АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА СИСТЕМ ЭКСПОНЕНТ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПРЯМОЙ

А. М. Седлецкий

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 36, № 6, 2001

Получено необходимое условие равномерной минимальности в $L^p(\mathbb{R})$ систем экспонент с быстро убывающим весом. Из полученного условия следует, что все такие известные системы, полные и минимальные в $L^p(\mathbb{R})$, не являются равномерно минимальными, и следовательно, не являются базисами.

1. Система (e_n) элементов банахова пространства B называется :

- a) полной, если $\text{clos}(e_n) = B$,
- b) минимальной, если $d_n = \text{dist}(e_n, \text{clos}(e_k)_{k \neq n}) > 0$, для всех n ,
- c) равномерно минимальной, если для всех n имеем $d_n \geq \delta \|e_n\|$, где $\delta > 0$ не зависит от n ,
- d) базисом пространства B , если для любого элемента $x \in B$ существует единственный ряд по системе (e_n) , сходящийся к x (в B) : $x = \sum c_n e_n$ (c_n скаляры).

Если система образует базис пространства B , то она полна, минимальна и равномерно минимальна.

2. Мы будем рассматривать аппроксимационные свойства систем экспонент с быстро убывающим весом, т.е. систем вида

$$e^{-i\lambda_n t} \exp(-a|t|^\alpha), \quad \lambda_n \in \Lambda; \quad \alpha > 1, \quad a > 0 \quad (1)$$

в L^p -пространствах на вещественной прямой.

В статьях Р. Залика [1], Б. Факсена [2], А. М. Седлецкого [3] были получены различные условия полноты систем (1) в $L^2 = L^2(\mathbb{R})$, в основном для вещественных λ_n . В первую очередь это связано с известной теоремой Винера о плотности в

L^2 линейных комбинаций сдвигов $f(t + \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ функции $f \in L^2$. Эквивалентная формулировка этой теоремы (для $g = \widehat{f}$) состоит в том, что линейные комбинации взвешенных экспонент

$$e^{-i\lambda t} g(t), \quad g \in L^2, \quad (2)$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ плотны в L^2 тогда и только тогда, когда $g \neq 0$ почти всюду. Мы приходим к задаче описания последовательностей $\Lambda = (\lambda_n)$, $\lambda_n \rightarrow \infty$ таких, что системы (2) с $\lambda \in \Lambda$ дают подходящий аппарат аппроксимации в L^2 . К настоящему времени теория наиболее развита для веса $g(t) = \exp(-a|t|^\alpha)$, $\alpha > 1$, $a > 0$, т.е. для систем (1).

3. Все полные системы (1) в L^2 из упомянутых выше статей не являются минимальными. Впервые полную и одновременно минимальную систему (1) в L^2 с $\alpha = 2$ построили Р. Залик и Т. Абуабара Саад [4], доказавшие следующий результат. Пусть

$$\Lambda = \bigcup_{k=0}^3 \left(2\sqrt{\pi n} \cdot \exp\left(i\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right)\right) \right)_{n=1}^{\infty} \cup \{\lambda_1\} \cup \{\lambda_2\}, \quad (3)$$

где $\lambda_1 \neq \lambda_2$ не принадлежат предыдущему множеству в (3). Тогда система

$$e^{-i\lambda_n t} \exp(-t^2/2), \quad \lambda_n \in \Lambda \quad (4)$$

полна и минимальна в L^2 .

Для доказательства полноты авторы применили оригинальный приём, однако условие $\alpha = 2$ для него является существенным.

Т. А. Сальникова [5] рассмотрела более общие последовательности

$$\Lambda = \bigcup_{k=0}^3 \left(2\sqrt{\pi(n+h)} \cdot \exp\left(i\left(\gamma + k\frac{\pi}{2}\right)\right) \right)_{n=1}^{\infty} \cup \{\lambda_1\} \cup \{\lambda_2\}, \quad h > -1, \quad \gamma \in [0, \pi/2) \quad (5)$$

(возмущения и все вращения последовательности (3)) и доказала, что при $\alpha = 2$ система (4), (5) полна и минимальна в L^2 тогда и только тогда, когда $-1/8 < h \leq 1/8$.

Таким образом, предыдущий результат оказался значительно расширенным, но его доказательство использует упомянутый приём из [4] и поэтому проходит только для $\alpha = 2$.

4. Заметим, что комплексные последовательности (3) и (5) лежат на четырёх лучах. Существуют ли полные и минимальные системы (1) в L^2 с $\Lambda \subset \mathbb{R}$? Частичный ответ на этот вопрос дан в статье [6]: если β – целое, $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$ или β чётное и $\Lambda \subset \mathbb{R}$, где $1/\alpha + 1/\beta = 1$, то система (1) не может быть полной и минимальной (одновременно) в $L^p = L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$.

