Известия НАН Армении. Математика, **37**, № 2, 2002, 19–32

АДДИТИВНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ КОСОЭРМИТОВОГО ЛИНЕЙНОГО ПУЧКА ОПЕРАТОРОВ

В. Л. Даллакян, А. Г. Руткас

Институт Информатики и Задач Автоматизации НАН Армении,
Харьковский государственный университет
e-mail : rut@nikon.kharkov.ua

Резюме. Установлено соответствие между приводящими подпространствами косоэрмитового линейного пучка и аддитивным разложением характеристической функции этого пучка.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Как доказано в [1], класс функций, позитивных и аналитических в открытой правой полуплоскости, совпадает с классом характеристических функций косоэрмитовых линейных пучков операторов, действующих в гильбертовом пространстве. Таким пучкам операторов ставятся в соответствие операторные Σ-узлы, вводятся понятия эквивалентности для пучков и операторных узлов, и рассматриваются преобразования, не выводящие операторные узлы из класса эквивалентности. Существование взаимно однозначного соответствия между инвариантными парами подпространств некосоэрмитового пучка $\lambda\widetilde{A} + \widetilde{B}$ и мультипликативными представлениями характеристических функций $s(\lambda)$ П-узлов установлено в [2], [3]. Мультипликативным разложениям сжимающих функций или J-сжимающих матриц-функций посвящены также работы [4] – [6].

Наряду с функциями рассеяния и передачи, аналитическая теория цепей изучает функции сопротивления (импеданс), проводимости (адмиттанс) [7] – [9] и гибридного отображения, которые обладают свойством позитивности, т.е. являются неванлинновскими в правой полуплоскости.

В настоящей статье доказано, что имеется соответствие между парами приводящих подпространств косоэрмитового пучка и аддитивными разложениями как характеристической функции $z(\lambda)$ этого пучка и соответствующего ему операторного Σ-узла, так и связанной с ним импедансной системы.

§2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть $X, Y, \mathcal{E}$ – гильбертовы пространства с индефинитными метриками $j_X, j_Y, \mathcal{J}_{\mathcal{E}}$, соответственно. Для $x \in X$, $y \in Y$, $e \in \mathcal{E}$ положим $[x,x] = (j_X x, x)$, $[y,y] = (j_Y y, y)$, $[e,e] = (\mathcal{J}_{\mathcal{E}} e, e)$ (пространства М. Г. Крейна). Пусть $\mathcal{F}_X = X \oplus X \oplus \mathcal{E}$ – гильбертово пространство с индефинитной метрикой, задаваемое оператором Грама

$$\mathcal{J}^X = \begin{bmatrix} 0 & -j_X & 0 \\ j_X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{J}_{\mathcal{E}} \end{bmatrix}.$$

Гильбертово пространство $\mathcal{F}_Y = Y \oplus Y \oplus \mathcal{E}$ определяется аналогично. Рассмотрим ортогональные проекторы, действующие в пространствах $\mathcal{F}_X$ и $\mathcal{F}_Y$:

$$P_X : \mathcal{F}_X \longmapsto X \oplus X, \quad Q_X : \mathcal{F}_X \longmapsto \mathcal{E}, \quad P_Y : \mathcal{F}_Y \longmapsto Y \oplus Y, \quad Q_Y : \mathcal{F}_Y \longmapsto \mathcal{E}.$$

Определение 2.1. *Оператор*

$$V = \begin{bmatrix} A & B & L \\ C & D & R \\ M & N & K \end{bmatrix} : \mathcal{F}_X \longmapsto \mathcal{F}_Y$$

с ограниченными блоками называется операторным узлом, а оператор-функция комплексной переменной λ $w(V,\lambda) = K - (\lambda M + N)(\lambda A + B)^{-1} L$ *называется характеристической функцией операторного пучка* $\lambda A + B$ *и узла* V.

Характеристическая функция $w(V,\lambda)$ рассматривается на множестве

$$\{\lambda : \lambda \text{ не является собственным значением пучка } \lambda A + B\} \cap$$
$$\cap \{\lambda : \text{ функция } \Gamma(\lambda) = (\lambda A + B)^{-1} L \text{ голоморфна}\} \cap$$
$$\cap \{\lambda : \text{ функции } (\mu A^+ + B^+)^{-1} M^+ \text{ и } (\mu A^+ + B^+)^{-1} N^+ \text{ голоморфны в } \mu = \overline{\lambda}\}.$$

Характеристическая функция $w(V,\lambda)$ операторного узла V голоморфна в области регулярности $\rho = \rho(A,B)$ операторного пучка $\lambda A + B$. Пусть $\Pi_- =$ левая полуплоскость ($\mathrm{Re}\,\lambda < 0$), а $\Pi_+ =$ правая полуплоскость ($\mathrm{Re}\,\lambda > 0$). Предположим, что пучок $\lambda A + B$ имеет хотя бы одну регулярную точку в Π_- и хотя бы одну в Π_+ (см. [1], [2]).

Будем говорить, что линейная система $\Phi_V = \{(f, x, g)\}$ с входом $f \in \mathcal{E}$, с выходом $g \in \mathcal{E}$ и внутренним состоянием $x \in X$ **связана** с операторным узлом V, если векторы её состояния определяются посредством уравнений

$$(\lambda A + B)x = Lf, \quad g = Kf - (\lambda M + N)x. \tag{2.1}$$

Определение 2.2. *[2]. Операторный узел $\widehat{V} : \mathcal{F}_X \longmapsto \mathcal{F}_Y$ называется $\Pi-$узлом, если он $(\mathcal{J}^X, \mathcal{J}^Y)$-унитарен : $\widehat{V}\widehat{V}^+ = I$, $\widehat{V}^+\widehat{V} = I$, $(\widehat{V}^+ = \mathcal{J}^X \widehat{V}^* \mathcal{J}^Y)$.*

