Известия НАН Армении. Математика, **37**, № 2, 2002, 3-18

ОБ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДАХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ В $L^p_{[0,1]}$, $p > 0$

М. Г. Григорян

Ереванский государственный университет
e-mail : gmarting@ysu.am

Резюме. В статье доказывается, что для любой полной ортонормальной системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ существует ряд вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)$, $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^r < \infty$ для любого $r > 2$, который обладает следующими свойствами : I) он универсален во всех $L^q_{[0,1]}$ при $0 < q \leq 1$ одновременно относительно перестановок и частичных рядов в смысле сходимости по метрике $L^q_{[0,1]}$. II) он квазиуниверсален во всех $L^p_{[0,1]}$ при $p \in [1, 2)$ одновременно относительно перестановок и частичных рядов.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа является продолжением работ автора [16] – [18], посвящённым ортогональным в L^p рядам. Напомним следующие определения.

Определение 1. *Пусть $E \subseteq [0,1]$ – некоторое измеримое множество, $1 \leq p_1 < p_2 \leq \infty$ и $\varphi_k(x) \in \bigcap_{p\in[p_1,p_2]} L^p[0,1]$.*

1) Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x) \tag{1.1}$$

называется универсальным во всех $L^p(E)$, $p_1 \leq p < p_2$ относительно перестановок в смысле сходимости по метрике $L^p(E)$, если для любого $p \in [p_1, p_2)$ и для каждой функции $f(x) \in L^p(E)$ члены ряда (1.1) можно переставить $k \to \sigma(k)$ так, чтобы $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(x)$ сходился бы по метрике $L^p(E)$ к функции $f(x)$.

2) Ряд (1.1) называется универсальным в пространстве $L^p(E)$, $p_1 \leq p < p_2$ относительно частичных рядов в смысле сходимости по метрике $L^p(E)$, если для любого $p \in [p_1, p_2)$ и для каждой функции $f(x) \in L^p(E)$ из ряда (1.1) можно выделить частичный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}\varphi_{n_k}(x)$, который сходится к функции $f(x)$ по метрике $L^p(E)$.

3) Ряд (1.1) называется универсальным в обычном смысле в пространстве $L^p(E)$, $p_1 \le p < p_2$, в смысле сходимости по метрике $L^p(E)$, если для любого $p \in [p_1, p_2)$ и для каждой функции $f(x) \in L^p(E)$ существует последовательность возрастающих натуральных чисел n_k такая, что у ряда (1.1) последовательность частичных сумм с номерами n_k сходится к функции $f(x)$ по метрике $L^p(E)$.

Определение 2. *Ряд (1.1) называется квазиуниверсальным во всех $L^p(E)$, $p_1 \le p < p_2$ относительно перестановок в обычном смысле или относительно частичных рядов, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти измеримое множество $E_\varepsilon \subset E$, $|E_\varepsilon| > |E| - \varepsilon$ такое, чтобы ряд (1.1) был универсальным во всех $L^p(E_\varepsilon)$, $p_1 \le p < p_2$ относительно перестановок, в обычном смысле или относительно частичных рядов, соответственно.*

Квазиуниверсальность ряда (1.1) в пространстве всех непрерывных функций $C[0,1]$ определяется аналогично.

Вопросам существования различных типов универсальных рядов в смысле сходимости почти всюду или по мере посвящено много работ [1] – [11]. Первый тригонометрический ряд, универсальный в обычном смысле в классе всех измеримых функций, сходящийся почти всюду был построен Д. Е. Меньшовым [1] (см. также В. Я. Козлов [2]). Этот результат был распространён А. А. Талаляном [3] на произвольную ортонормальную полную систему. Им также доказано [4], что если $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in [0,1]$ есть произвольная ортонормированная полная система, то существует ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$, универсальный в смысле частичных рядов в классе всех измеримых функций в смысле сходимости по мере на $[0,1]$.

Существование функциональных рядов, универсальных относительно перестановок в классе почти всюду конечных измеримых функций, сходящихся почти всюду, было доказано Орличем [10]. Отметим, что Риман доказал (см. [11], стр. 317), что любой неабсолютно сходящийся числовой ряд универсален относительно перестановок в классе всех целых чисел.

Ни при одном $p \ge 2$, ($p \ge 1$) и ни по одной ортонормированной (ограниченной ортонормированной) системе $\{\varphi_n(x)\}$ не существует ряда, универсального в $L^p[0,1]$ либо относительно перестановок, либо относительно частичных рядов в смысле сходимости по метрике $L^p[0,1]$.

В работах [17], [18] автором доказано, что если ортонормальная система $\{\varphi_n(x)\}$ полна в $L^2[0,1]$ и для некоторого $p_0 > 2$, $\|\varphi_n\|_{L^{p_0}[0,1]} \le \text{const}$, то по этой системе можно построить ряд $\sum c_k \varphi_k(x)$, который квазиуниверсален в $L^p[0,1]$ при $p \in [2, p_0]$ относительно перестановок. Возникает следующий вопрос : можно

ли по этой системе построить ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\,\varphi_k(x)$, который квазиуниверсален в $L^p[0,1]$ относительно частичных рядов?
Отметим, что существует ортонормальная система $\{\omega_n(x)\}$, $x \in [0,1]$, по которой можно построить ряд вида (1.1), универсальный одновременно относительно перестановок и в смысле частичных рядов, в каждом $L^p[0,1]$ при $1 \le p < 2$, в смысле сходимости по метрике в $L^p[0,1]$, $1 \le p < 2$ и в классе всех измеримых функций для сходимости почти всюду. Ограниченные ортонормированные системы этим свойством не обладают. Сформулируем основные результаты работы.

Теорема 1. *По произвольной полной ортонормированной системе* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *существует ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\,\varphi_k(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^r < \infty, \quad \text{при всех} \quad r > 2, \tag{1.2}$$

удовлетворяющий следующим условиям:

1) Ряд (1.2) универсален во всех $L^q_{[0,1]}$ *при* $0 < q \le 1$ *одновременно относительно перестановок и относительно частичных сумм в смысле сходимости по метрике* $L^q_{[0,1]}$.

