с формально гипозэллиптическим символом $P(x, \xi)$ называется формально гипозэллиптическим.

Согласно [2], Лемма 7.1.1, если многочлен $P(x, \xi)$ формально гипозэллиптический в области Ω , то для любого $x^0 \in \Omega$ имеем представление

$$P(x, \xi) = P(x^0, \xi) + \sum_{j=1}^{r(x^0)} a_j(x^0, x) P_j(\xi), \quad (3)$$

где $r(x^0)$ – натуральное число, $P(x^0, \xi)$ – гипозэллиптический многочлен, а многочлены P_j , $j = 1, \dots, r(x^0)$ слабее $P(x^0, \xi)$ (см. [2], Определение 3.2.1). Легко видеть, что для формально гипозэллиптического многочлена $P(x, \xi)$ множество $M_{P(x, \cdot)}$ не зависит от $x \in \Omega$.

Пусть $A \subset \mathbb{R}_+^n$ – вполне регулярный многогранник, и пусть $\{\lambda^j\}_1^k \subset \mathbb{R}_+^n$, $\min \lambda_j^j = 1, j = 1, \dots, k$ – внешние нормали $(n - 1)$ -мерных некоординатных граней A . Будем рассматривать многогранники, удовлетворяющие условию

$$1 \geq \rho_j = \sup_{v \in A} (v, \lambda^j), \quad j = 1, \dots, k.$$

Обозначим

$$h_A(\xi) = \sum_{v \in A^0} \prod_{j=1}^n (1 + \xi_j^2)^{\nu_j/2}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Легко проверить, что для любого $\delta > 0$ существует постоянная $c(\delta) > 0$ такая, что при всех $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$|h_A(\xi) - h_A(\eta)| \leq \delta h_A(\xi) + c(\delta) \left[\sum_{j=1}^n |\xi_j - \eta_j|^{\max \rho_i / \lambda_j^i} + 1 \right]. \quad (4)$$

Предложение 1. Пусть $A \subset \mathbb{R}_+^n$ – вполне регулярный многогранник, $\omega \subset \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\gamma \in C^\infty(\Omega)$ и P – многочлен с постоянными коэффициентами. Для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $\chi(\varepsilon) = \chi_\gamma(\varepsilon) > 0$ такая, что

$$\|h_A F(\gamma P(D)\varphi)\|_{L_2} \leq \left(\sup_\omega |\gamma| + \varepsilon \right) \|h_A F(P(D)\varphi)\|_{L_2} + \chi(\varepsilon) \|F(P(D)\varphi)\|_{L_2}, \quad (5)$$

где $F(V)$ – преобразование Фурье функции V и $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$.

Доказательство. В силу равенства Парсеваля и неравенства треугольника, для любого $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$ имеем

$$\begin{aligned} \|h_A F(\gamma P(D)\varphi)\|_{L_2} &= \|h_A [F(\gamma\psi) \times F(P(D)\varphi)]\|_{L_2} \leq \|F(\gamma\psi) \times h_A F(P)(D)\varphi\|_{L_2} + \\ &+ \left\| \int (h_A(\xi) - h_A(\eta)) F(\gamma\psi)(\xi - \eta) F(P(D)\varphi)(\eta) d\eta \right\|_{L_2} = \\ &= \|F[\gamma\psi F^{-1}(h_A F(P(D)\varphi))]\|_{L_2} + \\ &+ \left\| \int (h_A(\xi) - h_A(\eta)) F(\gamma\psi)(\xi - \eta) F(P(D)\varphi)(\eta) d\eta \right\|_{L_2}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\psi \in C_0^\infty(\omega)$, $\psi = 1$ на $\text{supp } \varphi$. В силу неравенства Юнга, для любого $\delta > 0$ существует постоянная $c_1(\delta) > 0$ такая, что

$$\begin{aligned} &\left\| \int (h_A(\xi) - h_A(\eta)) F(\gamma\psi)(\xi - \eta) F(P(D)\varphi)(\eta) d\eta \right\|_{L_2} \leq \\ &\leq \delta \|F(\gamma\psi)\|_{L_1} \times \|h_A F(P\varphi)\|_{L_2} + c_1(\delta) \|(\|\xi\| + 1) F(\gamma\psi)\|_{L_1} \times \|F(P(D)\varphi)\|_{L_2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Из неравенства (6) в силу (7) получаем утверждение Предложения 1.

Замечание 1. Иногда вместо оценки (5) будем пользоваться следующей более слабой версией оценки (5) :

$$\|h_A F(\gamma P(D)\varphi)\|_{L_2} \leq c \|h_A F(P(D)\varphi)\|_{L_2}, \quad \varphi \in C_0^\infty(\omega), \quad (8)$$

где c – постоянная.