Определение 2.3. *[1]. Операторный узел $V : \mathcal{F}_X \longmapsto \mathcal{F}_Y$ называется Σ-узлом, если относительно индефинитных метрик $\mathcal{J}^X$ и $\mathcal{J}^Y$ выполняются соотношения*

$$VQ_Y + Q_X V^+ = VP_X V^+ - P_Y, \quad V^+ Q_X + Q_Y V = V^+ P_Y V - P_X. \tag{2.2}$$

В терминах блоков соотношения (2.2) эквивалентны следующим :

$$\begin{array}{ll}
1)\ AD^+ + BC^+ = I, & 7)\ D^+A + B^+C = I, \\
2)\ AB^+ + BA^+ = 0, & 8)\ C^+A + A^+C = 0, \\
3)\ CD^+ + DC^+ = 0, & 9)\ D^+B + B^+D = 0, \\
4)\ MD^+ + NC^+ = -R^+, & 10)\ D^+L + B^+R = -N^+, \\
5)\ MB^+ + NA^+ = -L^+, & 11)\ C^+L + A^+R = -M^+, \\
6)\ MN^+ + NM^+ = -(K + K^+), & 12)\ R^+L + L^+R = -(K + K^+).
\end{array} \tag{2.3}$$

Линейная система $\Phi_V = \{(f, x, g)\}$, связанная с операторным Σ-узлом V, обладает передаточным отображением $z(\lambda) = w(V, \lambda)$, имеющим физический смысл импеданса, адмиттанса или гибридной матрицы электрического многополюсника [10], и называется **импедансной системой**. Операторные (матричные) коэффициенты уравнений (2.1), описывающих физическую систему на графе, явно выражаются через топологические характеристики этой системы (см. [10], [11]). Взаимная связь между П-узлами, Σ-узлами и соответствующими системами рассмотрена в работе [1].

Теорема 2.1. *[1]. В дефинитном случае ($j_X = I$, $j_Y = I$, $\mathcal{J}_\mathcal{E} = I$) характеристическая функция $z(\lambda)$ Σ-узла V позитивна всюду в Π_+ и негативна всюду в Π_- :*

$$z(\lambda) + z^*(\lambda) \begin{cases} \geq 0, & \operatorname{Re}\lambda > 0, \\ = 0, & \operatorname{Re}\lambda = 0, \\ \leq 0, & \operatorname{Re}\lambda < 0. \end{cases}$$

В [1] рассмотрены преобразования над пучками и над Σ-узлами, которые не меняют характеристическую функцию $z(\lambda)$ и соответствующие свойства импедансной системы.

Определение 2.4. *Пучки $\lambda A + B$, $\lambda A_1 + B_1 : X \longmapsto Y$ называются унитарно эквивалентными, если существуют ограниченно обратимый оператор $Q : Y \longmapsto Y$ и унитарный оператор $U : X \longmapsto X$ такие, что при любом λ имеет место равенство*

$$\lambda A_1 + B_1 = Q(\lambda A + B)U^*. \tag{2.4}$$

Определение 2.5. *Операторные Σ-узлы $V, V_1 : \mathcal{F}_X \longmapsto \mathcal{F}_Y$ называются унитарно эквивалентными, если их (системные) блоки связаны соотношениями*

$$\begin{aligned} A_1 = QAU^*, \quad B_1 = QBU^*, \quad L_1 = QL, \\ M_1 = MU^*, \quad N_1 = NU^*, \quad K_1 = K, \end{aligned} \tag{2.5}$$

где $Q : Y \longmapsto Y$ – ограниченно обратимый оператор, а $U : X \longmapsto X$ – унитарный оператор.

Определение 2.6. *Операторные Σ-узлы $V : \mathcal{F}_X \longmapsto \mathcal{F}_Y$ и $V_1 : \mathcal{F}_{X_1} \longmapsto \mathcal{F}_{Y_1}$ с одинаковыми внешними подпространствами $\mathcal{E}$ называются эквивалентными, если их характеристические функции совпадают :*

$$w(V, \lambda) = w(V_1, \lambda), \quad \lambda \in \rho(A, B) = \rho(A_1, B_1).$$

Определение 2.7. *Операторный Σ-узел V называется нормированным в точке ν, если $\nu M + N = 0$.*

Определение 2.8. *Представление оператор-функции $z(\lambda)$ в виде характеристической функции операторного узла V*

$$z(\lambda) = K - (\lambda M + N)(\lambda A + B)^{-1}L, \qquad Re\ \lambda > 0 \tag{2.6}$$

называется реализацией функции $z(\lambda)$ в правой полуплоскости, а представление функции $\theta(\zeta)$ в виде

$$\theta(\zeta) = S + \zeta G(I - \zeta T)^{-1}F, \quad |\zeta| < 1 \tag{2.7}$$

называется реализацией в единичном круге.

Пусть $\nu \in \Pi_+ \cap \rho(A, B)$ – фиксированная точка. Применяя преобразование $\zeta = \dfrac{\lambda - \nu}{\lambda + \overline{\nu}}$, в [1] доказано, что существует преобразование χ Σ-узла V в блочный оператор $\mathcal{V} : X \oplus \mathcal{E} \longmapsto X \oplus \mathcal{E}$, блоки которого являются коэффициентами реализации функции

$$\theta(\zeta) = z\left(\frac{\nu + \overline{\nu}\zeta}{1 - \zeta}\right)$$

в единичном круге. Это преобразование задаётся формулой

$$\mathcal{V} = \chi(V) = \begin{bmatrix} T & F \\ G & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\nu A + B)^{-1}(\overline{\nu} A - B) & \sigma(\nu A + B)^{-1}L \\ -\sigma L^*(\nu A^* - B^*)^{-1} & z(\nu) \end{bmatrix}, \tag{2.8}$$

где $\sigma = \sqrt{\nu + \overline{\nu}}$.