2) Ряд (1.2) квазиуниверсален во всех $L^p_{[0,1]}$ *при* $p \in [1,2)$ *одновременно относительно перестановок и относительно частичных рядов.*

Теорема 2. *По произвольной полной ортонормированной системе* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *существует ряд (1.2), удовлетворяющий следующим условиям:*

1) Ряд (1.2) квазиуниверсален в $C[0,1]$ *в обычном смысле.*

2) Ряд (1.2) квазиуниверсален во всех $L^p_{[0,1]}$ *при* $p \ge 2$ *в обычном смысле.*

Замечание. Утверждение 1) Теоремы 1 является усилением следующего результата А. Талаляна, см. [12]: для каждой функции $f(x) \in L^p_{[0,1]}$ при $p \in (0,1)$ существует ряд по любой полной ортонормированной системе $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, сходящийся к $f(x)$ в метрике $L^p_{[0,1]}$.
Утверждение 2) Теоремы 1 является усилением одного результата автора (см. [14], [15]): для любой ограниченной полной ортонормированной в $L^2_{[0,1]}$ системе $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ можно построить ряд вида (1.2), удовлетворяющий следующему свойству: для произвольного $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$ такое, что ряд (1.2) универсален относительно частичных рядов в классе $L^p_{(E)}$, $1 \le p < 2$, в смысле сходимости по метрике $L^p_{(E)}$.

В настоящей работе рассматриваемые выше вопросы исследуются в двумерном случае. Отметим, что ряд классических результатов (например, Теоремы

Л. Карлесона [19], М. Рисса [20], А. Н. Колмогорова [21]) невозможно распространить на двумерный случай (см. Ч. Фефферман [22], С. В. Конягин [23]). В этом случае сферические, прямоугольные и квадратные частичные суммы резко отличаются сходимостью в L^p, $p \geq 1$ и почти всюду (по этому поводу см. обзорные статьи Л. В. Жижиашвили [24], Б. С. Голубов [25] и М. И. Дьяченко [26]).

Теорема 3. *По любой ортонормированной полной системе $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ существует ряд вида*

$$\sum_{k,n=1}^{\infty} c_{k,n}\,\varphi_k(x)\,\varphi_n(y), \qquad \sum_{k,n=1}^{\infty} |c_{k,n}|^r < \infty, \tag{1.3}$$

обладающий следующими свойствами :

1) для каждого $p \in (0,1)$ и для каждой функции $f(x,y) \in L^p_{[0,1]^2}$, члены ряда (1.3) можно переставить (соответственно из ряда (1.3) можно выделить частичный ряд) так, чтобы вновь полученный ряд сходился бы к $f(x,y)$ в метрике $L^p_{[0,1]^2}$ как по сферам, так и по прямоугольникам.

2) для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество E_ε с мерой $|E_\varepsilon| > 1-\varepsilon$ такое, что для всех $f \in L^p$, $p \in [1,2)$, члены ряда (1.3) можно переставить (соответственно из ряда (1.3) можно выделить частичный ряд) так, чтобы вновь полученный ряд сходился к $f(x,y)$ в метрике $L^p_{(E)}$ как по сферам, так и по прямоугольникам.

Таким образом, существование ряда $\sum a_k\,\varphi_k(x)$ с указанными свойствами зависит от заданной ортонормированной системы $\{\varphi_k(x)\}$, числа p и типа универсальности.

§2. ОСНОВНЫЕ ЛЕММЫ

Лемма 1. *Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – полная ортонормированная система в $L^2_{[0,1]}$. Тогда для любых $N_0 > 2$, $\varepsilon \in (0,1)$, $0 < q_1 < q_2 \leq 1$ и для каждой ступенчатой функции $f(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{\nu_0} \gamma_k \cdot \chi_{\Delta_k}(x)$; $\Delta_k = ((k-1)/2^n, k/2^n)$, $1 \leq k \leq 2^n = \nu_0$ существуют измеримое множество $E \subset [0,1]$ и полином*

$$H(x) = \sum_{k=N_0}^{N} c_k\,\varphi_k(x), \tag{2.1}$$

удовлетворяющие условиям : 1) $|E| > 1-\varepsilon_0$, 2) $\sum\limits_{k=N_0}^{N} |c_k|^{2+\varepsilon} < \varepsilon$, 3) $\int\limits_E |H(x) - f(x)|^2\,dx < \varepsilon^2$,

4) $$\int_0^1 |H(x) - f(x)|^q\,dx < \varepsilon^2, \quad \text{для всех} \quad q \in [q_1, q_2],$$

5) $$\max_{N_0\le m\le N}\int_0^1\left|\sum_{k=N_0}^{m} c_k\,\varphi_k(x)\right|^q dx\le 4\int_0^1|f(x)|^q\,dx,\quad \text{для всех}\quad q\in[q_1,q_2),$$

6)
$$\max_{N_0\le m\le N}\left(\int_{\overline{E}}\left|\sum_{k=N_0}^{m} c_k\,\varphi_k(x)\right|^p dx\right)^{1/p}\le\left(\int_{\overline{E}}|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}+\varepsilon,\ \text{для всех}\,p\in[1,2),$$

где $\overline{E}\subset E$ *– любое измеримое множество.*

Доказательство. Положим

$$I_m(x)=\begin{cases}-\sqrt{m}, & x\in[0,1/(m+1)];\\ \dfrac{1}{\sqrt{m}}, & x\in(1/(m+1),1]\end{cases}\tag{2.2}$$

и при любом фиксированном m продолжим функцию $I_m(x)$ с периодом 1 с отрезка $[0,1]$ на всю ось. Очевидно, что

$$\int_0^1 I_m(x)\,dx=0,\quad m=1,2,....\tag{2.3}$$

По лемме Фейера (см. [27], стр. 77) из (2.3) будем иметь

$$\lim_{s\to\infty}\int_0^1 I_1(s\,x)\,\varphi_k(x)\,dx=0,\quad m,k=1,2,....\tag{2.4}$$

