Известия НАН Армении. Математика, **37**, № *1, 2002, 26–33*

ОБОБЩЕНИЕ КОМБИНАТОРНЫХ ФОРМУЛ АМБАРЦУМЯНА

Г. Ю. Панина

Институт информатики и автоматизации РАН,
Санкт-Петербург, Россия
e-mail : panina@iias.spb.su

Резюме. В статье приведены обобщенные комбинаторные формулы Амбарцумяна для вырожденного и невырожденного случаев. Формулы интерпретируют версии обратного преобразования Радона относительно эйлеровой характеристики.

ВВЕДЕНИЕ

Около 20 лет назад Р. В. Амбарцумяном был введён [1] комбинаторный подход к проблемам интегральной геометрии и геометрических вероятностей, основанный на комбинаторных формулах для пространств гиперплоскостей в евклидовых пространствах. Эти формулы суть комбинаторные обобщения формулы Гаусса-Бонне для сферического треугольника. Они приводят к важным результатам в различных областях, таких как задача равносоставленности в проективном пространстве [7] или случайных геометрических процессах [2].

Необходимые предпосылки для настоящей статьи включают формулы для любого чётно-размерного действительного пространства, доказанные автором в [6], см. ниже §1, пункт 1.4. Комбинаторные алгоритмы (найденные в [6], но отсутствующие в настоящей статье) вычисляют коэффициенты формул шаг за шагом, начиная с членов высших размерностей.

Эти формулы выполняются только для невырожденных случаев, и их комбинаторные коэффициенты не единственны, т.е. существуют различные множества комбинаторных коэффициентов, для которых выполняются эти формулы. С другой стороны, версия комбинаторных формул (для невырожденного случая) с однозначно определёнными коэффициентами получены в [7].

при частичной поддержке грантом RFBR № 02-01-00908

Два вопроса остаются открытыми :

– найти общий канонический вид для вырожденного и невырожденного случаев с однозначно определёнными коэффициентами ;

– не использовать итерационных алгоритмов для коэффициентов.

Настоящая статья даёт ответ на эти вопросы в Теореме 4. Эта теорема интерпретирует эти формулы, как частный случай обратного преобразования Радона относительно эйлеровой характеристики, и получает топологическую интерпретацию формул Амбарцумяна.

§1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РАССУЖДЕНИЯ

1.1. Политопные функции. Рассмотрим n-мерное векторное пространство $\mathbb{R}^n$ с фиксированным началом координат O. **Политоп** в $\mathbb{R}^n$ предполагается выпуклым, непустым, ограниченным и замкнутым. Множество всех политопов в $\mathbb{R}^n$ обозначается через $\mathcal{P}$. Под **размерностью** политопа подразумевается размерность его аффинной оболочки. Политоп K с $dim\ K < n$ называется **вырожденным**.

Функция $F : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ называется **политопной**, если она представима в виде конечной суммы $F = \sum_i a_i I_{K_i}$, где $a \in \mathbb{R}$, а I_{K_i} является характеристической функцией политопа K_i, т.е.

$$I_{K_i}(x) = \begin{cases} 1 & \text{если } x \in K_i, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Соответствие $K \longmapsto I_K$ отождествляет политоп K и его характеристическую функцию I_K. Пространство политопных функций обозначается через $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}$. Напомним, что $\mathcal{M}$ может быть снабжена структурной алгеброй (см. [4], [5]). Обозначим через $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^n)$ подпространство $\mathcal{M}$, порождённое функциями типа $I_{\{P\}}$, где $P \in \mathbb{R}^n$.

Пусть $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ – конечное множество точек. Обозначим через $\mathcal{M}(\mathcal{P})$ подпространство $\mathcal{M}$, порождённое политопами, все вершины которого лежат в $\mathcal{P}$. Обозначим через $\mathcal{M}_0(\mathcal{P})$ подпространство $\mathcal{M}(\mathcal{P})$, порождённое всеми $I_{\{P\}}$, где $P \in \mathcal{P}$. Очевидно, $\mathcal{M}_0(\mathcal{P}) = \mathcal{M}(\mathcal{P}) \cap \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^n)$.

1.2. Бюффоновые множества и функции. Пусть $\mathcal{E}$ – пространство гиперплоскостей в $\mathbb{R}^n$. Пусть $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ - конечное множество точек. $\mathcal{P}$ называется **невырожденным**, если ни какие $k+1$ точки из $\mathcal{P}$ не лежат в одной k-плоскости $(k = 1, ..., n)$. Две гиперплоскости $e_1, e_2 \in \mathcal{E}$ называются **эквивалентными относительно** $\mathcal{P}$, если

1. $e_1 \cap \mathcal{P} = e_2 \cap \mathcal{P}$,

2. $P, Q \in \mathcal{P}$, e_1 разделяет P от $Q \iff e_2$ разделяет P от Q.

