РАСХОДИМОСТЬ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ–ХААРА ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССА ОРЛИЧА

Г. Лепсверидзе

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 36, № 6, 2001

В статье рассматривается вопрос расходимости двойных рядов Фурье–Хаара функций из класса Орлича $L\varphi(L)$. Получены точные оценки сверху роста прямоугольных частичных сумм этих рядов.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\chi = \{\chi_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\chi_0^{(0)} \bigcup \cup_{m=0}^{\infty} \cup_{i=1}^{2^m} \chi_m^{(i)}(x)\}$, $x \in [0,1]$ – ортонормированная на $[0,1]$ система Хаара (см. [1], стр. 54). Для функции $f \in L([0,1]^n)$, $(n \geq 2)$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=1}^{\infty} c_{k_1\ldots k_n} \prod_{i=1}^{n} \chi_{k_i}(x_i),$$

где

$$c_{k_1\ldots k_n} = \int_{[0,1]^n} f(y_1,\ldots,y_n) \prod_{i=1}^{n} \chi_{k_i}(y_i)\, dy_1 \ldots dy_n$$

называется кратным рядом Фурье–Хаара функции f в точке $x = (x_1,\ldots,x_n) \in [0,1]^n$. Через $S_{m_1,\ldots,m_n}(f,x)$ обозначим прямоугольные частичные суммы этого ряда в точке $x \in [0,1]^n$:

$$S_{m_1,\ldots,m_n}(f,x) = \sum_{k_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{m_n} c_{k_1\ldots k_n} \prod_{i=1}^{n} \chi_{k_i}(x_i).$$

Известно [2], что кратный ряд Фурье–Хаара функции $f \in L(\ln^+ L)^{n-1}([0,1]^n)$ сходится к функции f почти всюду на $[0,1]^n$ по прямоугольникам, т.е. в смысле Принсгейма. Этот результат окончательный [3], в том смысле, что в любом классе Орлича $L\varphi(L)[0,1]^n$, более широком, чем $L(\ln^+ L)^{n-1}([0,1]^n)$, существует такая функция f, что соотношение

$$\overline{\lim}_{\substack{\min(m_i)\to\infty \\ 1\leq i\leq n}} S_{m_1,\ldots,m_n}(f,x) = +\infty$$

выполняется почти всюду на $[0,1]^n$. Пусть $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ – некоторая система натуральных чисел и пусть $\{m_1^*, m_2^*, \dots, m_n^*\}$ – такая перестановка этих чисел, что $m_1^* \geq m_2^* \dots \geq m_n^*$.

Г. А. Карагулян [4] получил принципиально новые результаты, касающиеся вопросов сходимости кратных рядов Фурье–Хаара. В частности, он установил, что для $f \in L([0,1]^n)$ имеем

$$S_{m_1 \dots m_n}(f,x) = o\left(\prod_{i=2}^{n} \sigma(m_i^*)\right) \quad \text{почти всюду}$$

при $m_n^* \to \infty$, где $\sigma(t) : (1, +\infty) \to [0, +\infty)$ такая возрастающая функция, что

$$\int_0^1 \frac{dt}{t\sigma(1/t)} < \infty.$$

Примерами таких функций могут служить следующие :

$$\sigma(t) = \ln t \ln\ln(t) \dots (\ln\ln \dots \ln t)^p, \quad p > 1.$$

В работе [5] получены оценки сверху на порядок роста прямоугольных частичных сумм кратных рядов Фурье–Хаара для функций из классов Орлича.