Следовательно, в силу (2.4), можно найти натуральное число $s_1>\nu_0$ такое, что

$$\left|\int_0^1[f(x)\cdot I_1(2^{s_1}x)]\,\varphi_k(x)\,dx\right|<\frac{\min\{\varepsilon;\ \int_0^1|f(x)|\,dx\}}{4\cdot\sqrt{N_0}},\quad k=1,2,...,N_0.\tag{2.5}$$

Возьмём натуральное число $N_1>N_0$ настолько большим, чтобы

$$\int_0^1|\sum_{i=1}^{N_1}a_i^{(1)}\,\varphi_i(x)-g_1(x)|^2\,dx<(\varepsilon/4)^2,$$

где $g_1(x)=f(x)\cdot I_1(2^{s_1}x)$, $a_i^{(1)}=\int_0^1[g_1(x)\varphi_i(x)dx$. Отсюда и из (2.5) вытекает

$$\left(\int_0^1\left|\sum_{i=N_0}^{N_1}a_i^{(1)}\,\varphi_i(x)-g_1(x)\right|^2 dx\right)^{1/2}\le\frac{\varepsilon}{4}+\left(\sum_{i=1}^{N_0}\left[a_i^{(1)}\right]^2\right)^{1/2}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Продолжая это рассуждение мы можем, по индукции, определить последовательности чисел $s_1<s_2<...$; $N_0<N_1<...$, функций

$$g_m(x)=f(x)\cdot I_m(2^{s_m}x);\quad m=1,2,...\tag{2.6}$$

причём

$$h_\omega(u) = \quad \text{сужение порождающей плотности} \quad h(\Omega) \quad \text{тела} \quad \mathbf{K} \quad \text{на} \quad \mathbf{S}_\omega.$$

Подчеркнём, что $h(\Omega)$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения. В (1.1), $\lambda_{n-2}(du)$ – сферическая мера Лебега на $\mathbf{S}_\omega$ = большая $(n-2)$-подсфера с полюсом $\omega \in \mathbf{S}^{n-1}$. Обобщённая форма уравнения (1.1), не требующая дополнительных условий гладкости, полученная в [14], использует понятие порождающих распределений. В действительности, (1.1) обобщает известный результат Бляшке [8] для $n = 3$ на выпуклые тела в пространстве $\mathbb{R}^n$.
Целью настоящей работы является описание подхода к исследованию уравнения (1.1), основанному на новом выражении для радиусов кривизны проекций. Для двух различных взаимно перпендикулярных направлений $\omega, \xi \in \mathbf{S}^{n-1}$, $\omega \perp \xi$ определим $R(\omega,\xi)$ = радиус кривизны $\partial\mathbf{K}(\omega,\xi)$ в точке, с направлением нормали ω, где $\mathbf{K}(\omega,\xi)$ = проекция $\mathbf{K}$ на плоскость, содержащую начало координат и направления ω и ξ. Это выражение имеет вид

$$R(\omega,\xi) = 2\int_{\mathbf{S}_\omega} \cos^2(u,\hat{}\xi) h_\omega(u)\, \lambda_{n-2}(du). \tag{1.2}$$

Отметим, что интеграл

$$\int_{\mathbf{S}_\omega} \cos^2(u,\hat{}\xi) h_\omega(u)\, \lambda_{n-2}(du)$$

часто используется в теории выпуклости, например, Вейль [30], где неотрицательность интеграла играет существенную роль. Выражение (1.2) даёт ясную геометрическую интерпретацию этого интеграла.
Уравнение (1.1) даёт начало рассмотрению задачи Функа на $\mathbf{S}^{n-1}$ для порождающей плотности $h(\Omega)$. Решение этой задачи имеет различную природу для чётных и нечётных значений n (см. Хелгасон [18]). Для чётного n и гладкой границы $\partial\mathbf{K}$ имеем (см. Теорему 4.3)

$$h(\Omega) = c_n P_n(L)\Big(\int_{\mathbf{S}_\Omega} \sum_{i=1}^{n-1} R_i(\omega)\, \lambda_{n-2}(d\omega)\Big), \tag{1.3}$$

где интегрирование распространяется на $(n-2)$-мерный экватор с полюсом Ω, L – оператор Лапласа–Бертрами, действующий на $\mathbf{S}^{n-1}$, P_n – некоторый многочлен, а c_n – постоянная. Мы получаем характеризационное условие для зоноидов : правая сторона уравнения (1.2) должна быть неотрицательной для всех $\Omega \in \mathbf{S}^{n-1}$.
Аналогичный вопрос рассматривался в [14] в более общей формулировке.

$$H(x) = \sum_{m=l_0}^{l} m^{-1/(2+\varepsilon_1)} \cdot h_m(x) = \sum_{i=m_0}^{M} c_i \varphi_i(x), \tag{2.17}$$

где

$$\begin{cases} c_i = 0, & i \in [N_0, M_0 - 1], \quad M_0 = N_{l_0-1}, \quad M = N - l; \\ c_i = m^{-1/(2+\varepsilon_1)} \cdot a_i^{(m)}, & i \in [N_{m-1}, N_m), \quad m \in [l_0, l]. \end{cases} \tag{2.18}$$

Из (2.11) и (2.16) имеем $|E| > 1 - \varepsilon$. В силу неравенства Бесселя и (2.12) имеем

$$\sum_{i=N_{m-1}}^{N_m-1} \left|a_i^{(m)}\right|^2 \le \int_0^1 g_m^2(x)\,dx = \int_0^1 f^2(x)\,dx. \tag{2.19}$$

Отсюда и из (2.15) и (2.18) следует

$$\sum_{i=M_0}^{M} |c_i|^{2+\varepsilon_1} = \sum_{m=l_0}^{l} \left| \sum_{i=N_{m-1}}^{N_m-1} m^{-1/(2+\varepsilon_1)} \cdot a_i^{(m)} \right|^{2+\varepsilon_1} \le$$

$$\le \sum_{m=l_0}^{l} \frac{1}{m} \left(\sum_{i=N_{m-1}}^{N_m-1} \left|a_i^{(m)}\right|^2 \right)^{(2+\varepsilon_1)/2} \le \left(\int_0^1 f^2(x)\,dx \right)^{(2+\varepsilon_1)/2} \sum_{m=l_0}^{l} \frac{1}{m} < \varepsilon.$$