Замечание 2. В условиях Предложения 1, $h_A(\xi) \rightarrow \infty$ при $\|\xi\| \rightarrow \infty$. Следовательно, в силу (5), для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $c(\varepsilon) = c(\varepsilon, \gamma, A) > 0$ такая, что для $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$ имеем

$$\|h_A F(\gamma P(D)\varphi)\|_{L_2} \leq \left(\sup_{\omega} |\gamma| + \varepsilon \right) \|h_A F(P(D)\varphi)\|_{L_2} + c(\varepsilon) \|F(\varphi)\|_{L_2}.$$

Лемма 2. Пусть $A \subset \mathbb{R}_+^n$ – вполне регулярный многогранник и $P(x, D)$ – формально гипозеллиптический оператор в $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Для любого $x^0 \in \Omega$ существуют окрестность $\omega \subset \Omega$ точки x^0 и постоянная $c > 0$ такие, что

$$\|h_A F(P(x^0, D)\varphi)\|_{L_2} \leq c [\|h_A F(P(x, D)\varphi)\|_{L_2} + \|F(\varphi)\|_{L_2}], \quad \varphi \in C_0^\infty(\omega). \quad (9)$$

Доказательство. В силу (3) оператор $P(x, D)$ можно представить в виде

$$P(x, D) = P(x^0, D) + \sum_{j=1}^{r(x^0)} a_j(x^0, x) P_j(D), \quad (3')$$

где многочлены P_j слабее чем $P(x^0, \cdot)$ и $a_j(x^0, x)$ – бесконечно дифференцируемые функции, $j = 1, \dots, r(x^0)$. В силу Замечания 2 для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $c(\varepsilon) > 0$ такая, что при всех $\varphi \in C_0^\infty(\omega')$, $x^0 \in \omega' \subset \subset \Omega$

$$\begin{aligned} \|h_A F(P(x, D)\varphi)\|_{L_2} &\geq \|h_A F(P(x^0, D)\varphi)\|_{L_2} - \sum_{j=1}^{r(x^0)} \|h_A F(a_j(x^0, x) P_j(D)\varphi)\|_{L_2} \geq \\ &\geq \|h_A F(P(x^0, D)\varphi)\|_{L_2} - \sum_{j=1}^{r(x^0)} \left(\sup_{\omega} |\gamma| + \varepsilon \right) \|h_A F(P_j \varphi)\|_{L_2} - c(\varepsilon) \|F(\varphi)\|_{L_2}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $P_j < P(x^0, \cdot)$ и $a_j(x^0, x^0) = 0$ для $j = 1, \dots, r(x^0)$ и используя Теорему 3.2.6 из [2], завершаем доказательство.

Лемма 3. Пусть $A \subset M_P$ – вполне регулярный многогранник, а P – гипозеллиптический многочлен с постоянными коэффициентами. Для любого натурального m существует постоянная $c > 0$ такая, что для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ и $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\sum_{\alpha \neq 0} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\| (\varepsilon h_A)^m F(P^{(\alpha)}(D)\varphi) \right\|_{L_2}^2 \leq c \sum_{\alpha} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\| (\varepsilon h_A)^{m-1} F(P^{(\alpha)}(D)\varphi) \right\|_{L_2}^2.$$

Доказательство. Проводится аналогично доказательству Леммы 4.4.1 из [2].

Из Леммы 3 и Теоремы 3.3.2 работы [2], непосредственно вытекает следующее утверждение.

Лемма 4. Пусть $A \subset M_P$ – вполне регулярный многогранник, а $P_j, j = 0, 1, \dots, k$ – многочлены с постоянными коэффициентами. Предположим, что P_0 гипозеллиптичен, а $P_j, j = 0, 1, \dots, k$ – слабее чем P_0 . Тогда для любого натурального m существует постоянная $c > 0$ такая, что для каждого $\varepsilon \in (0, 1)$ и $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\sum_{j=0}^k \sum_{\alpha \neq 0} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\| (\varepsilon h_A)^m P_j^{(\alpha)}(\xi) F(\varphi) \right\|_{L_2}^2 \leq c \sum_{\alpha} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\| (\varepsilon h_A)^{m-1} P_0^{(\alpha)}(\xi) F(\varphi) \right\|_{L_2}^2.$$

Для области $\omega \subset \subset \mathbb{R}^n$ и числа $\delta > 0$ положим $\omega_\delta = \{x \in \omega : \rho(x, \partial\omega) > \delta\}$, где $\rho(\cdot, \cdot)$ – функция расстояния. Для натурального m и $\varepsilon \in (0, 1)$ положим

$$\varphi_{j,\omega}^\varepsilon(x) = X_{\omega_{\varepsilon/2}} * (\varepsilon/2)^{-n} \varphi(2x/\varepsilon), \quad \int \varphi dx = 1, \quad \varphi \in C_0^\infty(S^1),$$

где X_ω – характеристическая функция множества ω , и $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$.