Множество эквивалентных классов обозначается через $Cl(\mathcal{P})$. Эквивалентный класс $c \in Cl(\mathcal{P})$ называется **ограниченным**, если он ограничен относительно расстояния от начала координат O.

Класс $c \in Cl(\mathcal{P})$ называется **атомом**, если он ограничен и если из условия $e \in c$ вытекает, что $e \cap \mathcal{P} = \emptyset$. Множество всех атомов обозначается через $\mathcal{A}(\mathcal{P})$.

Объединение ограниченных классов эквивалентности называется **бюффоновым множеством**.

Пространство действительнозначных функций, порождённое функциями I_c, где $c \in Cl(\mathcal{P})$ и c ограничено, обозначим через $\mathcal{B}(\mathcal{P})$. Обозначим также

$$\mathcal{B}_0(\mathcal{P}) = \{f \in \mathcal{B}(\mathcal{P}) : e \cap \mathcal{P} = \emptyset \Longrightarrow f(e) = 0\}.$$

Мы должны рассмотреть кольцо $\mathcal{B}(\mathcal{P})/\mathcal{B}_0(\mathcal{P})$. Его элементы называются **бюффоновыми функциями.**

Пусть $F \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. **Преобразование Радона функции F относительно эйлеровой характеристики** (введённое в [8]) есть функция

$$F^* : \mathcal{E} \longmapsto \mathbb{R}, \quad F^*(e) = \int_e F(x)\, d\chi(x).$$

Здесь используем понятие интеграла относительно характеристики Эйлера. Его детальное описание можно найти в [8].

Очевидно, $F \in \mathcal{M}(\mathcal{P})$ влечёт $F^* \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$. Заметим, что гомоморфизм $* : \mathcal{M}(\mathcal{P}) \longmapsto \mathcal{B}(\mathcal{P})$ индуцирует гомоморфизм

$$* : \mathcal{M}(\mathcal{P})/\mathcal{M}_0(\mathcal{P}) \longmapsto \mathcal{B}(\mathcal{P})/\mathcal{B}_0(\mathcal{P})$$

(не возникнет путаницы в связи с двойным использованием знака $*$).

Преобразование Радона $* : \mathcal{B}(\mathcal{P}) \longmapsto \mathcal{M}(\mathcal{P})$ определяется формулой

$$f^*(x) = \int_{x \in e} f(e)\, d\chi(e).$$

1.3. Симплексы. Пусть $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ – конечное множество точек. Пусть $0 \le k \le n$ и $P_0, \ldots, P_k \in \mathcal{P}$ (все P_i разные). Выпуклая оболочка $conv\,\{P_0, \ldots, P_k\}$ называется **k-мерным симплексом с вершинами в $\mathcal{P}$.** Рассмотрим следующие множества симплексов с вершинами в $\mathcal{P}$:

$\mathcal{S}(\mathcal{P})$ = все симплексы,

$\mathcal{S}_k(\mathcal{P})$ = все k -мерные симплексы,

$\mathcal{S}_{even}(\mathcal{P})$ = все чётно-мерные симплексы,

$\mathcal{S}_{odd}(\mathcal{P})$ = все нечётно-мерные симплексы.

Симплекс называется **вырожденным** если множество $\{P_i\}$ вырождено. Для симплекса $\theta \in \mathcal{S}(\mathcal{P})$ обозначим

$$[\theta] = \{e \in \mathcal{E} :\ e \cap \theta \neq \emptyset\}.$$

Подпространство $\mathcal{M}(\mathcal{P})$, порождённое всеми θ для $\theta \in \mathcal{S}_{odd}(\mathcal{P})$, обозначается через $\mathcal{M}_{odd}(\mathcal{P})$.

1.4. Комбинаторные формулы Амбарцумяна. Ниже (Теоремы 1 и 2) напоминаем две более общие версии комбинаторных формул.

Теорема 1. *(Представление относительно $\mathcal{S}(\mathcal{P})$, см. [1] и [6]). Пусть $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ – конечное множество точек с чётным n, а A – бюффоновое множество относительно $\mathcal{P}$. Тогда функция I_A допускает разложение*

$$I_A \equiv \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\sum_{\mathcal{S}_k(\mathcal{P})} c_A(\theta) I_{[\theta]} \quad (mod \mathcal{B}_0(\mathcal{P})).$$

Это представление не единственно, т.е. существуют разные совокупности коэффициентов, для которых формула выполняется. Следующая Теорема даёт разложение относительно нечётно-мерных симплексов, которое единственно в невырожденном случае.