Из (2.2), (2.6), (2.9), (2.16) и (2.17) получим

$$\left(\int_E |H(x) - f(x)|^2\,dx \right)^{1/2} \le \sum_{m=l_0}^{l} m^{-1/(2+\varepsilon_1)} \cdot \left(\int_0^1 |h_m(x) - g_m(x)|^2\,dx \right)^{1/2} +$$

$$+ \left(\int_E \left| f(x) - \sum_{m=l_0}^{l} m^{-1/(2+\varepsilon_1)} \cdot g_m(x) \right|^2 dx \right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2} +$$

$$+ \left[1 - \sum_{m=l_0}^{l} m^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2+\varepsilon_1)}} \right] \cdot \left(\int_E f^2(x)\,dx \right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Поскольку $f(x)/\sqrt{m} = g_m(x) - \sqrt{m} \cdot \chi_{E_m}(x) \cdot f(x) + f(x)/\sqrt{m} \cdot \chi_{E_m}(x)$, $x \in [0, 1]$ (см. (2.6), (2.10), (2.2)), для любого $q \in (0, 1)$ имеем

$$\int_0^1 \left| h_m(x) - \frac{f(x)}{\sqrt{m}} \right|^q dx \le \int_0^1 |h_m(x) - g_m(x)|^q\,dx + 2m^{q/2} \cdot \int_{E_m} |f(x)|^q\,dx \le$$

$$\le \left(\frac{\varepsilon}{2^{m+1}} \right)^q + \frac{2m^{q/2}}{m} \int_0^1 |f(x)|^q\,dx.$$

Следовательно, из (2.14) - (2.18) для всех $q \in (q_1, q_2)$ получаем

$$\int_0^1 |H(x) - f(x)|^q\, dx \le \sum_{m=l_0}^{l} m^{-q/(2+\varepsilon_1)} \cdot \left(\int_0^1 \left|h_m(x) - \frac{f(x)}{\sqrt{m}}\right|^q dx\right) +$$

$$+ \left(\int_0^1 \left| f(x) - \sum_{m=l_0}^{l} \frac{f(x)}{m^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2+\varepsilon_1}}}\right|^q dx\right)^{1/2} \le \sum_{m=l_0}^{l} \left(\frac{\varepsilon}{2^{m+1}}\right)^{q_1} +$$

$$+ 2 \cdot \sum_{m=l_0}^{l} \frac{1}{m^{1-q_2(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+\varepsilon_1})}} \cdot \int_0^1 |f(x)|^q\, dx +$$

$$+ \left[1 - \sum_{m=l_0}^{l} m^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2+\varepsilon_1}}\right]^{q_1} \cdot \int_0^1 |f(x)|^q\, dx \lessdot \varepsilon.$$

Теперь проверим утверждения 5) и 6) Леммы 1. Прежде заметим (см. (2.13), (2.18), (2.19)), что для каждого $m \in [l_0, l]$ и для всех $N \in [N_{m-1}, N_m]$ имеет место следующее неравенство :

$$\left(\int_0^1 \left|\sum_{k=N_{m-1}}^{N} c_k\, \varphi_k(x)\right|^2 dx\right)^{1/2} \le \left(\left|\sum_{k=N_{m-1}}^{N} c_k\, \varphi_k(x)\right|^2\right)^{1/2} \le$$
$$\le m^{-1/(2+\varepsilon_1)} \cdot \left(\sum_{i=N_{m-1}}^{N_m - 1} \left|a_i^{(m)}\right|^2\right)^{1/2} \le l_0^{-1/(2+\varepsilon_1)} \cdot \left(\int_0^1 f^2(x)\, dx\right)^{1/2}. \tag{2.20}$$

Пусть $N \in [M_0, M]$. Тогда для некоторого $m_0 \in [q_0, q]$ имеем $N_{m_0-1} \le N \le N_{m_0}$. Следовательно, из (2.17) и (2.18) получаем

$$\sum_{k=N_0}^{N} c_k\, \varphi_k(x) = \sum_{k=l_0}^{m_0-1} k^{-1/(2+\varepsilon_1)} h_k(x) + \sum_{m_0-1}^{N} c_k\, \varphi_k(x).$$

Отсюда и из (2.13) — (2.15), (2.9), (2.20) для всех $m_0 \in [q_0, q]$ получаем

$$\int_0^1 \left|\sum_{k=N_0}^{N} c_k\, \varphi_k(x)\right|^q dx \le \sum_{m=l_0}^{m_0-1} m^{-q/(2+\varepsilon_1)} \int_0^1 |h_m(x) - g_m(x)|^q\, dx +$$

$$+ \int_0^1 \left|\sum_{k=N_{m_0}}^{N} c_k\, \varphi_k(x)\right|^q dx + \int_0^1 \left|\sum_{m=l_0}^{m_0-1} m^{-1/(2+\varepsilon_1)} g_m(x)\right|^q dx \le$$

$$\le \sum_{m=l_0}^{m_0-1} m^{-q_1/(2+\varepsilon_1)}\left(\frac{\varepsilon}{2^{m+1}}\right)^{q_1} + l_0^{-q_1/(2+\varepsilon_1)}\cdot\left(\int_0^1 f^2(x)\,dx\right)^{q_1/2} +$$

$$+\int_0^1 \left|\sum_{m=l_0}^{m_0-1} m^{-1/(2+\varepsilon_1)}\frac{f(x)}{\sqrt{m}}\right|^q dx+$$

$$+\int_0^1 \left|\sum_{m=l_0}^{m_0-1} m^{-1/(2+\varepsilon_1)}\left[f(x)\cdot\sqrt{m}\cdot\chi_{E_m}(x)-\frac{f(x)}{\sqrt{m}}\cdot\chi_{E_m}(x)\right]\right|^q dx \le$$

$$\le \sum_{m=l_0}^{m_0-1} m^{-q_1/(2+\varepsilon_1)}\left(\frac{\varepsilon}{2^{m+1}}\right)^{q_1} + l_0^{-q_1/(2+\varepsilon_1)}\cdot\left(\int_0^1 f^2(x)\,dx\right)^{q_1/2} +$$

$$+\left|\sum_{m=l_0}^{m_0-1} m^{-1/(2+\varepsilon_1)-1/2}\right|^{q_1}\int_0^1 |f(x)|^q\,dx+$$

$$+\sum_{m=l_0}^{m_0-1}\left(\frac{\sqrt{m}}{m^{1/(2+\varepsilon_1)}}\right)^q\cdot\int_{E_m}|f(x)|^q\,dx \le 2\cdot\int_0^1 |f(x)|^q\,dx+$$

$$+2\cdot\sum_{m=l_0}^{l}\frac{1}{m^{1-q_2(1/2-1/(2+\varepsilon_1))}}\cdot\int_0^1|f(x)|^q\,dx \le 4\cdot\int_0^1|f(x)|^q\,dx.$$