5. Случай $\alpha \neq 2$ является более трудным. Заметим, что последовательность (3) образует множество всех нулей целой функции

$$F(z) = e^{-z^2/4} \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{z^2}{4}\right) \frac{(z - l_1)(z - l_2)}{z^2}.$$

Если $\alpha \neq 2$, то в первую очередь мы должны построить класс соответствующих целых функций. Такой класс был построен автором в [7], [8]-с использованием целой функции типа Миттаг-Леффлера порядка ρ :

$$E_\rho(z; \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + n/\rho)}, \quad \rho > 0, \quad \mu \in \mathbb{C}.$$

Введём следующую целую функцию

$$e(z) = \sum_{k=1}^m c_k E_\beta(a_k^{1/\beta} z e^{-i\theta_k^0}; \mu), \quad c_k \neq 0, \quad (6)$$

где m , a_k , θ_k^0 подобраны как и в работах [7], [8]. Пусть

$$F(z) = c((K(\beta; a))^{1/\beta} z), \quad K(\beta; a) = \frac{1}{\beta} (\alpha a)^{-\beta/\alpha}. \quad (7)$$

Будем обозначать $L^\infty = C_0(\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}) : f(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \pm\infty\}$.

Теорема ([7], [8]). Пусть Λ – последовательность всех нулей функции (7). Тогда система (1) полна и минимальна в L^p , $1 \leq p \leq \infty$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{q\alpha} + \frac{1}{2} < \operatorname{Re} \mu \leq \frac{1}{q\alpha} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\beta}, \quad 1 \leq p < \infty \quad (1/p + 1/q = 1),$$

а при $p = 1$ знаки $<$ ($\leq$) заменяются на $\leq$ ($<$).

Замечание. Если точка λ является нулём функции $F(z)$ кратности s , то в системе (1) ей соответствуют s функций

$$t^j e^{-it\lambda} \exp(-a|t|^\alpha), \quad j = \overline{0, s-1}.$$

6. Итак, для всех $\alpha > 1$, $a > 0$ существуют классы полных и минимальных в L^p , $1 \leq p \leq \infty$ систем (1). Следующий этап изучения аппроксимационных свойств систем (1) состоит в исследовании равномерной минимальности этих систем. Введём обозначения: $h_F(\theta)$ – для индикатора целой функции $F(z)$ и $\mathcal{FL}^q$ – для класса целых функций вида

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-izt} \exp(-a|t|^\alpha) f(t) dt, \quad f \in L^q, \quad 1 < q \leq \infty;$$

если $q = 1$, то полагаем $f(t) dt = d\sigma(t)$, $\text{var}\sigma(t) < \infty$.

Теорема 1 (необходимое условие полноты и минимальности системы (1)). Пусть система (1) полна и минимальна в L^p , $1 \leq p \leq \infty$. Тогда существует целая функция $F(z)$ порядка β такая, что

- 1) множество нулей функции $F(z)$ совпадает с Λ ;
- 2) $h_F(\theta) \leq K(\beta; a) |\sin \theta|^\beta$, $\theta \in \mathbb{R}$,

причём каждый отрезок длины π/β содержит хотя бы одну точку, для которой имеет место знак равенства,

- 3) $F(z) \notin \mathcal{FL}^q$, 4) $F(z)/(z - l_0) \in \mathcal{FL}^q$.

При условии нормировки $F(\mu) = 1$, $\mu \notin \Lambda$, функция $F(z)$ единственна.

Определение. Пусть система (1) полна и минимальна в L^p . Тогда функция $F(z)$ из Теоремы 1 называется порождающей функцией системы (1).

Теорема 2 (необходимое условие полноты и равномерной минимальности системы (1)). Пусть система (1) полна и минимальна в L^p , $1 \leq p \leq \infty$, и пусть все точки l_n , за исключением, быть может, конечного числа, просты. Предположим, что порождающая функция $F(z)$ системы (1) имеет вполне регулярный рост. Тогда если система (1) равномерно минимальна, то

$$h_F(\theta) = K(\beta; a) |\sin \theta|^\beta, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi. \quad (8)$$

Теоремы 1 и 2 доказаны в работе автора [9].

Обозначим через $\Delta_\beta(\Lambda)$ плотность последовательности Λ при порядке β , т.е.

$$\Delta_\beta(\Lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n/|\lambda_n|^\beta).$$

Следствие 1. Пусть все точки λ_n , начиная с некоторой, просты и

$$\Lambda = \Lambda_0 \cup \left(\bigcup_{k=1}^m \Lambda_k \right), \quad m \in \mathbb{N}, \quad \Lambda_k = (\lambda_{k^n})_{n=1}^\infty,$$

где $\Delta_\beta(\Lambda_0) = 0$, $\Delta_\beta(\Lambda_k) > 0$ при $k \neq 0$ и Λ_k асимптотически распределена вдоль луча $\arg \theta = \arg z = t_k$, $k \neq 0$, т.е. $\arg \lambda_{k_n} \rightarrow t_k$, $n \rightarrow \infty$. Пусть, кроме того, для целого β существует предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{|\lambda_n| < r} 1/\lambda_n^\beta. \quad (9)$$

Тогда система (1) не может быть полной и равномерно минимальной в L^p , $1 \leq p \leq \infty$.