Теорема 2.2 [1]. *Блоки оператора* $\mathcal{V} = \chi(V)$ Σ*-узла* V *связаны соотношениями*

$$TT^* = I, \quad T^*T = I; \quad TG^* = F, \quad T^*F = G^*; \quad GG^* = F^*F = S + S^*. \tag{2.9}$$

Обратно, пусть коэффициенты реализации в единичном круге некоторой функции $\theta(\zeta)$ образуют блочный оператор

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} T & F \\ G & S \end{bmatrix} : X \oplus \mathcal{E} \longmapsto X \oplus \mathcal{E} \tag{2.10}$$

и удовлетворяют соотношениям (2.9). Тогда для $\nu \in \Pi_+$ нормированный в точке ν операторный Σ-узел $V = \pi(\mathcal{V}) : \mathcal{F}_X \longmapsto \mathcal{F}_X$

$$V = \begin{bmatrix} A & B & L \\ C & D & R \\ M & N & K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{I-T}{\nu+\overline{\nu}} & \dfrac{\overline{\nu}I+\nu T}{\nu+\overline{\nu}} & \dfrac{1}{\sigma}F \\ \dfrac{I+T}{2} & \dfrac{\overline{\nu}I-\nu T}{2} & -\dfrac{\Sigma}{2}F \\ -\dfrac{1}{\Sigma}G & \dfrac{\nu}{\sigma}G & S \end{bmatrix}, \tag{2.11}$$

где $\nu A + B = I$ задаёт реализацию в правой полуплоскости для функции $z(\lambda) = \theta\left(\dfrac{\lambda-\nu}{\lambda+\overline{\nu}}\right)$.

Определение 2.9. *Операторный* Σ*-узел* V *называется* **простым**, *если линейная оболочка* $X_0 = \bigvee\limits_{n=-\infty}^{\infty} (T^n F\mathcal{E})$, *где* $T = -(\nu A + B)^{-1}(\overline{\nu}A - B)$ *и* $F = \sigma(\nu A + B)^{-1}L$, *совпадает с основным внутренним пространством* Σ*-узла* : $X_0 = X$.

Лемма 2.1 [1]. *Операторы всякого косоэрмитового пучка* $\lambda A + B : X \longmapsto Y$ *допускают включение в некоторый простой нормированный* Σ*-узел.*

Теорема 2.3 [1]. *Пусть характеристические функции*

$$\begin{aligned} z(\lambda) &= w(V,\lambda) = K - (\lambda M + N)(\lambda A + B)^{-1}L, \\ z_1(\lambda) &= w(V_1,\lambda) = K_1 - (\lambda M_1 + N_1)(\lambda A_1 + B_1)^{-1}L_1 \end{aligned}$$

косоэрмитовых пучков $\lambda A + B$ *и* $\lambda A_1 + B_1 : \mathcal{F}_X \longmapsto \mathcal{F}_Y$ *построены по простым* Σ*-узлам* V *и* V_1. *Если* $z(\lambda) = z_1(\lambda)$ ($Re\ \lambda > 0$), *то пучки унитарно эквивалентны. Более того, если* Σ*-узлы* V *и* V_1 *нормированы, то эти узлы также унитарно эквивалентны.*

Введённое отношение эквивалентности операторных Σ-узлов разбивает множество всех Σ-узлов на классы эквивалентности. В работе [1] представлены преобразования групп эквивалентности, не выводящие операторные Σ-узлы из своих классов эквивалентности.

Преобразование $(\pi \circ \chi)$, определяемое формулой

$$(\pi \circ \chi)V = (\pi \circ \chi) \begin{bmatrix} A & B & L \\ C & D & R \\ M & N & K \end{bmatrix} = \tag{2.12}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{A}{\nu A+B} & \frac{B}{\nu A+B} & \frac{L}{\nu A+B} \\ \frac{\frac{\nu-\bar\nu}{2}A+B}{\nu A+B} & \frac{\nu\bar\nu A-\frac{\nu-\bar\nu}{2}B}{\nu A+B} & \frac{-\frac{\nu+\bar\nu}{2}L}{\nu A+B} \\ \frac{-L^\bullet}{\nu A^\bullet-B^\bullet} & \frac{\nu L^\bullet}{\nu A^\bullet-B^\bullet} & \frac{K-(\nu M+N)L}{\nu A+B} \end{bmatrix},$$

преобразует операторный Σ-узел в эквивалентный Σ-узел $(\pi \circ \chi)V$, нормированный в точке $\nu \in \Pi_+$.

Преобразование эквивалентности $[\varphi]$, где $\varphi : Y \longmapsto \mathcal{E}$, определяется формулой

$$[\varphi]V = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ \varphi & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B & L \\ C & D & R \\ M & N & K \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi^+ \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.13}$$

Для любого ограниченного обратимого оператора $Q : Y \longmapsto Y$ и унитарного оператора $U : X \longmapsto X$ преобразование $\{Q, U\}$, определяемое формулой

$$\{Q, U\}V = (Q \oplus Q^{\bullet^{-1}} \oplus I_{\mathcal{E}})V(U \oplus U \oplus I_{\mathcal{E}}), \tag{2.14}$$

является преобразованием унитарной эквивалентности.

В работе [10] приводятся аналитические представления (2.6) в форме реализации на плоскости для гибридных операторов (матриц) линейных структур на графах. В работе [7] изучаются дробно–линейные представления таких матриц–функций и вопросы их реализаций. Аддитивные реализации рациональных вещественных симметрических матриц–функций исследуются в [8], [9] и [12].

§3. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И РАЗЛОЖЕНИЯ

Представление системы в виде каскадного [4], [5] или гибридного (параллельно–последовательного) [8], [9] соединения более простых систем, отвечает множителям или слагаемым соответствующего мультипликативного или аддитивного разложения проходной или импедансной системы.