Принимая во внимание равенство $g_m(x) = f(x)/\sqrt{m}$ для $x \in E$ (см. (2.2), (2.6), (2.10), (2.16)) из (2.20), (2.14) для всех $p \in [1,2)$ и $N \in [N_0, M]$ и для любого измеримого множества $\overline{E} \subset E$ будем иметь

$$\left(\int_{\overline{E}}\left|\sum_{k=N_0}^{N} c_k\,\varphi_k(x)\right|^p dx\right)^{1/p} \le \sum_{m=l_0}^{m_0-1} m^{-q/(2+\varepsilon_1)}\left(\int_{\overline{E}}|h_m(x)-g_m(x)|^p\right)^{1/p} dx+$$

$$+\left(\int_{\overline{E}}\left|\sum_{m=l_0}^{m_0-1} m^{-1/(2+\varepsilon_1)}g_m(x)\right|^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_0^1\left|\sum_{k=N_{m_0}}^{N} c_k\,\varphi_k(x)\right|^p dx\right)^{1/p} \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2}+\left(\int_{\overline{E}}|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\cdot\sum_{m-q_0}^{q} m^{-1/(2+\varepsilon_1)-1/2}+\frac{\varepsilon}{2}\le\left(\int_{\overline{E}}|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}+\varepsilon.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть $\{\omega_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – полная ортонормированная система в $L^2[0,1]$. Тогда для любой функции $f(x,y) \in L^2_{(T)}$ и для любых чисел $\varepsilon > 0$, $N > 1$, $0 < q_1 < q_2 \le 1$, $p \in (1,2)$ существуют измеримое множество $E \subset T = [0,1]^2$ и полином $Q(x,y)$ вида*

$$Q(x,y) = \sum_{k,n=N}^{M} c_{k,n}\,\omega_k(x)\cdot\omega_n(y)$$

такие, что (1) $|E| > 1-\varepsilon$, 2) $\|f(x,y)-Q(x,y)\|_{L^2(E)} < \varepsilon$, 3) $\sum\limits_{k,n=N}^{M} |c_{k,n}|^{2+\varepsilon} < \varepsilon$,

(4)

$$\text{для всех}\quad p\in[1,2]\quad \text{и всех}\quad G\subset E,\ \max_{N\le\overline{k},\overline{n}\le M}\left\|\sum_{k,n=N}^{\overline{k},\overline{n}} c_{k,n}\,\omega_k(x)\cdot\omega_n(y)\right\|_{L^p(G)}+$$

$$+\max_{\sqrt{2}N\le R\le\le\sqrt{2}M}\left\|\sum_{2N^2\le k^2+n^2\le R^2} c_{k,n}\,\omega_k(x)\cdot\omega_n(y)\right\|_{L^p(G)}\le 2\cdot\|f(x,y)\|_{L^p(G)}+\varepsilon,$$

(5)
$$\iint_T |Q(x,y)-f(x,y)|^q\,dx\,dy<\varepsilon,\quad \text{for all}\quad q\in(q_1,q_2),$$

(6)
$$\max_{N\le\overline{k},\overline{n}\le M}\iint_T\left|\sum_{k,n=N}^{\overline{k},\overline{n}} c_{k,n}\,\omega_k(x)\cdot\omega_n(y)\right|^q dx\,dy+$$

$$+\max_{\sqrt{2}N\le R\le\sqrt{2}M}\iint_T\left|\sum_{2N^2\le k^2+n^2\le R^2} c_{k,n}\,\omega_k(x)\cdot\omega_n(y)\right|^q dx\,dy\le$$

$$\le 2\cdot\iint_T|f(x,y)|^q\,dx\,dy+\varepsilon,\quad \text{для всех}\quad q\in(q_1,q_2).$$

Доказательство : аналогично доказательству Леммы 3 работы [18].

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Доказательство Теоремы 1. Рассмотрим множество пар $\{\gamma,\Delta\}$, где γ пробегает множество всех рациональных чисел, а Δ пробегает множество всех интервалов вида $\Delta_k^{(i)}=((i-1)/2^k, i/2^k]$. Пронумировав все ступенчатые функции $g(x)=\sum\limits_{k=1}^{\nu_0}\gamma_k\cdot\chi_{\Delta_k}(x)$, $(\gamma_k,\Delta_k)\in\{\gamma,\Delta\}$, мы можем представить их в виде последовательности

$$\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}. \tag{3.1}$$

Используя Лемму 1, можно найти последовательности множеств $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ и полиномов вида

$$Q_k(x)=\sum_{i=N_{k-1}}^{N_k-1} c_i^{(k)}\varphi_k(x), \tag{3.2}$$

где $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – произвольная полная ортонормированная система в $L^2_{[0,1]}$, которые удовлетворяют условиям :

$$|E_k| > 1 - 2^{-2k}, \tag{3.3}$$

$$\int_{E_k} |f_k(x) - Q_k(x)|^2\, dx < 2^{-2k}, \tag{3.4}$$

для всех $p \in [1,2]$, и всех $E \subset E_k$ имеем

$$\max_{N_{k-1} \le m < N_k} \int_E \left| \sum_{n=N_{k-1}}^{m} a_n^{(k)} \varphi_n(x)_n(x) \right|^p < 2 \int_E |f_k(x)|^p\, dx + 2^{-2k}, \tag{3.5}$$

$$\int_0^1 |f_k(x) - Q_k(x)|^q\, dx < 2^{-2k}, \quad \text{при} \quad q \in \left(\frac{1}{k}, 1 - \frac{1}{k}\right), \tag{3.6}$$