Доказательство : По теореме Адамара порождающая функция системы (1) имеет вид

$$F(z) = z^s e^{P(z)} \prod_{n=1}^{\infty} G(z/\lambda_n; p), \quad (10)$$

где $P(z)$ – многочлен с $\deg P(z) \leq \beta$, а $\prod$ – каноническое произведение рода $p \leq \beta$. Так как Λ имеет угловую плотность при порядке β , причём в случае целого β существует предел (9), то функция (10) имеет ([10], Глава 2) вполне регулярный рост и, поэтому ([10], Глава 3) внутри углов $t_k < \theta < t_{k+1}$, где Λ имеет нулевую плотность, индикатор $h_F(\theta)$ является β -тригонометрическим, т.е. $h_F(\theta) = a \cos \beta \theta + b \sin \beta \theta$. А это противоречит условию (8) Теоремы 2.

7. Рассмотрим известные системы (1), которые полны и минимальны в L^p . В случае Р. Залика и Т. Абуабары Саад [4] последовательность Λ проста, лежит на четырёх лучах $\arg \theta = \pi/4 + k\pi/2$, $k = \overline{0, 3}$, причём на каждом луче Λ имеет положительную плотность при порядке $\beta = 2$. Существование предела (9) для $\beta = 2$ очевидно. В силу Следствия 1, система (4) не является равномерно минимальной в L^2 .

В случае Т. А. Сальниковой [5] лучи $\arg \theta = \pi/4 + k\pi/2$ заменяются лучами $\arg \theta = \gamma + k\pi/2$. Всё остальное повторяется.

В случае А. М. Седлецкого [7, 8] порождающая функция $F(z)$ системы (1) имеет вид (7). В силу (6), $F(z)$ имеет вполне регулярный рост, а её индикатор есть кусочно β -тригонометрическая функция. Следовательно, условие (8) не выполнено. Все нули функции $F(z)$, кроме возможного конечного числа, просты [9]. По Теореме 2 система (1) не является равномерно минимальной в L^p .

Следствие 2. Упомянутые системы (1) полны и минимальны в L^p , $1 \leq p \leq \infty$, но не равномерно минимальны и, следовательно, не являются базисами.

ABSTRACT. A necessary condition of uniform minimality in $L^p(\mathbb{R})$ for systems of exponentials with rapidly decreasing weights implies that all such systems that are complete and minimal in $L^p(\mathbb{R})$, are not uniformly minimal, and therefore, are not bases.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Zalik, "On the approximation by shifts and a theorem of Wiener", *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 243, pp. 299 — 308, 1978.
2. B. Faxén, "On approximation by translates and related problems in function theory", *Ark. Math.*, vol. 19, pp. 271 — 289, 1981.
3. А. М. Седлецкий, "Аппроксимация сдвигами и полнота взвешенных систем экспонент в $L^2(\mathbb{R})$ ", *Мат. Сборник*, том 123, стр. 92 — 107, 1985.
4. R. Zalik and T. Abuabara Saad, "Some theorems concerning holomorphic Fourier transforms", *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 126, pp. 483 — 493, 1987.
5. Т. А. Сальникова, "Полные и минимальные системы экспонент в лебеговых пространствах на вещественной оси", *Кандидатская диссертация*, Российский унив. дружбы народов, Москва, 1995.
6. А. М. Седлецкий, "Аппроксимативные свойства систем экспонент в $L^p(a, b)$ ", *Дифференц. Уравнения*, том 31, стр. 1675 — 1681, 1995.
7. А. М. Седлецкий, "Аппроксимативные свойства систем экспонент на прямой и полупрямой", *Мат. Сборник*, том 189, № 3, стр. 125 — 140, 1998.
8. А. М. Седлецкий, "Approximation by exponentials on the line and the half-line", *Anal. Math.*, vol. 28, no. 2, 2002.
9. А. М. Седлецкий, "Необходимое условие равномерной минимальности систем экспонент в L^p -пространствах на прямой", *Мат. Сборник*, том 192, № 11, стр. 137 — 156, 2001.
10. Б. Я. Левин, "Распределения нулей целых функций", *ГИТТЛ*, Москва, 1956.

18 сентября 2001

Московский государственный университет
E-mail : sedlet@mail.ru