Пусть $\Phi_n = \{(f_n, x_n, y_n)\}$, $n = 1, ..., N$ – импедансные системы с одинаковыми внешними подпространствами $\mathcal{E}_\setminus = \mathcal{E}$, и пусть $V_n : X_n \oplus X_n \oplus \mathcal{E} \longmapsto Y_n \oplus Y_n \oplus \mathcal{E}$ – операторные Σ-узлы такие, что

$$(\lambda A_n + B_n)x_n = L_n f_n, \quad g_n = K_n f_n - (\lambda M_n + N_n)x_n. \tag{3.1}$$

Определение 3.1. *Сумма (или аддитивное соединение)* $\Phi = \sum_{n=1}^{N} \Phi_n$ *определяется следующим образом :*

$$\Phi = \left\{ \left(f = f_n/\forall n, \quad x = \sum_{n=1}^{N} \oplus x_n, \quad g = \sum_{n=1}^{N} g_n \right) \right\}. \tag{3.2}$$

При равенстве входов f_n всех систем Φ_n, входом f суммарной системы Φ считается тот же вектор $f = f_n$, а выход g определяется как обычная сумма соответствующих выходов g_n в пространстве $\mathcal{E}$. Внутренним состоянием x для Φ считается ортогональная сумма внутренних состояний x_n слагаемых Φ_n. Пространство X внутренних состояний системы Φ и пространство Y определяются формулами

$$X = \sum_{n=1}^{N} \oplus X_n, \quad Y = \sum_{n=1}^{N} \oplus Y_n. \tag{3.3}$$

Индефинитные метрики в пространствах X и Y определяются прямыми суммами метрик в X_n и Y_n, соответственно :

$$[x,x] = (j_X x, x), \quad J_X = \sum_{n=1}^{N} \oplus J_{X_n}, \quad [y,y] = (j_Y y, y), \quad J_Y = \sum_{n=1}^{N} \oplus J_{Y_n}. \tag{3.4}$$

Рассмотрим ортопроекторы $P_n : X \longmapsto X_n$ и $Q_n : Y \longmapsto Y_n$. Суммируя уравнения (3.1) и используя определение внутренних состояний суммарной системы $\Phi = \{(f, x, y)\}$, получим

$$(\lambda A + B)x = Lf, \quad g = Kf - (\lambda M + N)x, \tag{3.5}$$

где операторные коэффициенты выражаются через Σ-узлы V_n следующим образом :

$$A = \sum_{n=1}^{N} \oplus A_n, \quad B = \sum_{n=1}^{N} \oplus B_n, \quad L = \sum_{n=1}^{N} P_n L_n = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_N \end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

$$M = \sum_{n=1}^{N} M_n P_n = [M_1 \cdots M_N], \quad N = \sum_{n=1}^{N} N_n P_n = [N_1 \cdots N_N], \quad K = \sum_{n=1}^{N} K_n. \tag{3.7}$$

По аналогии с (3.6) определим через блоки средних узлов V_n операторы $C, D \in [X, Y]$ и $R \in [\mathcal{E}, Y]$:

$$C = \sum_{n=1}^{N} \oplus C_n, \quad D = \sum_{n=1}^{N} \oplus D_n, \quad R = \sum_{n=1}^{N} Q_n R_n = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_N \end{bmatrix}. \tag{3.8}$$

Определение 3.2. *Построенный по правилам (3.6) – (3.8) оператор*

$$V = \begin{bmatrix} A & B & L \\ C & D & R \\ M & N & K \end{bmatrix}$$

называется полупрямой суммой Σ-узлов V_n и обозначается символом

$$V = \sum_{n=1}^{N} \hat{+} V_n. \tag{3.9}$$

Операторные узлы V_n называются проекциями оператора V на приводящие пары подпространств (X_n, Y_n).

Так как операторы V_n являются Σ-узлами, то проверив выполнение соотношений (2.3), убеждаемся, что оператор V является Σ-узлом. Заметим, что пары подпространств (X_n, Y_n), вместе с основным пучком $\lambda A + B$, редуцируют вспомогательный пучок $\lambda C + D$ следующим образом :

$$Q_n(\lambda A + B) = (\lambda A + B)P_n, \quad Q_n(\lambda C + D) = (\lambda C + D)P_n. \tag{3.10}$$

Таким образом, имеем следующий результат.

Теорема 3.1. *Пусть операторные Σ-узлы V_n соответствуют системе Φ_n. Тогда операторный Σ-узел $V = \sum\limits_{n=1}^{N} \widehat{+} V_n$ соответствует суммарной системе $\Phi = \sum\limits_{n=1}^{N} \Phi_n$.*

Теорема 3.2. *Пусть пары подпространств (X_n, Y_n), $n = 1, ..., N$ приводят как основной пучок $\lambda A + B : X \longmapsto Y$ некоторого Σ-узла $V = \sum\limits_{n=1}^{N} \widehat{+} V_n$, так и индефинитные метрики j_X и j_Y пространств X и Y так, что выполняются соотношения (3.3) и (3.4). Тогда система Φ, связанная с узлом V, разлагается в сумму систем Φ_n с внутренними пространствами X_n, Y_n, а передаточная функция $z(\lambda)$ системы Φ разлагается в сумму передаточных функций $z_n(\lambda)$ систем Φ_n :*

$$z(\lambda) = \sum_{n=1}^{N} z_n(\lambda), \quad \lambda \in \rho(A, B). \tag{3.11}$$

Доказательство. Пусть заданы Σ-узел V с внутренними пространствами X, Y и связанная с ним система $\Phi = \{(f, x, g)\}$. Пусть пары подпространств (X_n, Y_n) из разложений (3.3) приводят основной пучок $\lambda A + B$. Тогда выполнено первое соотношение из (3.10), а второе может и не выполняться. Следовательно, представление Σ-узла V в виде суммы (3.9) некоторых узлов–проекций V_n, вообще говоря, невозможно. Однако, мы можем заменить блок-строку $[C, D, R]$ на другую $[\widetilde{C}, \widetilde{D}, \widetilde{R}]$ так, чтобы выполнялось и второе соотношение в (3.10), а оператор

$$\widetilde{V} = \begin{bmatrix} A & B & L \\ \widetilde{C} & \widetilde{D} & \widetilde{R} \\ M & N & K \end{bmatrix} : X \oplus X \oplus \mathcal{E} \longmapsto Y \oplus Y \oplus \mathcal{E} \tag{3.12}$$