для всех $q \in \left(\dfrac{1}{k}, 1 - \dfrac{1}{k}\right)$ имеем

$$\max_{N_{k-1} \le m < N_k} \int_0^1 \left| \sum_{k=N_{k-1}}^{m} a_n^{(k)} \varphi_n(x) \right|^q dx < 2 \int_0^1 |f_k(x)|^q\, dx + 2^{-2k}, \tag{3.7}$$

$$\sum_{n=N_{k-1}}^{N_k - 1} \left| a_n^{(k)} \right|^{2+2^{-k}} < 2^{-k}. \tag{3.8}$$

Рассмотрим ряд $(a_n = a_n^{(k)})$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, \varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=N_{k-1}}^{N_k - 1} a_n^{(k)} \varphi_n(x),\ N_{k-1} \le n < N_k. \tag{3.9}$$

Очевидно, что $\sum\limits_{r=1}^{\infty} |a_n|^r < \infty$ для всех $r > 2$. Покажем, что ряд (3.9) удовлетворяет требованиям Теоремы 1. Пусть $q \in (0,1)$ – произвольное число. Тогда для некоторого натурального k_0 будем иметь

$$q \in \left(\frac{1}{k_0}, 1 - \frac{1}{k_0}\right). \tag{3.10}$$

Для $f(x) \in L^q_{[0,1]}$ выберем функцию $f_{\nu_1}(x)$ из последовательности (3.1) такую, что $\int_0^1 |f(x) - f_{\nu_1}(x)|^q\, dx < 2^{-2}$, $\nu_1 > k_0$. Отсюда и из (3.6), (3.7), (3.9), (3.10) вытекает

$$\int_0^1 |f(x) - Q_{\nu_1}(x) - a_1\, \varphi_1(x)|^q\, dx \le 2^{-2\nu_1} + |a_1|^q,$$

$$\max_{N_{\nu_1-1}\le N<N_{\nu_1}}\int_0^1\left|\sum_{n=1}^{N}a_n^{(\nu_1)}\varphi_n(x)\right|^q dx<2\int_0^1|f_{\nu_1}(x)|^q\,dx+2^{-k_1}.$$

Предположим, что уже определены числа $2<\nu_1<\ldots<\nu_{q-1}$, $1=s(1),\ldots,s(q-1)$, функции $a_{s(1)}\omega_{s(1)},\ldots,a_{s(q-1)}\omega_{s(q-1)}$ и полиномы $Q_{\nu_n}(x)=\sum\limits_{i=N_{\nu_n-1}}^{N_{\nu_n}-1}a_i^{(\nu_n)}\omega_i(x)$, $n=1,2,\ldots,q-1$, удовлетворяющие условиям

$$\int_0^1\left|f(x)-\sum_{n=1}^{j}\left[Q_{\nu_n}(x)+a_{s(n)}\omega_{s(n)}(x)\right]\right|^q dx<2^{-(j+3)}+|a_{s(j)}|^q,\quad 1\le j\le m-1,\tag{3.11}$$

$$\max_{N_{\nu_j-1}\le N<N_{\nu_j}}\int_0^1\left|\sum_{i=N_{\nu_j-1}}^{N}a_i^{(\nu_j)}\omega_i(x)\right|^q dx<2^{-j}+|a_{s(j-1)}|^q,\tag{3.12}$$

где $s(j)=\min\left\{n\in\mathbb{N}:n\notin\left\{\{N_{\nu_k-1},\ldots,N_{\nu_k}-1\}_{k=1}^{j}\cup\{s(n)\}_{n=1}^{j-1}\right\}\right\}$, $s(1)\equiv 1$. Рассмотрим функцию $f_{\nu_m}(x)$, $\nu_m>\nu_{m-1}$ из последовательности (3.1) такую, что

$$\int_0^1\left|f(x)-\sum_{n=1}^{m-1}\left[Q_{\nu_n}(x)+a_{s(n)}\omega_{s(n)}(x)\right]-f_{\nu_m}(x)\right|^q dx<\frac{1}{2^{m+4}}.\tag{3.13}$$

Выбирая $\nu_m>\nu_{m-1}$, построим полином (см. (3.4)) $Q_{\nu_m}(x)=\sum\limits_{i=N_{\nu_m-1}}^{N_{\nu_m}-1}a_i^{(\nu_m)}\varphi_i(x)$ и определим число

$$s(m)=\min\left\{n\in\mathbb{N}:n\notin\left\{\{N_{\nu_k-1},N_{\nu_k-1}+1,\ldots,N_{\nu_k}-1\}_{k=1}^{m}\cup\{s(k)\}_{k=1}^{m-1}\right\}\right\}.\tag{3.14}$$

Из (3.11) и (3.13) вытекает, что $\int_0^1|f_{\nu_m}(x)|^q\,dx<2\cdot 2^{m+4}+|a_{s(m-1)}|^q$. Отсюда и из условий (3.5),(3.6), (3.13) будем иметь

$$\max_{N_{\nu_m-1}\le N<N_{\nu_m}}\int_0^1\left|\sum_{i=1}^{N}a_i^{(\nu_m)}\varphi_i(x)\right|^q dx<2^{-m}+2\cdot|a_{s(m-1)}|^q,\tag{3.15}$$

$$\int_0^1\left|f(x)-\sum_{n=1}^{m}\left[Q_{\nu_n}(x)+a_{s(n)}\varphi_{s(n)}(x)\right]\right|^q dx<2^{-(m+3)}+|a_{s(m)}|^q.\tag{3.16}$$