Лемма 5. Пусть $A \subset M_P$ – вполне регулярный многогранник, и пусть $P(x, D)$ – формально гипозеллиптический оператор, представленный в точке $x^0 \in \Omega$ в виде (3'). Пусть $\omega \subset \subset \Omega$ – окрестность точки x^0 , для которой выполняется (9). Тогда для любого натурального числа m существует постоянная $c > 0$ такая, что для каждого $\varepsilon \in (0, 1)$, $l = 1, 2, \dots$ и $U \in C_0^\infty(\Omega)$ имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{r(x^0)} \sum_{\alpha \neq 0} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\| (\varepsilon h_A)^m F(P_j^{(\alpha)}(D)(U\varphi_{l,\omega}^\varepsilon)) \right\|_{L_2}^2 \leq \\ & \leq c \left[\left\| (\varepsilon h_A)^{m-1} F((P(x, D)U)\varphi_{l,\omega}^\varepsilon) \right\|_{L_2}^2 + \right. \\ & \left. + \sum_{j=0}^{r(x^0)} \sum_{|\gamma| \leq k} \sum_{\alpha \neq 0} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\| (\varepsilon h_A)^{m-1} F(P_j^{(\alpha)}(D)(U\varepsilon^\gamma D^\gamma \varphi_{l,\omega}^\varepsilon)) \right\|_{L_2}^2 \right], \end{aligned}$$

где $k = \text{ord } P$.

Доказательство. По Лемме 4

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{r(x^0)} \sum_{\alpha \neq 0} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\| (\varepsilon h_A)^m F(P_j^{(\alpha)}(D)(U\varphi_{l,\omega}^\varepsilon)) \right\|_{L_2}^2 \leq \\ & \leq c' \sum_{\alpha} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\| (\varepsilon h_A)^{m-1} F(P_0^{(\alpha)}(D)(U\varphi_{l,\omega}^\varepsilon)) \right\|_{L_2}^2, \end{aligned} \tag{10}$$

где $c' > 0$ – постоянная. Следовательно, нам требуется оценить только последнее слагаемое в правой части неравенства (10). По Лемме 2 имеем

$$\begin{aligned} & \left\| (\varepsilon h_A)^{m-1} F(P_0^{(\alpha)}(D)(U\varphi_{l,\omega}^\varepsilon)) \right\|_{L_2}^2 \leq \\ & \leq \left\| (\varepsilon h_A)^{m-1} F(P(x, D)(U\varphi_{l,\omega}^\varepsilon)) \right\|_{L_2}^2 + \varepsilon^{2(m-1)} \left\| F(U\varphi_{l,\omega}^\varepsilon) \right\|_{L_2}^2, \end{aligned} \quad (11)$$

где $c_1 > 0$ – некоторая постоянная. Так как

$$P(x, D)(U\varphi_{l,\omega}^\varepsilon) = \varphi_{l,\omega}^\varepsilon P(x, D)U + \sum_{\alpha \neq 0} \delta_\alpha P^{(\alpha)}(x, D)(UD^\alpha \varphi_{l,\omega}^\varepsilon),$$

где δ_α – постоянные, то из оценки (11) с некоторой постоянной $c_2 > 0$ и $\varepsilon \in (0, 1)$ получаем

$$\begin{aligned} & \left\| (\varepsilon h_A)^{m-1} F(P_0^{(\alpha)}(D)(U\varphi_{l,\omega}^\varepsilon)) \right\|_{L_2}^2 \leq c_2 \left[\left\| (\varepsilon h_A)^{m-1} F(\varphi_{l,\omega}^\varepsilon P(x, D)U) \right\|_{L_2}^2 + \right. \\ & \left. + \sum_{\alpha \neq 0} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\| (\varepsilon h_A)^{m-1} F(P^{(\alpha)}(x, D)(U\varepsilon^{|\alpha|} D^\alpha \varphi_{l,\omega}^\varepsilon)) \right\|_{L_2}^2 + \left\| F(U\varphi_{l,\omega}^\varepsilon) \right\|_{L_2}^2 \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Применив оценку (8) к правой части (12), из (10) – (12) получим утверждение Леммы 5.