был бы Σ-узлом. При этом, не меняется ни характеристическая функция, ни связанная с ним импедансная система. В качестве блок-строки можно взять

$$[\widetilde{C}\ \widetilde{D}\ \widetilde{R}] = [q^* q\widetilde{B} \quad q^* q\widetilde{A} \quad q^* q(-\widetilde{A}M^+ - \widetilde{B}N^+)], \tag{3.13}$$

где $q = (\nu A + B)^{-1}$, $\widetilde{B} = \frac{\nu - \overline{\nu}}{2} A + B$, $\widetilde{A} = \nu\overline{\nu} A - \frac{\nu - \overline{\nu}}{2} B$, а ν – регулярная точка пучка $\lambda A + B$. Нетрудно проверить, что блоки оператора $\widetilde{V}$ удовлетворяют условию (2.3). Теперь искомые проекции V_n Σ-узла оператора $\widetilde{V}$ на приводящие пары подпространств (X_n, Y_n) находятся согласно Определению 3.2 :

$$A_n = Q_n A P_n, \quad B_n = Q_n B P_n, \quad L_n = Q_n L, \quad C_n = Q_n \widetilde{C} P_n,$$
$$D_n = Q_n \widetilde{D} P_n, \quad R_n = Q_n \widetilde{R}, \quad M_n = M P_n, \quad N_n = N P_n.$$

Отметим, что последний угловой блок $K_n : \mathcal{E} \longmapsto \mathcal{E}$ проекции V_n определяется неоднозначно, так как соотношениями

$$K_n + K_n^+ = -M_n N_n^+ - N_n M_n^+ = -R_n^+ L_n - L_n^+ R_n$$

однозначно определяется лишь вещественная часть $\operatorname{Re} K_n = \frac{1}{2}(K + K^+)$, а мнимая часть оператора K_n может иметь любое значение $\operatorname{Im} K_n = \frac{1}{2i}(K - K^+)$, удовлетворяющее условию суммирования $\operatorname{Im} K = \sum_{n=1}^{N} \operatorname{Im} K_n$. Это обеспечивает выполнение последнего условия в (3.7) для искомых операторов $K_n = \operatorname{Re} K_n + i \operatorname{Im} K_n$.

Наконец, легко проверить, что блоки операторов V_n удовлетворяют условиям (2.3), и поэтому Σ-узел оператора $\widetilde{V}$ разлагается в сумму Σ-узлов оператора V_n. Системы–проекции $\Phi_n = \{(f_n, x_n, y_n)\}$, $n = 1, ..., N$ определяются однозначно по проекциям узлов V_n уравнениями (3.1), где $f_n = f$. По построению, характеристическая функция $z(\lambda)$ Σ-узла V равна сумме характеристических функций Σ-узлов V_n всюду в области регулярности пучка $\lambda A + B$. Теорема 3.2 доказана.

Замечание. Легко видеть, что Σ-узел $\widetilde{V}$, определённый по (3.12), со средней строкой (3.13) получается применением к исходному Σ-узлу V преобразований χ, π, $\{Q, I\}$ и $[\varphi]$, определённых по (2.8), (2.11), (2.14) и (2.13), соответственно, причём $Q = \nu A + B$, $\varphi = (\nu M + N)(\nu A + B)^{-1}$, $\widetilde{V} = [I] \circ \{Q, I\} \circ (\pi \circ \chi) V$. Так как каждое из этих трёх преобразований в скобках не выводит Σ-узел из класса эквивалентности, то оператор $\widetilde{V}$ является Σ-узлом.

Далее в работе рассматриваются лишь дефинитные Σ-узлы ($j = I$, $\mathcal{J} = I$). Узел V называется **одномерным** (конечномерным), если $dim\ X = 1$ ($dim\ X = n < \infty$). Отметим, что всегда $dim\ y = dim\ X$, так как мы рассматриваем лишь регулярные пучки $\lambda A + B$ (т.е. пучки, у которых есть регулярные точки).

Характеристическая функция $z(\lambda)$ конечномерного Σ-узла V является рациональной матрицей-функцией, позитивной в правой полуплоскости : $z(\lambda) + z^*(\lambda) \geq 0$, $Re\ \lambda > 0$ (Теорема 2.1). В силу Теоремы 3.2, разложение функции $z(\lambda)$ в сумму простейших позитивных дробей связано с разложением Σ-узла в сумму одномерных узлов V_n.

Пусть $\nu \in \Pi_+$ – некоторая регулярная точка косоэрмитового пучка $\lambda A + B$. Покажем, что x_0 является собственным вектором косоэрмитового пучка $\lambda A + B$ тогда и только тогда, когда x_0 является собственным вектором оператора $T = -(\nu A + B)^{-1}(\overline{\nu} A - B)$. Действительно, пусть λ_0 – собственное значение, а x_0 – соответствующий собственный вектор, т.е. $\lambda_0 A + B x_0 = 0$. Очевидно, что имеем $(\nu A + B)x_0 = (\nu - \lambda_0)Ax_0$ и выполняются равенства

$$Ax_0 = \frac{1}{\nu - \lambda_0}(\nu A + B)x_0, \quad Bx_0 = \frac{-\lambda_0}{\nu - \lambda_0}(\nu A + B)x_0.$$

Отсюда вытекает, что x_0 – собственный вектор оператора T, отвечающий собственному значению $\xi_0 = \dfrac{\lambda_0 + \overline{\nu}}{\lambda_0 - \nu}$. Кроме того, так как $|\xi_0| = 1$, то λ_0 является мнимым числом, $\lambda_0 = i\tau_0$.

Обратно, если ξ_0 – собственное значение, и x_0 – соответствующий собственный вектор оператора T, то имеет место равенство $-(\overline{\nu}A - B)x_0 = (\nu A + B)\xi_0 x_0$. Отсюда следует, что

$$\left(\frac{\xi_0\nu + \overline{\nu}}{\xi_0 - 1}A + B\right)x_0 = 0.$$

Следовательно, число $\lambda_0 = \dfrac{\xi_0\nu + \overline{\nu}}{\xi_0 - 1}$ является собственным значением, а x_0 – соответствующим собственным вектором пучка $\lambda A + B$.