Таким образом, мы можем, по индукции, из ряда (3.9) выбрать последовательности полиномов (см. (3.2), (3.14)) $Q_{\nu_m}(x)=\sum\limits_{i=N_{\nu_m-1}}^{N_{\nu_m}-1}a_i^{(\nu_m)}\varphi_i(x)$, $m=1,2,\ldots$ и функций $\left\{a_{s(m)}\varphi_{s(m)}(x)\right\}_{m=1}^{\infty}$, $m=1,2,\ldots$, $(s(1)=1)$, удовлетворяющие условиям (3.14) – (3.16) для всех $m\ge 1$. Учитывая выбор $Q_{\nu_m}(x)$ и $a_{s(m)}\varphi_{s(m)}(x)$ (см. (3.12), (3.14)) имеем, что ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\sum_{i=N_{\nu_m-1}}^{N_{\nu_m}-1}a_i^{(\nu_m)}\varphi_i(x)+a_{s(m)}\varphi_{s(m)}(x)\right]$$

получается из ряда (3.11) перестановкой его членов. Обозначим его через

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(x). \tag{3.17}$$

Из равенства (см. (3.8), (3.9), (3.14)) $\lim\limits_{m\to\infty} a_{s(m)} = 0$ и из (3.15) и (3.16) вытекает, что ряд (3.17) сходится к функции $f(x)$ в метрике $L^q[0,1]$. Следовательно, ряд (3.11) универсален в $L^q[0,1]$ относительно перестановок.

Теперь покажем, что ряд (3.9) универсален в $L^q[0,1]$, $q \in (0,1)$ относительно частичных рядов. Используя (3.1), (3.2) и индукцию, мы можем для каждой функции $f(x) \in L^q_{[0,1]}$ выбрать подпоследовательности $\{f_{\nu_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и $Q_{\nu_k}(x) = \sum\limits_{i=N_{\nu_{k-1}}}^{N_{\nu_k}-1} a_i^{(\nu_k)}\varphi_i(x)$, $N_{\nu_{k-1}} < N_{\nu_k-1}$, удовлетворяющие условиям

$$\int_0^1 \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} Q_{\nu_k}(x) - f_{\nu_n}(x)\right|^q dx < 2^{-(n+3)}, \quad n \ge 1.$$

Отсюда и из (3.6), (3.5) и (3.2) для всех $n \ge 1$ получаем

$$\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=N_{\nu_k-1}}^{N_{\nu_k}-1} a_i^{(\nu_k)}\varphi_i(x) - f(x)\right)\right|^q dx < 2^{-n},$$

$$\sup_{N_{\nu_n-1}\le N<N_{\nu_n}} \int_0^1 \left|\sum_{i=1}^{N} a_i^{(\nu_m)}\varphi_i(x)\right|^q dx < 2^{-n}, \quad n > 1.$$

Следовательно, ряд (3.11) универсален в $L^q_{[0,1]}$ относительно частичных рядов. Этим заканчивается доказательство утверждения 1) Теоремы 1.

Теперь докажем утверждение 2). Пусть ε – произвольное положительное число. Рассмотрим множество $E_0 = \bigcap\limits_{n=n_0}^{\infty} E_n$, где n_0 – целая часть числа $\log_{1/2}\varepsilon$. Очевидно, что $|E_0| > 1-\varepsilon$. Учитывая неравенство (см. (3.4), (3.5))

$$\int_{E_0} |Q_k(x) - f_k(x)|^p\, dx < 2^{-k},$$

имеющее место для всех $p \in [1,2)$, получаем

$$\max_{N_{k-1}<N<N_k} \int_E \left|\sum_{i=N_{k-1}}^{N} a_i^{(k)}\varphi_i(x)\right|^p dx < 2\int_{E_0} |f_k(x)|^p\, dx + 2^{-k}.$$

Используя рассуждения, приведённые при доказательстве пункта 1), завершаем доказательство пункта 2). Теорема 1 доказана.

Доказательство Теоремы 2. Пусть

$$\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}, \quad x \in [0,1] \tag{3.18}$$

последовательность всех алгебраических многочленов с рациональными коэффициентами. Используя Лемму 1, можно найти последовательности множеств $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ и полиномов

$$Q_k(x) = \sum_{n=N_{k-1}}^{N_k-1} a_n^{(k)} \varphi_n(x), \quad 1 \le N_0 < ... < N_k < N_{k+1} < ...., \quad k = 1,2,...., \tag{3.19}$$

удовлетворяющих следующим условиям :

$$\int_0^1 \left| f_k(x) - \sum_{i=1}^{k} Q_i(x) \right|^{1/2} dx < 2^{-2k}, \qquad \sum_{i=N_{k-1}}^{N_k-1} \left| a_i^{(k)} \right|^{2+2^{-k}} < 2^{-k}. \tag{3.20}$$

Положим

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n = \sum_{k=1} Q_k(x), \quad a_n = a_n^{(k)}, \quad N_{k-1} < n < N_k, \quad k \ge 1, \tag{3.21}$$

$$\overline{E_k} = \{x \in [0,1] : \quad |f_k(x) - \sum_{i=1}^{k} Q_i(x)| < 2^{-k}\}. \tag{3.22}$$

Очевидно, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^q < \infty$ для всех $q > 2$, $|\overline{E_k}| > 1 - 2^{-2k}$. Пусть $\varepsilon > 0$ – любое положительное число. Рассмотрим множество

$$\overline{E} = \left(\bigcap_{n=n_0}^{\infty} \overline{E}_k \bigcap B \right), \tag{3.23}$$

где $B \subset [0,1]$ – измеримое множество с мерой $|B| > 1 - \varepsilon/4$ такое, что все функции $\varphi_k(x)$ непрерывны на B, и n_0 – целая часть числа $\log_{1/2} \varepsilon$. Теперь рассмотрим произвольное замкнутое подмножество $E \subset \overline{E}$ с мерой $|E| > |\overline{E}| - \varepsilon/2$. Очевидно, что $E| > 1 - \varepsilon/2$. Пусть $f(x)$ – любая непрерывная функция, определённая на E. Нетрудно видеть, что из последовательности (3.18) можно выбрать подпоследовательность $f_{n_\nu}(x)$ такую, что $\max\limits_{x\in E} |f(x) - f_{n_\nu}(x)| < 2^{-2k}$, $k = 1,2,....$ Отсюда и из (3.22), (3.23) получаем

$$\max_{x\in E} \left| f(x) - \sum_{i=1}^{m_\nu} a_i \varphi_i(x) \right| = \max_{x\in E} \left| f(x) - \sum_{i=1}^{m_\nu} \left(\sum_{i=N_{k-1}}^{N_k-1} a_i^{(k)} \varphi_i(x) \right) \right| \le$$

$$\le \max_{x\in E} \left(|f(x) - f_{n_\nu}(x)| + \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n_\nu} Q_k(x) \right| \right) \le 2^{-2\nu} + 2^{-2n_\nu}, \quad m_\nu = N_{n_\nu} - 1.$$

Таким образом, ряд (3.21) универсален в $C_{(E)}$, и, следовательно, квазиуниверсален в $C_{[0,1]}$. Аналогично можно доказать, что ряд (3.21) квазиуниверсален в $L^p[0,1]$ для всех $p \geq 2$. Теорема 2 доказана.