В случае вырожденного $\mathcal{P}$, совокупности коэффициентов не определяются однозначно. Хотя можно получить некоторые из них, аппроксимируя $\mathcal{P}$ невырожденными множествами, однако этот метод часто не удобен для практических целей.

Теорема 2. *(Разложение относительно $\mathcal{S}_{odd}(\mathcal{P})$, см. [7]). Пусть $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ – конечное невырожденное множество точек, и пусть n чётно, а A – множесто Бюффона относительно $\mathcal{P}$. Тогда сущестует единственная совокупность коэффициентов r_θ, удовлетворяющих условию*

$$I_A \equiv \frac{1}{2}\sum_{\mathcal{S}_{odd}(\mathcal{P})} r_A(\theta) I_{[\theta]} \quad (mod\ \mathcal{B}_0(\mathcal{P})).$$

Нам необходима следующая версия Теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ (n чётно) является конечным невырожденным множеством точек. Для заданной функции $f \in \mathcal{B}(\mathcal{P})/\mathcal{B}_0(\mathcal{P})$ существует единственная функция $F \in \mathcal{M}_{odd}(\mathcal{P})/\mathcal{M}_0$ такая, что $f \equiv F^*$ $(mod\mathcal{B}_0(\mathcal{P}))$.*

Основной результат статьи содержится в Теореме 4. Она справедлива для любой размерности n и любого $\mathcal{P}$ (вырожденного или невырожденного). Коэффициенты вместе с алгоритмом для их вычисления заменяются на явную коэффициентную функцию. Имеет место также единственность комбинаторного разложения.

Теорема 4. *(Обобщённая формула Амбарцумяна) Пусть n – целое число, а $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ – конечное множество точек. Определим $\overline{\mathcal{M}_{odd}(\mathcal{P})}$ как подмножество $\mathcal{M}(\mathcal{P})$, порождённое всеми функциями типа*

$$\theta - \frac{1}{2}\partial\theta, \quad \theta \in \mathcal{S}_{odd}(\mathcal{P}), \quad \theta \text{ вырождено},$$

где $\partial\theta$ – граница θ, взятая в аффинной оболочке θ. Тогда для заданной функции $f \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$ существует единственная функция $F \in \overline{\mathcal{M}_{odd}(\mathcal{P})}/\mathcal{M}_0$ такая, что $f \equiv F^*$ $(mod\mathcal{B}_0(\mathcal{P}))$. Функция F определяется формулой

$$F = (-1)^{n+1}\Delta_\chi\left((\overline{f})^*\right)$$

(см. §2 и §3 ниже).

Функция F называется **коэффициентной функцией для** f. Она играет роль коэффициентов r_θ или c_θ.

§2. ОПЕРАТОР Δ_χ

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon \geq 0$. Пусть $B_\varepsilon(x)$ – открытый ε-шар с центром в точке x. Определим гомоморфизм

$$\Delta_\chi : \mathcal{M} \longmapsto \mathcal{M}, \quad \Delta_\chi F(x) = \frac{1}{2}F(x) - \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B_\varepsilon(x)} F(t)\, d\chi(t).$$

Так как $\Delta_\chi(\mathcal{M}_0) = 0$, гомоморфизм Δ_χ индуцирует гомоморфизм

$$\Delta_\chi : \mathcal{M}/\mathcal{M}_0 \longmapsto \mathcal{M}/\mathcal{M}_0$$

(для простоты используется тот же знак).

Пример. Пусть $K \in \mathcal{P}$, $dim\ K \neq 0$. Тогда

$$\Delta_\chi K = \begin{cases} K - 1/2\,\partial K, & \text{если } dim\ K \text{ чётно},\\ 1/2\,\partial K, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Предложение.

1. *Из $F \in \mathcal{M}(\mathcal{P})$ вытекает $F^* \equiv (\Delta_\chi F)^*$ $(mod\mathcal{B}_0(\mathcal{P}))$,*
2. $\Delta_\chi^2 = \Delta_\chi$,
3. $\Delta_\chi(\mathcal{M}(\mathcal{P})) = \overline{\mathcal{M}_{odd}(\mathcal{P})}$,
4. *Из $F, G \in \mathcal{M}(\mathcal{P})$ и $F^* \equiv G^*$ $(mod\mathcal{B}_0(\mathcal{P}))$ вытекает $\Delta_\chi F = \Delta_\chi G$.*

Доказательство. 1 и 2 следуют из Примера. Из утверждения 2 вытекает, что $\Delta_\chi \overline{\mathcal{M}_{odd}(\mathcal{P})} = \overline{\mathcal{M}_{odd}(\mathcal{P})}$. С другой стороны, для каждого $F \in \mathcal{M}$ имеем $\Delta_\chi F \in \overline{\mathcal{M}_{odd}(\mathcal{P})}$ (достаточно проверить это для политопа K с вершинами в $\mathcal{P}$). Доказательство пункта 4 практически повторяет доказательство Теоремы 4.4 из [7]. Оно основано на следующей лемме.