Заметим, что косоэрмитовый пучок $\lambda A + B$ не имеет присоединённых векторов, а собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны. Говоря о полноте, мы учитываем и собственные векторы x_∞, отвечающие бесконечно удалённой точке $\lambda = \infty$, аннулируемые оператором

$$A : \left(A + \frac{1}{\lambda}B\right)x_\infty = 0 \sim Ax_\infty = 0.$$

Теорема 3.3. *Для того, чтобы косоэрмитовый пучок $\lambda A + B : X \longmapsto X$ обладал бы полной системой собственных векторов, необходимо и достаточно, чтобы его характеристическая функция $z(\lambda)$, построенная по простому Σ-узлу, допускала разложение в сумму простейших позитивных дробей $z_n(\lambda)$:*

$$z(\lambda) = \sum_{n=1}^{N} z_n(\lambda) = \sum_{n=1}^{N}\left[i\mathcal{B}_n + \frac{1}{\lambda - i\tau_n}\left(\nu\overline{\nu} + \frac{\nu - \overline{\nu}}{2}i\tau_n + \frac{\nu - \overline{\nu}}{2}\lambda - i\tau_n\lambda\right)\mathcal{A}_n\right], \tag{3.14}$$

$Re\,\lambda > 0$, где $N = dim\ X < \infty$, ν – регулярная точка пучка $\lambda A + B$, $Re\,\nu > 0$, $\mathcal{B}_n = \mathcal{B}_n^*$, $\mathcal{A}_n \geq 0$, $rang\ \mathcal{A}_n = 1$, а сходимость понимается по норме в пространстве $[\mathcal{E}, \mathcal{E}]$.

Равносильным условием является разложимость Σ-узла $\widetilde{V} = (\pi \circ \chi)V$ в сумму $\widetilde{V} = \sum\limits_{n=1}^{N} \widehat{+} V_n$ одномерных Σ-узлов V_n.

Доказательство. Необходимость. Согласно Лемме 2.1, операторы косоэрмитового пучка $\lambda A + B : X \longmapsto X$ допускают включение в простой Σ-узел V. Σ-узел $\widetilde{V} = (\pi \circ \chi)V$, пронормированный относительно точки ν, имеет вид (2.12). Его основные операторы $\widetilde{A} = (\nu A + B)^{-1}A$ и $\widetilde{B} = (\nu A + B)^{-1}B$ порождают пучок $\lambda\widetilde{A} + \widetilde{B}$, отличающийся от исходного пучка $\lambda A + B$ обратимым левым множителем. Поэтому оба пучка имеют общую систему собственных векторов. Допустим, что эта система полна в X. Тогда можно выбрать полную ортонормированную систему собственных векторов $\{h_n\}_{n=1}^{N}$, отвечающих собственным значениям λ_n пучка $\lambda A + B$.

Введём одномерные линейные оболочки $X_n = span\{h_n\}$ и ортопроекторы $P_n : X \longmapsto X_n$. По построению, включая $\lambda_n = \infty$, имеем

$$\widetilde{A}h_n = (\nu A + B)^{-1}Ah_n = \frac{1}{\nu - \lambda_n}h_n, \quad \widetilde{B}h_n = (\nu A + B)^{-1}Bh_n = \frac{-\lambda_n}{\nu - \lambda_n}h_n,$$

$$\widetilde{C}h_n = (\nu A + B)^{-1}\left(\frac{\nu-\overline{\nu}}{2}A + B\right)h_n = \left(\frac{\nu-\overline{\nu}}{2} - \lambda_n\right)\frac{1}{\nu-\lambda_n}h_n,$$

$$\widetilde{D}h_n = (\nu A + B)^{-1}\left(\nu\overline{\nu}A - \frac{\nu-\overline{\nu}}{2}B\right)h_n = \left(\nu\overline{\nu} + \frac{\nu-\overline{\nu}}{2}\lambda_n\right)\frac{1}{\nu-\lambda_n}h_n.$$

Следовательно, все ортопроекторы P_n перестановочны с операторами $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$, $\widetilde{C}$, $\widetilde{D}$, и подпространства X_n приводят пучки $\lambda\widetilde{A}+\widetilde{B}$ и $\lambda\widetilde{C}+\widetilde{D}$. С учётом полноты, ортогональное разложение $X = \sum\limits_{n=1}^{N}\oplus X_n$ обладает всеми свойствами разложения (3.3). По Теореме 3.2, проекции на пространства X_n оказываются одномерными Σ-узлами V_n такими, что

$$\widetilde{V} = \sum_{n=1}^{N}\widehat{+}V_n, \quad z(\lambda) = w(V,\lambda) = \sum_{n=1}^{N} w(V_n,\lambda). \tag{3.15}$$

Пучок $\lambda A_n + B_n$ имеет единственную точку спектра – собственное значение λ_n, а операторы A_n, B_n являются скалярными в X_n :

$$\begin{aligned} &A_n = \frac{1}{\nu-\lambda_n}, \quad B_n = \frac{-\lambda_n}{\nu-\lambda_n}, \\ &C_n = \left(\frac{\nu-\overline{\nu}}{2} - \lambda_n\right)\frac{1}{\nu-\lambda_n}, \quad D_n = \left(\nu\overline{\nu} + \frac{\nu-\overline{\nu}}{2}\lambda_n\right)\frac{1}{\nu-\lambda_n}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Блоки L_n и R_n являются вектор-строками, а M_n и N_n – вектор-столбцами. Из условия косоэрмитовости пучка $\lambda A_n + B_n$ следует, что собственное значение λ_n является мнимым числом : $\overline{\lambda}_n = -\lambda_n$. В силу нормированности Σ-узла V_n в точке ν и соотношений 4) и 5) из системы (2.3) выполняются соотношения $M_n = -\xi_n L_n^*$, где $\xi_n = \dfrac{\lambda_n+\overline{\nu}}{\lambda_n-\nu}$, $|\xi_n| = 1$ и $R_n = -\dfrac{\nu+\overline{\nu}}{2}L_n$. Из равенства 12) из (2.3) получаем равенство $L_n^*L_n = \frac{1}{\nu+\overline{\nu}}(K_n + K_n^*)$. Из простоты узла V (эквивалентно, из простоты узла $\widetilde{V}$) следует, что $L_n \neq 0$ при любом n. Действительно, предположим, что $L_n = 0$, т.е. $P_n\widetilde{L}_n = 0$. Оператор

$$T = -(\nu A + B)^{-1}(\overline{\nu}A - B) = -(\nu\widetilde{A} + \widetilde{B})^{-1}(\overline{\nu}\widetilde{A} - \widetilde{B})$$