Доказательство Теоремы 3. Доказательство следует из доказательства Теоремы 1, используя Лемму 2 вместо Леммы 1.

Abstract. The paper proves that for any complete orthonormal system $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ there exists a series $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$ for which $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^r < \infty$ for any $r > 2$, possessing the properties : I) it is universal in all $L^q_{[0,1]}$ for $0 < q \leq 1$ simultaneously with respect to both rearrangements and partial series in the sense of convergence in the metric of $L^q_{[0,1]}$. II) it is quasiuniversal in all $L^p_{[0,1]}$ for $p \in [1,2)$ simultaneously with respect to both rearrangements and partial series.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Е. Меньшов, "О частных суммах тригонометрических рядов", Мат. Сборник, том 20, № 2, стр. 197 — 238, 1947.
2. В. Я. Козлов, "О полных системах ортогональных функций", Мат. Сборник, том 26, № 3, стр. 351 — 364, 1950.
3. А. А. Талалян, "О сходимости почти всюду подпоследовательностей частичных сумм общих ортогональных рядов", Изв. АН АрмССР, Математика, том 10, № 3, стр. 17 — 34, 1975.
4. А. А. Талалян, "Представление измеримых функций рядами", УМН, том 15, № 5, стр. 567 — 604, 1960.
5. В. И. Иванов, "Представление функций рядами в метрических симметричных пространствах без линейных функционалов", Труды МИАН СССР, 189, стр. 34 — 77, 1989.
6. П. Л. Ульянов, "Представление функций рядами и классы $\varphi(L)$", УМН, том 25, № 2, стр. 3 — 52, 1972.
7. А. М. Олевский, "О некоторых особенностях рядов Фурье в пространстве L^p, $p < 2$", Мат. Сборник, том 77, № 2, стр. 251 — 258, 1968.
8. Ф. Г. Арутюнян, "Представление функций кратными рядами", ДАН Арм. ССР, том 64, № 2, стр. 72 — 76, 1976.
9. Н. Г. Погосян, "Представление измеримых функций базисами $L^p[0,1]$, $p \geq 2$", ДАН Арм.ССР, том 64, № 4, стр. 205 — 209, 1976.
10. W. Orlicz, "Über die unabhangig von der Anordnung fast uberall konvergenten Reihen", Bull de l' Academie Polonaise des Sciences, vol. 81, p. 117 — 125, 1927.
11. Г. М. Фихтенгольц, Курс Дифференциального и Интегрального Исчисления, II, Наука, Москва, 1996.
12. А. А. Талалян, "Представление функций классов $L^p[0,1]$, $0 < p < 1$ ортогональными рядами", Acta Math., Scientiarum Hungaricae Tomus, том 21, № № 1–2, pp. 1 — 9, 1970.
13. М. Г. Григорян, "О сходимости в метрике L^1 и почти всюду рядов Фурье по полным ортонормированным системам", Мат. Сборник, том 181, № 8, стр. 1011 — 1030, 1990.

14. М. Г. Григорян, "О некоторых свойствах ортогональных систем", Изв. РАН, серия Матем., том 57, № 5, стр. 75 — 105, 1993.
15. M. G. Grigorian "On the representation of functions by orthogonal series in weighted L^p spaces", Studia. Math., vol. 134(3), pp. 207 — 216, 1999.
16. М. Г. Григорян, "Представление функций классов $L^p[0,1]$, $1 \leq p < 2$ ортогональными рядами", ДАН Арм.ССР, том 67, № 5, стр. 269 — 274, 1978.
17. М. Г. Григорян, "Об универсальных или квазиуниверсальных в $L^p_{[0,1]}$ ортогональных рядах", Изв. НАН Армении, серия Матем., том 35, № 4, стр. 44 — 64, 2000.
18. М. Г. Григорян, "Об одном универсальном ортогональном ряде", Изв. НАН Армении, серия Матем., том 35, № 4, стр. 44 — 64, 2000.
19. L. Carleson, "On convergence and growth of partial sums of Fourier series", Acta Math., vol. 116, pp. 135 — 157, 1966.
20. M. Riesz, "Sur les functions conjugees", Math. Zeit., vol. 27, pp. 218 — 244, 1927.
21. A. N. Kolmogorov, "Sur les functions harmoniques conjugees et les de Fourier", FM., vol. 7, pp. 23 — 28, 1925.
22. C. Fefferman, "The multiple problem for the ball", Ann. Math., vol. 94, no. 2, pp. 330 — 336, 1971.
23. С. В. Конягин, "О сходимости кратных тригонометрических рядов Фурье", Тезисы докладов Всесоюз. шк. по Теории функций, Ереван, 1987.
24. Л. В. Жижиашвили, "О некоторых вопросах из теории простых и кратных тригонометрических и ортогональных рядов", УМН, том 28, № 2, стр. 65 — 119, 1973.
25. Б. И. Голубов, "Некоторые проблемы кратных тригонометрических рядов", УМН, том 47, № 5, стр. 97 — 162, 1992.
26. М. И. Дьяченко, "Некоторые проблемы кратных тригонометрических рядов", УМН, том 47, № 5, стр. 97 - 162, 1992.
27. Н. К. Бари, Тригонометрические Ряды, М., Физматгиз, 1961.

Поступила 22 марта 2002