Будем говорить, что неотрицательная функция $M(t)$, $t \geq 1$ удовлетворяет Δ_2–условию, если существуют постоянные κ, $t_0 \geq 1$ такие, что

$$M(2t) \leq \kappa M(t) \quad \text{при} \quad t \geq t_0. \qquad (\Delta_2)$$

Ниже через

$$\varphi : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$$

будем обозначать строго возрастающую, непрерывно дифференцируемую функцию такую, что $\varphi(1) = 0$, причём $\varphi(e^t)$ выпукла и $\varphi(t) \uparrow \infty$ при $t \uparrow \infty$. Положим

$$\varphi^+(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{если} \quad t > 1, \\ 0, & \text{если} \quad 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

В работе [5] доказано, что если $u : [1, +\infty[\to]0, +\infty[$ возрастающая к бесконечности функция, удовлетворяющая Δ_2–условию и

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u(2^k)} = O(\varphi(e^n)),$$

то для любой функции $f \in L\varphi(L)([0,1]^2)$ соотношение

$$S_{m_1, m_2}(f,x) = o(u(m_2^*))$$

выполняется почти всюду при $m_2^* \to \infty$.

Примерами функций $\varphi^+(t)$ могут служить, например, следующие функции $\ln^+(t)$, $\ln^+(\ln^+(t)+1) \approx \ln(\ln(t))$, $(\ln^+(t)+1)^\beta - 1 \approx (\ln^+ t)^\beta$, $0 < \beta < 1$, $t \uparrow \infty$.

Основными результатами работы являются следующие две теоремы.

Теорема 1. Имеют место следующие утверждения :

(A) Для любой функции $f \in L([0,1]^2)$ и любого $\lambda > 0$

$$\left\{x \in [0,1]^2 : \quad \sup_{m_1\, m_2 \in \mathbb{N}} \frac{S_{m_1 m_2}(|f|, x)}{\ln(2m_1^*)} > \lambda\right\} < c \int \frac{|f|}{\lambda},$$

где c – абсолютная постоянная, причём

$$S_{m_1 m_2}(f, x) = o(\ln(m_1^*)) \quad \text{при} \quad m_2^* \to \infty.$$

(B) Пусть $v : [1, +\infty[\to]0, +\infty[$ – возрастающая к бесконечности функция, удовлетворяющая Δ_2–условию и $v(t) = o(\ln(t))$ при $t \to \infty$. Тогда существует неотрицательная функция $f \in L([0,1]^2)$ такая, что соотношение

$$\overline{\lim}_{m_2^* \to \infty} \frac{S_{m_1, m_2}(f, x)}{v(m_1^*)} = +\infty$$

выполняется почти всюду на $[0,1]^2$ при $m_2^* \to \infty$.

Теорема 2. Имеют место следующие утверждения :

(A) Для любой функции $f \in L\varphi(L)([0,1]^2)$ и любого $\lambda > 0$

$$\left\{x \in [0,1]^2 : \quad \sup_{m_1 m_2 \in \mathbb{N}} \frac{\varphi(2m_1^*)}{\ln(2m_1^*)} S_{m_1 m_2}(|f|, x) > \lambda\right\} < c \int \frac{|f|}{\lambda}\Big(1 + \varphi^+\Big(\frac{|f|}{\lambda}\Big)\Big),$$

где c зависит только от φ. Более того, если $\varphi(t) = o(\ln t)$, $t \uparrow \infty$, то при почти всех $x \in [0,1]^2$ имеем

$$S_{m_1 m_2}(f, x) = o\Big(\frac{\ln(m_1^*)}{\varphi(m_1^*)}\Big) \quad \text{при} \quad m_2^* \to \infty.$$

(B) Пусть $\phi(t) : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ – возрастающая функция такая, что $\phi(t) = o(\ln t)$, $t \to \infty$ и $\nu : [1, +\infty[\to]0, +\infty[$ – возрастающая к бесконечности функция, удовлетворяющая Δ_2–условию, причём $\nu(t) = o(\ln(t)/\phi(t))$, $t \to \infty$. Тогда существует неотрицательная функция $f \in L\phi(L)([0,1]^2)$ такая, что соотношение

$$\overline{\sup}_{m_1^* \to \infty} \frac{S_{m_1 m_2}(f, x)}{\nu(m_1^*)} = +\infty$$

выполняется почти всюду на $[0,1]^2$ при $m_2^* \to \infty$.

Полученные оценки для порядка роста частичных сумм $S_{m_1 m_2}(f, x)$ в некотором смысле окончательные.