Лемма 1 (см. [7]). *Если $\mathcal{P}$ вырождено, то $card\ \mathcal{A}(\mathcal{P}) = card\ \mathcal{S}_{odd}(\mathcal{P})$.*

Из Леммы 1 вытекает, что утверждение 4 выполняется для невырожденных случаев. Действительно, имеем

$$dim\ \mathcal{B}(\mathcal{P})/\mathcal{B}_0(\mathcal{P}) = card\ \mathcal{A}(\mathcal{P}) = card\ \mathcal{S}_{odd}(\mathcal{P}) = dim\ \overline{\mathcal{M}_{odd}(\mathcal{P})}.$$

Рассмотрим вырожденное множество $\mathcal{P}$ и аппроксимирующее невырожденное множество $\mathcal{P}'$. Для конечного множества X обозначим через $\mathbb{R}[X]$ пространство формальных сумм

$$\sum_{x \in X} a_x x, \quad \text{где} \quad a_x \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим внутренние отображения :

инъекция $\alpha : \mathcal{A}(\mathcal{P}) \longmapsto \mathcal{A}(\mathcal{P}')$,

изоморфизмы $\sigma : \mathbb{R}[\mathcal{A}(\mathcal{P})] \longmapsto \mathcal{B}/\mathcal{B}_0(\mathcal{P})$ и $\sigma' : \mathbb{R}[\mathcal{A}(\mathcal{P}')] \longmapsto \mathcal{B}/\mathcal{B}_0(\mathcal{P}')$,

изоморфизм $\rho' : \mathbb{R}[\mathcal{S}_{odd}(\mathcal{P}')] \longmapsto \overline{\mathcal{M}_{odd}(\mathcal{P}')}$,

эпиморфизм $\rho : \mathbb{R}[\mathcal{S}_{odd}(\mathcal{P})] \longmapsto \overline{\mathcal{M}_{odd}(\mathcal{P})}$,

изоморфизм $\lambda' : \mathcal{B}/\mathcal{B}_0(\mathcal{P}') \longmapsto \mathbb{R}[\mathcal{S}_{odd}(\mathcal{P}')]$,

изоморфизм $\pi : \mathbb{R}[\mathcal{S}_{odd}(\mathcal{P}')] \longmapsto \mathbb{R}[\mathcal{S}_{odd}(\mathcal{P})]$.

Имеем следующую цепочку гомоморфизмов. Первые три являются изоморфизмами.

$$\mathbb{R}[\mathcal{A}(\mathcal{P}')] \overset{\sigma'}{\longmapsto} \mathcal{B}(\mathcal{P}')/\mathcal{B}_0(\mathcal{P}') \overset{\lambda'}{\longmapsto} \mathbb{R}[\mathcal{S}_{odd}(\mathcal{P}')] \overset{\pi}{\longmapsto} \mathbb{R}[\mathcal{S}_{odd}(\mathcal{P})] \overset{\rho}{\longmapsto} \overline{\mathcal{M}_{odd}(\mathcal{P})}.$$