приводится подпространством X_n. Поэтому при всяком k имеем равенства

$$P_nT^kF = T^kP_n(\nu A + B)^{-1}L\sigma = T^kP_n\widetilde{L} = 0.$$

Но тогда $P_nX_0 = 0$, где $X_0 = \bigvee\limits_{k,l}(T^kFe)$, $e \in \mathcal{E}$, что противоречит соотношению $P_nX_0 = X_n$, вытекающему из определения простоты Σ-узла V $(X_0 = X)$. Таким образом, одномерные Σ-узлы V_n из разложения (3.15) имеют вид

$$V_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{\nu-\lambda_n} & \frac{-\lambda_n}{\nu-\lambda_n} & L_n \\ \left(\frac{\nu-\overline{\nu}}{2} - \lambda_n\right)\frac{1}{\nu-\lambda_n} & \left(\nu\overline{\nu} + \frac{\nu-\overline{\nu}}{2}\lambda_n\right)\frac{1}{\nu-\lambda_n} & -\frac{\nu+\overline{\nu}}{2}L_n \\ -\xi_nL_n^* & \nu\xi_nL_n^* & K_n \end{bmatrix}, \tag{3.17}$$

$$\xi_n = \frac{\lambda_n + \overline{\nu}}{\lambda_n - \nu}, \quad L_n^* L_n = \frac{1}{\nu + \overline{\nu}}(K_n + K_n^*) \neq 0, \quad \lambda_n = i\tau_n = -\overline{\lambda}_n \neq \infty,$$

а соответствующие характеристические функции $z_n(\lambda) = w(V_n, \lambda)$ имеют вид слагаемых в сумме (3.14), где обозначено

$$\mathcal{B}_n = \text{ Im } K_n, \quad \mathcal{A}_n = L_n^* L_n, \quad rang\ \mathcal{A}_n = 1. \tag{3.18}$$

Вид одномерного Σ-узла (3.17) и вид его характеристической функции из (3.14) являются универсальными для всех собственных значений $\lambda_n = i\tau_n$ пучка $\lambda A + B$, включая $\lambda_n = \infty$.

Достаточность. Пусть функция $z(\lambda)$, представимая суммой (3.14), является характеристической функцией косоэрмитового пучка $\lambda A + B$, построенного по простому Σ-узлу V. По каждой дроби $z_n(\lambda)$ построим реализующий её одномерный Σ-узел из (3.17) $V_n : X_n \oplus X_n \oplus \mathcal{E} \longmapsto X_n \oplus X_n \oplus \mathcal{E}$, где каждое X_n является копией одномерного комплексного пространства $\mathbf{C}^1$. С учётом (3.18), вектор-строка $L_n = (\beta_n^1, \beta_n^2, ...)$ и матрица K_n размерности $dim\ \mathcal{E}$ имеют вид

$$\overline{\beta}_n^m, \beta_n^j = (\mathcal{A})_{mj}, \quad K_n = z_n(\nu) = i\mathcal{B}_n + \mathcal{A}_n. \tag{3.19}$$

Ясно, что строка L_n определяется не единственным образом. Гильбертово пространство $X = \sum\limits_{n=1}^{N} \oplus X_n$ при $N = \infty$ является комплексным пространством l_2. Построим узел $\widetilde{V}_n : \widetilde{X}_n \oplus \widetilde{X}_n \oplus \mathcal{E} \longmapsto \widetilde{X}_n \oplus \widetilde{X}_n \oplus \mathcal{E}$ как сумму узлов V_n вида (3.15). Ограниченность диагональных матричных операторов $\widetilde{A}, \widetilde{B} : \widetilde{X}_n \longmapsto \widetilde{X}_n$

$$\widetilde{A} = \sum_{n=1}^{N} \oplus \frac{1}{\nu - \lambda_n}, \quad \widetilde{B} = \sum_{n=1}^{N} \oplus \frac{-\lambda_n}{\nu - \lambda_n}, \quad \lambda_n = i\tau_n \tag{3.20}$$

следует из ограниченности последовательностей диагональных элементов. Блок $\widetilde{K}$ определяется как сумма ряда $\widetilde{K} = \sum\limits_{n=1}^{N} K_n = z(\nu)$, сходящегося по условию (3.14) в равномерной операторной топологии. Оператор $\widetilde{L} = \sum\limits_{n=1}^{N} \oplus L_n$ ограничен, так как для вектора $e = (e_1, e_2, ...) \in \mathcal{E} \subset l_2$ справедливы равенства

$$\left\|\widetilde{L}e\right\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{m=1}^{N} \overline{\beta}_n^m \overline{e}_m\right) \left(\sum_{j=1}^{N} \beta_n^j e_j\right) = \sum_{m=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} e_m e_j \mathcal{A}_{mj} = (\mathcal{A}e, e) \leq ||\mathcal{A}|| \cdot ||e||^2.$$

Здесь учтено, что $\mathcal{A} = \sum\limits_{n=1}^{N} \mathcal{A}_n = \text{ Re } K \in [\mathcal{E}]$ и ряды $\mathcal{A}_{mj} = \sum\limits_{n=1}^{N} (\mathcal{A}_n)_{mj}$ сходятся.

Аналогично проверяется ограниченность оператора $\widetilde{M}^* = -\frac{1}{\nu}\widetilde{N}^* = -\sum\limits_{n=1}^{N} \oplus \xi_n L_n$.