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Через G обозначим множество всех двоично-иррациональных точек из $[0,1]^2$. Для $x \in G$ через $D(x)$ обозначим семейство, содержащих точку x, всех двумерных двоичных интервалов I вида

$$I = \left(\frac{k_1-1}{2^{m_1}}, \frac{k_1}{2^{m_1}}\right) \times \left(\frac{k_2-1}{2^{m_2}}, \frac{k_2}{2^{m_2}}\right), \quad 1 \le k_i \le 2^{m_i}, \quad k_i, m_i \in \mathbb{N}, \quad i = \overline{1,2}.$$

Положим $D = \bigcup\limits_{x \in G} D(x)$. Через $\delta(E)$ будем обозначать диаметр ограниченного множества E. Для интервала $I = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ через $m(I)$ обозначим её меньшую сторону :

$$m(I) = \min_{i=1,2} \{b_i - a_i\}.$$

Доказательства Теорем 1 и 2 опираются на следующие леммы.

Лемма 1. **Пусть $\mathcal{I} = \{I_k\}_{k=1}^m$ – система двоичных интервалов из D таких, что $I_k \subset I_l$ не выполняется ни для какой пары $I_k, I_l \in \mathcal{I}$. Тогда для любого $y \in \cup_{k=1}^m I_k$ имеем**

$$\sum_{k=1}^m \frac{\chi_{I_k}(y)}{\ln(2/m(I_k))} \le 4$$

и

$$\sum_{k=1}^m \frac{\varphi(2/m(I_k))}{\ln(2/m(I_k))} \chi_{I_k}(y) \le 4\,\varphi(e^{\sum_{k=1}^m \chi_{I_k}(y)}).$$

Лемма 2. **Пусть $f \in L([0,1]^2)$. Тогда**

$$\sup_{m_1 m_2 \in \mathbb{N}} \frac{\varphi(2m_1^*)}{\ln(2m_1^*)} S_{m_1 m_2}(|f|, x) \le 2 \sup_{I \in D(x)} \frac{\varphi(2/m(I))}{|I| \ln(2/m(I))} \int_I |f| \quad \text{для всех} \quad x \in G$$

и

$$\varlimsup_{m_1^* \to \infty} \frac{S_{m_1 m_2}(|f|, x)}{\nu(m_1^*)} \ge \frac{1}{\kappa} \varlimsup_{\substack{\delta(I) \to 0 \\ I \in D(x)}} \frac{1}{|I|\, \nu(1/m(I))} \int_I |f| \quad \text{для всех} \quad x \in G,$$

где κ – постоянная из условия Δ_2.

Лемма 3. **Пусть $\gamma, r \in \mathbb{N}$, $\gamma > r$ и $H(\gamma, r) = \cup_{i=0}^{\gamma-r} I(i)$, где**

$$I(i) = \left[0, \frac{1}{2^r\, 2^i}\right] \times \left[0, \frac{2^i}{2^\gamma}\right].$$

Тогда

$$|H(\gamma, r)| = \frac{2^{\gamma-r-1}(\gamma - r)}{2^{2\gamma}}.$$

Интервалы $I(i)$ будем называть составляющими интервалами множества $H(\gamma, r)$. Для произвольного n-мерного интервала I и числа $\alpha > 1$ через $\alpha \cdot I$ обозначим интервал с тем же центром симметрии что и I, а рёбрами в α-раз длиннее. Доказательство нижеследующей леммы можно найти в [3].

Лемма 4. Для любого семейства $\{I_{\tau\in A}\}$ n–мерных интервалов в $\mathbb{R}^n$ и $\alpha \geq 1$ имеем

$$\left|\cup_{\tau\in A}\,\alpha I_\tau\right| \leq \alpha^n \left|\cup_{\tau\in A} I_\tau\right|.$$