Рассмотрим множесто $\mathcal{A}^+ = \mathcal{A}(\mathcal{P}') \setminus \alpha\mathcal{A}(\mathcal{P})$. Из существования изоморфизмов σ и σ' следует, что $card\ \mathcal{A}^+ = dim\ \mathcal{B}(\mathcal{P}')/\mathcal{B}_0(\mathcal{P}') - dim\ \mathcal{B}(\mathcal{P})/\mathcal{B}_0(\mathcal{P})$. С другой стороны, элементы $\{\pi \circ \lambda' \circ \sigma'(a)\}_{a \in \mathcal{A}^+}$ линейно независимы в $\mathbb{R}[\mathcal{S}_{odd}(\mathcal{P})]$ и принадлежат $ker\ \rho$. Таким образом, $card\ \mathcal{A}(\mathcal{P}') - card\ \mathcal{A}(\mathcal{P}) = card\ \mathcal{A}^+ \le dim\ ker\ \rho$. Поэтому $card\ \mathcal{A}(\mathcal{P}) \ge card\ \mathcal{A}(\mathcal{P}') - dim\ ker\ \rho = dim\ \mathbb{R}[\mathcal{S}_{odd}(\mathcal{P})] - dim\ ker\ \rho = dim\ \overline{\mathcal{M}_{odd}(\mathcal{P})}$, откуда следует, что $dim\ \overline{\mathcal{M}_{odd}(\mathcal{P})} \le card\ \mathcal{A}(\mathcal{P})$. Таким образом, имеем $dim\ ker\ \Delta_\chi \ge dim\ ker(*)$. (Как и выше, $*$ означает преобразование Радона $* : \mathcal{M}(\mathcal{P})/\mathcal{M}_0 \longmapsto \mathcal{B}(\mathcal{P})/\mathcal{B}_0(\mathcal{P})$.) Поскольку $ker\ \Delta_\chi \subset ker(*)$, имеем $dim\ ker\ \Delta_\chi \ge dim\ ker\ (*)$, и, следовательно, $ker\ \Delta_\chi = ker(*)$, что и завершает доказательство пункта 4. Предложение доказано.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4

Начнём с леммы, которая легко следует из обратной формулы преобразования Радона (см. [4], [8]).

Лемма 2. *Предположим, что $f \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$. Тогда следующие два условия эквивалентны :*

1. *Существует функция $F \in \mathcal{M}(\mathcal{P})$ такая, что $F^* = f$.*
2. *Значение интеграла*

$$\int_{e\|e_0} f(e)\, d\chi(e)$$

не зависит от гиперплоскости e_0, а f обращается в нуль на гиперплоскостях, достаточно удалённых от O.

Пусть $f \in \mathcal{B}P/\mathcal{B}_0(\mathcal{P})$. Определим функцию $\bar{f}$ следующим образом. Если $e \cap \mathcal{P} = \emptyset$, то множество $\bar{f}(e) = f(e)$. Допустим, что $e \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$. Рассмотрим две гиперплоскости e^+ и e^-, параллельные e, близкие к e и лежащие по разные стороны от e. Тогда получаем $\bar{f}(e) = 1/2\,(f(e^+) + f(e^-))$. Очевидно, имеем $f \equiv \bar{f}$ $(mod\ \mathcal{B}_0(\mathcal{P}))$. Легко проверить, что функция $\bar{f}$ удовлетворяет условию 2 Леммы 2. Следовательно, существует функция $F \in \mathcal{M}(\mathcal{P})$ такая, что $F^* = f$.

Теперь очень просто доказать Теорему 4. Пусть $f \in \mathcal{B}(\mathcal{P})/\mathcal{B}_0(\mathcal{P})$. Положим $F = \Delta_\chi((\bar{f})^*)$. Имеем $((-1)^n \Delta_\chi[(\bar{f})^*])^* = ((-1)^n (\bar{f})^*)^* = \bar{f} \equiv f \quad (mod\ \mathcal{B}_0(\mathcal{P}))$. Откуда имеем $F^* \equiv f$ $(mod\ \mathcal{B}_0(\mathcal{P}))$. Единственность такой функции следует из Предложения 2.2. Теорема 4 доказана.

Abstract. The paper presents a generalized form of Ambartzumian's combinatorial formulae, valid for both degenerate and non-degenerate cases. The formulae can be interpreted as a version of inverse Radon transformation with respect to Euler characteristic.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry, with Applications to Mathematical Stereology, J.Wiley, Chichester, 1982.
2. R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
3. B. Jessen, A. Thorup, "The algebra of polytopes in affine spaces", Math. Scand., vol. 43, pp. 211 – 240, 1978.
4. А. Хованский, А. Пухликов, "Конечно–аддитивные меры виртуальных политопов", Ст. Петербург Мат. Ж., том 4, стр. 337 – 356, 1993.
5. P. McMullen, "The polytope algebra", Adv. Math., vol. 78, no. 1, pp. 76 – 130, 1989.
6. G. Panina, "Many-dimensional combinatorial Ambartzumian's formulae", Math. Nachr., vol. 159, pp. 271 – 277, 1992.

7. Г. Панина, "Политопные функции и равносоставленность в проективном пространстве", Зап. Науч. Семин. ПОМИ, Геометрия и Топология, том 252, № 3, стр. 213 – 223, 1998.
8. O. Ya. Viro, "Some integral calculus based on Euler characteristic", Topology and Geometry – Rokhlin Seminar, Lecture Notes in Math., vol. 1346, pp. 127 – 138, 1988.

Поступила 2 июня 2001