Следствие 1. В условиях Леммы 5, для любого $\beta = A(m) \cap \mathbb{Z}_+^n$, $A(m) = mA$ существует постоянная $c > 0$ такая, что для каждого $\varepsilon \in (0, 1)$, $l = 1, 2, \dots$, $U \in C^\infty(\Omega)$ имеем

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{2m} \sum_{j=0}^{r(x^0)} \sum_{\alpha} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\| D^\beta P_j^{(\alpha)}(D)U \right\|_{L_2(\omega_{\varepsilon l})}^2 \leq \\ & \leq c \left[\sum_{|\gamma| \leq mk} \left\| (\varepsilon h_A)^m F(\varepsilon^{|\gamma|} D^\gamma \varphi_{l,\omega}^\varepsilon P(x, D)U) \right\|_{L_2}^2 + \right. \\ & \left. + \sum_{j=0}^{r(x^0)} \sum_{\alpha \neq 0} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\| P_j^{(\alpha)}(D)U \right\|_{L_2(\omega_{\varepsilon(l-1)})}^2 \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Доказательство. В силу равенства Парсеваля и из неравенства $\varepsilon^m |\xi|^\beta \leq (\varepsilon h_A)^m$ имеем

$$\varepsilon^{2m} \sum_{j=0}^{r(x^0)} \sum_{\alpha} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\| D^\beta P_j^{(\alpha)}(D)U \right\|_{L_2(\omega_{\varepsilon l})}^2 \leq$$

$$\begin{aligned}
 &\leq c_1 \sum_{j=0}^{r(x^0)} \sum_{\alpha \neq 0} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\| (\varepsilon h_A)^m (P_j^{(\alpha)} F(U\varphi_{l,\omega}^\varepsilon)) \right\|_{L_2}^2 = \\
 &= c_1 \sum_{j=0}^{r(x^0)} \left\| (\varepsilon h_A)^m P_j(\xi) F(U\varphi_{l,\omega}^\varepsilon) \right\|_{L_2}^2 + \\
 &+ c_1 \sum_{j=0}^{r(x^0)} \sum_{\alpha \neq 0} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\| (\varepsilon h_A)^m P_j^{(\alpha)}(\xi) F(U\varphi_{l,\omega}^\varepsilon) \right\|_{L_2}^2,
 \end{aligned} \tag{14}$$

где $c_1 > 0$ – постоянная. По Лемме 2 и того, что многочлены P_j слабее P_0 , для первого слагаемого правой части неравенства (14) имеем

$$\begin{aligned}
 &\sum_{j=0}^{r(x^0)} \left\| (\varepsilon h_A)^m P_j(\xi) F(U\varphi_{l,\omega}^\varepsilon) \right\|_{L_2}^2 \leq c_2 \left\| (\varepsilon h_A)^m P(x^0, \xi) F(U\varphi_{l,\omega}^\varepsilon) \right\|_{L_2}^2 \leq \\
 &\leq c_3 \left[\left\| (\varepsilon h_A)^m F(P(x, D)U\varphi_{l,\omega}^\varepsilon) \right\|_{L_2}^2 + \left\| F(U\varphi_{l,\omega}^\varepsilon) \right\|_{L_2}^2 \right],
 \end{aligned} \tag{15}$$

где $c_2, c_3 > 0$ – постоянные. Используя Лемму 5 и неравенство $x^a < x^b + 1$, $0 \leq a \leq b$, $x \in (0, \infty)$, для второго слагаемого правой части неравенства (14), для каждого $\varepsilon \in (0, 1)$, $l = 1, 2, \dots$ и $U \in C^\infty(\Omega)$ получаем

$$\begin{aligned}
 &\sum_{j=0}^{r(x^0)} \sum_{\alpha \neq 0} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\| (\varepsilon h_A)^m P_j^{(\alpha)}(\xi) F(U\varphi_{l,\omega}^\varepsilon) \right\|_{L_2}^2 \leq \\
 &\leq c_4 \left[\sum_{|\gamma| \leq mk} \left\| (\varepsilon h_A)^{m-1} F(\varepsilon^{|\gamma|} D^\gamma \varphi_{l,\omega}^\varepsilon P(x, D)U) \right\|_{L_2}^2 + \right. \\
 &\left. + \sum_{j=0}^{r(x^0)} \sum_{\alpha \neq 0} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\| P_j^{(\alpha)}(D)U \right\|_{L_2(\omega_{\varepsilon(l-1)})}^2 \right],
 \end{aligned} \tag{16}$$

где $c_4 > 0$ – постоянная. Из оценок (14) – (16) вытекает оценка (13). Этим завершается доказательство Следствия 1.