По построению пучок $\lambda\widetilde{A} + \widetilde{B}$ имеет полную в X систему $\left\{h_n\right\}_{n=1}^{N}$ собственных

векторов, равных ортам подпространств X_n. Однако, не известно является ли Σ-узел V_n простым.
Выполнив преобразование χ (2.8) над Σ-узлом V_n получаем

$$\chi(\widetilde{V}) = \mathcal{V} = \begin{bmatrix} T & F \\ G & S \end{bmatrix} : \widetilde{X} \oplus \mathcal{E} \longmapsto \widetilde{X} \oplus \mathcal{E},$$

где

$$T = -(\nu\widetilde{A} + \widetilde{B})^{-1}(\overline{\nu}\widetilde{A} - \widetilde{B}), \quad F = \frac{\sqrt{\nu + \overline{\nu}}}{2}(\nu\widetilde{A} + \widetilde{B})^{-1}\widetilde{L}.$$

Унитарный оператор T имеет ту же систему собственных векторов $\{h_n\}_{n=1}^{N}$, полных в X и приводит подпространство $X_0 = \bigvee\limits_{n=-\infty}^{\infty} (T^n F\mathcal{E})$. Поэтому, в соответствии с ортогональным разложением, имеем $T = T_0 + T_1$. Индуцированный оператор T_0 обладает полной в X_0 системой собственных векторов. Кроме того, операторы F и G имеют блочную структуру :

$$F = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix} : \mathcal{E} \longmapsto X_0 \oplus X, \quad G = [\,G_0 \quad 0\,] : X_0 \oplus X_1 \longmapsto \mathcal{E}.$$

Поэтому блоки оператора

$$\mathcal{V}_0 = \begin{bmatrix} T_0 & F_0 \\ G_0 & S \end{bmatrix} : X_0 \oplus \mathcal{E} \longmapsto X_0 \oplus \mathcal{E}$$

удовлетворяют (вместе с блоками оператора $\mathcal{V}$) соотношениям (2.9). Используя преобразование π (2.11), заключаем, что блочный оператор $V_0 = \pi(\mathcal{V}_0) : X_0 \oplus X_0 \oplus \mathcal{E} \longmapsto X_0 \oplus X_0 \oplus \mathcal{E}$ является простым Σ-узлом.
Ясно, что характеристические функции Σ-узлов $\widetilde{V}$ и V совпадают : $w(\widetilde{V}, \lambda) = w(V, \lambda)$. Так как собственные векторы оператора T_0 и пучка $\lambda A_0 + B_0 : X_0 \longmapsto X_0$ совпадают, то пучок имеет полную систему собственных векторов в пространстве X_0.
Возвращаясь к исходному Σ-узлу V и пучку $\lambda A + B : X \longmapsto X$ заметим, что так как $w(\widetilde{V}, \lambda) = w(V, \lambda) = z(\lambda)$, то по Теореме 2.3 из равенства $w(V, \lambda) = w(V_0, \lambda)$ для простых Σ-узлов V и V_0 вытекает унитарная эквивалентность пучков $\lambda A + B$ и $\lambda A_0 + B_0$. Следовательно, пучок $\lambda A + B$ также обладает системой собственных векторов, полной в X. Теорема 3.3 доказана.

Abstract. A correspondence between the reduction subspaces of the skew-Hermitian linear operator pencil and the additive decomposition of the characteristic function of this pencil is established.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Даллакян, А. Г. Руткас, “Косоэрмитовые линейные пучки операторов : Операторные узлы и характеристические функции”, Изв. НАН Армении. Математика, том 35, № 2, стр. 1 – 17, 2000.
2. А. Г. Руткас, “Характеристическая функция и модель линейного пучка операторов”, Теория функций, Функ. Анализ и их приложения, Харьков, том. 45, стр. 98 – 111, 1986.
3. А. Г. Руткас, “К теории характеристических функций линейных операторов”, ДАН СССР, том 229, № 3, стр. 546 – 549, 1976.
4. А. В. Ефимов, В. П. Потапов, “J-растягивающие матрицы-функции и их роль в аналитической теории электрических цепей”, Успехи Мат. Наук, том 28, № 1(169), стр. 66 – 130, 1973.
5. Т. А. Товмасян, “Об элементарных и примарных множителях J-несжимающих вещественных матриц-функций”, Уч. Зап. ЕГУ, № 1, стр. 11 – 25, 1971.
6. Д. З. Аров, “Гамма-производящие матрицы, j-внутренние матрицы-функции и связанные с ними задачи экстраполяции”, Мат. физика, Анализ, Геометрия, Харьков, том 2, № 1, стр. 3 – 14, 1995.
7. В. Л. Даллакян, “Обобщение теоремы Дарлингтона для вещественных позитивных J-симметрических матриц-функций”, Изв. НАН Армении. Математика, том 29, № 2, стр. 22 – 31, 1994.
8. Т. А. Товмасян, “Об аддитивной реализации некоторых классов рациональных матриц-функций”, Учёные Записки ЕГУ, том 2, стр. 13 – 21, 1995.
9. V. L. Dallakian, “The synthesis for structural systems of signal processing”, Proc. of Conf. Computer Science and Information Techn., Yerevan, pp. 283 – 286, 1999.
10. В. Л. Даллакян, “Внешний гибридный оператор линейной структуры на графе”, Мат. Вопросы кибернетики и вычислительной техники, Изд. ВЦ АН Арм.ССР и ЕГУ, том 14, стр. 87 – 101, 1985.
11. А. Г. Руткас, “Свойства функций рассеяния и прохождения волн в структурах с заданной геометрией”, ДАН СССР, том 230, № 1, стр. 38 – 40, 1976.
12. V. L. Dallakian, “On additive decomposition of the signal transmission impedance systems and their positive transfer functions”, Proc. of Conf. Computer Science and Information Techn., Yerevan, pp. 307 – 310, 2001.

Поступила 10 марта 2001