Замечание 3. Пусть выполнены условия Следствия 1. Предполагая дополнительно, что $A^0(m) \subset \mathbb{Z}_+^n$, и поскольку $\gamma - \beta \in A(m - |\beta|)$ при $\beta, \gamma \in \mathbb{Z}_+^n$, $\beta \leq \gamma$, $\gamma \in A(m)$, из оценки (13) получаем

$$\varepsilon^{2m} \sum_{j=0}^{r(x^0)} \sum_{\alpha} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\| D^\beta P_j^{(\alpha)}(D)U \right\|_{L_2(\omega_{\varepsilon l})}^2 \leq$$

$$\leq c \left[\sum_{i=0}^m \sum_{v \in (A(i)/A(i-1) \cap \mathbb{Z}_+^n)} \varepsilon^{2i} \|D^v P(x, D)U\|_{L_2(\omega_{\varepsilon(i-1)})}^2 + \sum_{j=0}^{r(x^0)} \sum_{\alpha \neq 0} \varepsilon^{-2|\alpha|} \|P_j^{(\alpha)}(D)U\|_{L_2(\omega_{\varepsilon(i-1)})}^2 \right]. \quad (17)$$

Нам необходим следующий результат из [9].

Предложение 2. Пусть $A \subset \mathbb{R}_+^n$ – вполне регулярный многогранник, вершины которого являются точки с рациональными компонентами. Пусть m – натуральное число такое, что $A^0(m) \subset \mathbb{Z}_+^n$. Тогда существует натуральное число $j_0 \geq m$ такое, что для любого $j \geq j_0$ и $\alpha \in A(j) \subset \mathbb{Z}_+^n$ имеет место представление

$$\alpha = \beta + \gamma, \quad \beta \in A(m) \subset \mathbb{Z}_+^n, \quad \gamma \in A(j-m) \subset \mathbb{Z}_+^n.$$

Для области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и вполне регулярного множества $A \subset \mathbb{R}_+^n$ положим $\Gamma^A(\Omega) = \{U \in C^\infty(\Omega) :$

$$\forall K \subset\subset \Omega, \exists c > 0, \sup_K |D^\alpha U| \leq c^{j+1} j^j, \alpha \in A(j) \cap \mathbb{Z}_+^n, j = 1, 2, \dots \}.$$

Предложение 3. Для любых $f \in \Gamma^A(\Omega)$ и $\omega \subset\subset \Omega$ существует постоянная $c = c(f, \omega)$ такая, что

$$\varepsilon^r \sup_{\omega_{\varepsilon j}} |D^\alpha f| \leq c^{r+1} r! j^{-r}, \quad \alpha \in A(r), \quad r, j = 1, 2, \dots, \quad \varepsilon \in (0, 1). \quad (18)$$

Доказательство. Так как ω ограничена, то $\omega_{\varepsilon j} = \emptyset$ для $\varepsilon j \geq \dim \omega / 2 \equiv a < \infty$. Поэтому достаточно доказать оценку (18) для $\varepsilon j < a$. Так как $f \in \Gamma^A(\Omega)$ с некоторой постоянной $c_1 = c_1(f, \omega) > 0$, то имеем

$$\sup_\omega |D^\alpha f| \leq c_1^{r+1} r!, \quad \alpha \in A(r) \subset \mathbb{Z}_+^n, \quad r = 1, 2, \dots$$

Следовательно, для любого $j = 1, 2, \dots$ и $\varepsilon \in (0, 1)$

$$(\varepsilon j / a)^r \sup_{\omega_{\varepsilon j}} |D^\alpha f| \leq (\varepsilon j / a)^r \sup_\omega |D^\alpha f| \leq c_1^{r+1} r!, \quad \alpha \in A(r) \subset \mathbb{Z}_+^n, \quad r = 1, 2, \dots$$

Отсюда получаем

$$\varepsilon^r \sup_{\omega_{\varepsilon j}} |D^\alpha f| \leq c_1^{r+1} a^r r! j^{-r} \leq c_2^{r+1} r! j^{-r}.$$

Предложение 3 доказано.

§3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для дифференциального оператора $P(x, D)$ и функции f через $N(P, f)$ обозначим множество всех решений уравнения $P(x, D)U = f$.

Теорема 1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область, $P(x, D)$ – формально гипозэллиптический оператор в Ω с аналитическими коэффициентами, и пусть $A \subset M_P$ – вполне регулярный многогранник, вершинами которого являются точки с рациональными компонентами. Тогда $N(P, f) \subset \Gamma^A(\Omega)$ для любого $f \in \Gamma^A(\Omega)$.

Доказательство. Так как утверждение Теоремы носит локальный характер, то достаточно показать, что для любого $x^0 \in \Omega$ существует окрестность $\omega \subset \Omega$, для которой $N(P, f) \subset \Gamma^A(\omega)$. Пусть $\omega \subset \subset \Omega$ такая окрестность точки $x^0 \in \Omega$, для которой выполняется (9). Покажем, что для любого $U \in N(P, f)$ существует постоянная $B = B_U$ такая, что для любого $\varepsilon \in (0, 1)$, $l = 1, 2, \dots$ и $\beta \in A(l) \cap \mathbb{Z}_+^n$ имеем

$$\varepsilon^{l+d_0} \sum_{j=0}^{r(x^0)} \sum_{\alpha} \varepsilon^{-|\alpha|} \left\| D^\beta P_j^{(\alpha)}(D)U \right\|_{L_2(\omega_{\varepsilon l})} \leq B^{l+1}, \quad (19)$$

где $d_0 = \sigma d P$. В силу Предложения 2 существует натуральное число $j_0 \geq m$ такое, что для любого $j \geq j_0$ и $\beta \in A(j) \cap \mathbb{Z}_+^n$ имеет место представление

$$\beta = \gamma + \nu, \quad \gamma \in A(m) \subset \mathbb{Z}_+^n, \quad \nu \in A(j - m) \subset \mathbb{Z}_+^n.$$

Оценку (19) будем доказывать индукцией по j . Так как оператор $P(x, D)$ – формально гипозэллиптический, то $N(P, f) \subset C^\infty(\omega)$. Следовательно, (19) имеет место для $\beta \in A(j_0) \subset \mathbb{Z}_+^n$ и некоторой константы $B = B_{U, j_0}$. Предположим, что (19) имеет место для $l \leq j$, $j \geq j_0$ и докажем, что она остаётся справедливой для $l = j + 1$. Пусть $\beta \in A(j + 1) \setminus A(j)$ – произвольный фиксированный мультииндекс. В силу Предложения 2 можно представить β в виде $\beta = \gamma + \nu$, $\gamma \in A(m) \cap \mathbb{Z}_+^n$, $\nu \in A(j + 1 - m) \cap \mathbb{Z}_+^n$. Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{j+1+d_0} \sum_{r=0}^{r(x^0)} \sum_{\alpha} \varepsilon^{-|\alpha|} \left\| D^\beta P_r^{(\alpha)}(D)U \right\|_{L_2(\omega_{\varepsilon(j+1)})} = \\ & = \varepsilon^{j+1+d_0} \sum_{r=0}^{r(x^0)} \sum_{\alpha} \varepsilon^{-|\alpha|} \left\| D^\gamma P_r^{(\alpha)}(D)(D^\nu U) \right\|_{L_2(\omega_{\varepsilon(j+1)})}. \end{aligned} \quad (20)$$

В силу оценки (17) имеем

$$\varepsilon^{j+1+d_0} \sum_{r=0}^{r(x^0)} \sum_{\alpha} \varepsilon^{-|\alpha|} \left\| D^\gamma P_r^{(\alpha)}(D)(D^\nu U) \right\|_{L_2(\omega_{\varepsilon(j+1)})} \leq$$

$$\leq c\varepsilon^{j+1-m+d_0} \left[\sum_{i=0}^m \sum_{v \in (A(i)/A(i-1)) \cap \mathbb{Z}_+^n} \varepsilon^i \|D^\gamma P(x, D) D^v U\|_{L_2(\omega_{\varepsilon_j})}^2 + \right. \\ \left. + \sum_{j=0}^{r(x^0)} \sum_{\alpha \neq 0} \varepsilon^{-|\alpha|} \|P_r^{(\alpha)}(D) D^v U\|_{L_2(\omega_{\varepsilon_j})}^2 \right]. \quad (21)$$

Поскольку $v \in A(j+1-m) \subset A(j)$, то в силу предположения индукции с некоторой постоянной $c_1 > 0$ и $B \geq 1$ имеем

$$\varepsilon^{j+1+d_0} \sum_{r=0}^{r(x^0)} \sum_{\alpha} \varepsilon^{-|\alpha|} \|P_r^{(\alpha)}(D)(D^v U)\|_{L_2(\omega_{\varepsilon(j+1)})} \leq c_1 B^{j+1-m+1} \leq c_1 B^{j+1}. \quad (22)$$

Следовательно, нам остаётся оценить выражение

$$Q \equiv \varepsilon^{j+1-m+d_0} \sum_{i=0}^m \sum_{v \in (A(i)/A(i-1)) \cap \mathbb{Z}_+^n} \varepsilon^i \|D^\gamma P(x, D) D^v U\|_{L_2(\omega_{\varepsilon_j})}^2.$$

Так как $P(x, D)U = f$ и $D^\gamma P(x, D)D^v U = D^{\gamma+v} P(x, D)U + [D^v, D^\gamma P(x, D)]U$, то имеем

$$Q \leq \varepsilon^{j+1-m+d_0} \sum_{i=0}^m \sum_{v \in (A(i)/A(i-1)) \cap \mathbb{Z}_+^n} \varepsilon^i \left[\|D^{\gamma+v} f\|_{L_2(\omega_{\varepsilon_j})} + \right. \\ \left. + \|[D^v, D^\gamma P(x, D)]U\|_{L_2(\omega_{\varepsilon_j})} \right]. \quad (23)$$

В силу Предложения 3, для первого слагаемого правой части неравенства (23) имеем

$$\varepsilon^{j+1-m+d_0} \sum_{i=0}^m \sum_{v \in (A(i)/A(i-1)) \cap \mathbb{Z}_+^n} \varepsilon^i \|D^{\gamma+v} f\|_{L_2(\omega_{\varepsilon_j})} \leq \\ \leq G \sum_{i=0}^m \Delta_1^{j+1-m+i+1} (j+1-m+i)! (1/j)^{j+1-m+i} \leq \Delta_2^{j+1}, \quad (24)$$

где G – количество мультииндексов множества $A(m)$, $\Delta_2 \geq \Delta_1 = \Delta_1(f, \omega)$ – постоянная. Легко видеть, что члены второго слагаемого правой части (23) имеют вид $D^\mu a_j(x^0, x) D^{\gamma+v-\mu} P_j(D)U$, $j = 1, \dots, r(x^0)$, $0 \neq \mu \leq \gamma + v$, а количество мультииндексов μ , для которых функция a_j дифференцирована k -раз, не превосходит числа $C_{|\gamma+v|}^k \leq C_{j+1}^k$, и $v + \gamma - \mu \in A(j+1-m+i-k) \subset A(j)$. Следовательно, в силу Предложения 3 и предположения индукции для $B \geq 2\Delta_3$, $B \geq 1$, где Δ_3 – постоянная, получаем

$$\varepsilon^{j+1-m+d_0} \sum_{i=0}^m \sum_{v \in (A(i)/A(i-1)) \cap \mathbb{Z}_+^n} \varepsilon^i \|[D^v, D^\gamma P(x, D)]U\|_{L_2(\omega_{\varepsilon_j})} \leq$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \varepsilon^{j+1-m+d_0} \sum_{i=0}^m \sum_{\nu \in (A(i)/A(i-1) \cap \mathbb{Z}_+^n)} \varepsilon^i \sum_{0 \neq \mu \leq \gamma + \nu} C_{\nu+\gamma}^\mu \times \\
 &\quad \times \sum_{r=0}^{r(x^0)} \left\| (D^\mu a_\mu) P_j(D) D^{\nu+\gamma-\mu} U \right\|_{L_2(\omega_{\varepsilon j})} \leq \\
 &\leq \sum_{r=0}^{r(x^0)} \sum_{i=0}^m \sum_{k=1}^{j+1-m+i} \Delta_3^{k+1} k! j^{-k} B^{j+1-m+i-k+1} \leq \\
 &\leq (\tau(x^0) + 1) \sum_{i=0}^m B^{j+1-m+i} \Delta_3^2 \left(\sum_{k=1}^{j+1-m+i} (\Delta_3/B)^{k-1} \right) \leq \\
 &\leq 2(\tau(x^0) + 1) \Delta_3^2 \sum_{i=0}^m B^{j+1-m+i} \leq 2m(\tau(x^0) + 1) B^{j+1}. \tag{25}
 \end{aligned}$$

Из оценок (20) – (25) для $B \geq 2\Delta_3$, $B \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned}
 &\varepsilon^{j+1+d_0} \sum_{r=0}^{r(x^0)} \sum_{\alpha} \varepsilon^{-|\alpha|} \left\| D^\beta P_r^{(\alpha)}(D) U \right\|_{L_2(\omega_{\varepsilon(j+1)})} \leq \\
 &\leq c_1 B^{j+1} + \Delta_2^{j+1} + 2m(\tau(x^0) + 1) B^{j+1}.
 \end{aligned}$$

Предполагая, что $B > \max\{c_1 + 1 + 2m(\tau(x^0) + 1), \Delta_2, \Delta_3\}$, получаем оценку (19) для $l = j + 1$. Этим завершается доказательство оценки (19).

Пусть $L \subset\subset \omega$ – компакт. Тогда имеем $\rho(L, \partial\omega) = \delta > 0$. Для любого натурального числа j положим $\varepsilon = \delta/j$ и заметим, что $L \subset\subset \omega_{\varepsilon j}$. Из оценки (19) для $\beta \in A(j) \subset \mathbb{Z}_+^n$ получим

$$(\delta/j)^{j+d_0} \sum_{r=0}^{r(x^0)} \sum_{\alpha} (j/\delta)^{|\alpha|} \left\| D^\beta P_r^{(\alpha)}(D) U \right\|_{L_L} \leq B^{j+1},$$

откуда следует утверждение Теоремы 1.

Предполагая, что $\rho_j \leq 1$, $j = 1, \dots, k$, можно ослабить условия на коэффициенты оператора $P(x, D)$. Справедливо следующее обобщение Теоремы 1.

Теорема 2. Пусть выполнены все условия Теоремы 1, кроме условия на коэффициенты оператора $P(x, D) = \sum_{\alpha \in (P)} c_\alpha(x) D^\alpha$. Предположим, что $c_\alpha(x) \in \Gamma^{A'}(\Omega)$

для любого $\alpha \in (P)$, где

$$A' = \{v \in \mathbb{R}_+^n : (v, \lambda^0) \leq 1\}, \quad \lambda^0 = \left(\min_j \lambda_1^j / \rho_j, \dots, \min_j \lambda_n^j / \rho_j \right).$$

Тогда для любого $f \in \Gamma^{A'}(\Omega)$ необходимо $N(P, f) \subset \Gamma^{A'}(\Omega)$.

Доказательство. Аналогично доказательству Теоремы 1.

Теми же рассуждениями доказываются следующие утверждения.

Теорема 3. Пусть оператор $P(x, D)$ удовлетворяет условиям Теоремы 1. Если $B \subset \mathbb{R}_+^n$ – вполне регулярное множество, а $A \subset B \cap M_P$ – вполне регулярный многогранник, удовлетворяющий Теореме 1, то для всех $f \in \Gamma^B(\Omega)$ необходимо $N(P, f) \subset \Gamma^A(\Omega)$.

Теорема 4. Пусть оператор $P(x, D)$ и вполне регулярный многогранник $A \subset M_P$ удовлетворяют условиям Теоремы 1 и $t \geq 1$ – рациональное число. Тогда для любого $f \in \Gamma^{A(1/t)}(\Omega)$ имеем $N(P, f) \subset \Gamma^{A(1/t)}(\Omega)$.

Abstract. The paper presents sufficient conditions, under which the solutions of formally hypoelliptic equations belong to the multi-anisotropic Gevrey classes.

ЛИТЕРАТУРА

1. I. G. Petrovski, "Ueber das Cauchysche Problem fuer System von parziellen differential Gleichungen", *Мат. Сборник*, том 2, № 44, стр. 815 – 868, 1937.
2. Л. Хермандер, *Линейные Дифференциальные Операторы с Частными Производными*, Москва, Мир, 1965.
3. F. Trév, "Operateurs differentiels hypoelliptiques", *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, vol. 9, pp. 1 – 73, 1959.
4. В. И. Буренков, "Аналог теоремы Хермандера о гипозэллиптичности для функций, стремящихся к нулю на бесконечности", *Сбор. Док. Совет-Чехосл. Семинара*, Ереван, стр. 63 – 67, 1982.
5. M. Durand, "Redularite Gevrey d'une classe d'operateurs hypoelliptiques", *J. Math. Pures et Appl.*, vol. 57, pp. 323 – 350, 1978.
6. L. Rodino, "Gevrey hypoellipticity for a class of operators with multiple characteristics", *Asterisque*, vol. 889-90, pp. 249 – 262, 1981.
7. Г. Г. Казарян, "О функциональном показателе гипозэллиптичности", *Мат. Сборник*, том 128(170), № 3(11), стр. 339 – 353, 1985.
8. Г. О. Акопян, "Об оценках производных решений одного класса гипозэллиптических уравнений", *Изв. АН Арм.ССР. Математика*, том 21, № 4, стр. 338 – 353, 1986.
9. Г. О. Акопян, В. Н. Маргарян, "О принадлежности классам Жевре решений гипозэллиптических уравнений", *Изв. НАН Армении, Математика*, том 31, № 2, стр. 33 – 47, 1996.

Поступила 1 апреля 2000