Доказательство Леммы 1 : Докажем второе неравенство (первое доказывается аналогично). Обозначим через $\mathcal{I}^1$ подсистему интервалов $I \in \mathcal{I}$, для которых $|(I)^2| \geq |(I)^1|$, и пусть $\mathcal{I}^2 = \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}^1$. Не умаляя общности будем считать, что $\mathcal{I}^1$ и $\mathcal{I}^2$ непусты. Пусть $\{I^1_{t_1}, \ldots, I^1_{t_{l_1}}\}$, $(1 \leq l_1 \leq m)$ – те интервалы из $\mathcal{I}^1$, для которых

$$\prod_{i=1}^{l_1} \chi_{I^1_{t_i}}(y) = 1.$$

Аналогично, пусть $\{I^2_{t_1}, \ldots, I^2_{t_{l_2}}\}$ – те интервалы из $\mathcal{I}^2$, для которых

$$\prod_{i=1}^{l_2} \chi_{I^2_{t_i}}(y) = 1.$$

Допустим, что $\{k_1, \ldots, k_{l_1}\}$ такая перестановка набора $\{t_1, \ldots, t_{l_1}\}$, что

$$|(I_{k_1})^2| \geq \ldots \geq |(I_{k_{l_1}})^2|.$$

Пользуясь структурой двоичных интервалов и вышеуказанным свойством интервалов $\mathcal{I}$ получим, что при $k_1 \geq 2$

$$|(I^1_{k_1})^2| > \ldots > |(I^1_{k_{l_1}})^2| \quad \text{и} \quad |(I^1_{k_1})^1| < \ldots < |(I^1_{k_{l_1}})^1|.$$

Следовательно, $|(I_{k_1})^1| \leq 2^{-l_1+1}$, и так как $I^1_{k_i} \in \mathcal{I}_1$, то тем более $|(I_{k_1})^2| \leq 2^{-l_1+1}$. Имеем

$$\max_{1\leq i\leq l_1} \{m(I^1_{k_i})\} = \max_{1\leq i\leq l_1} \{|(I_{k_i})^2|\} \leq |(I^1_{k_1})^2| \leq 2^{-l_1+1}.$$

Аналогично получим, что

$$\max_{1\leq i\leq l_2} \{m(I^2_{k_i})\} \leq 2^{-l_2+1}.$$

Так как $\varphi(e^t)$ выпукла вверх и $\varphi(1) = 0$, то функция $\varphi(e^t)/t$ не возрастает при $t > 0$ (см. [6], стр. 68). Следовательно, при $t > 1$ не возрастает также и функция $\varphi(t)/\ln(t)$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\varphi(2/m(I_k))}{\ln(2/m(I_k))} \chi_{I_k}(y) = \sum_{I\in\mathcal{I}^1} + \sum_{I\in\mathcal{I}^2} = \sum_{i=1}^{l_1} \frac{\varphi(2/m(I^1_{k_i}))}{\ln(2/m(I^1 k_i))} \chi_{I^1_{k_i}}(y) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{l_2} \frac{\varphi(2/m(I^2_{k_i}))}{\ln(2/m(I^2 k_i))} \chi_{I^2_{k_i}}(y) \leq \frac{l_1\,\varphi(2^{l_1})}{\ln(2^{l_1})} + \frac{l_2\,\varphi(2^{l_2})}{\ln(2^{l_1})} \leq \frac{l_1\,\varphi(2^{l_1})}{\log_4(2^{l_1})} + \frac{l_2\,\varphi(2^{l_2})}{\log_4(2^{l_1})} \leq$$

$$\leq 2\varphi(2^{l_1}) + 2\varphi(2^{l_2}) \leq 4\varphi(2^{\sum_{k=1}^{m} \chi_{I_k}(y)}) < 4\varphi\left(c^{\sum_{k=1}^{m} \chi_{I_k}(y)}\right).$$

Лемма 1 доказана.

Доказательство Леммы 2 : Как показано в [1], стр. 57, для любой пары (m_1, m_2) натуральных чисел таких, что $m_i = 2^{s_i} + j_i$, $1 \le j_i \le 2^{s_i}$, $s_i \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1,2}$ имеем

$$S_{m_1 m_2}(|f|; x) = \frac{1}{|I|} \int_I |f|,$$

где $I \in D(x)$ и $(I)^i$, $i = 1, 2$ суть интервалы вида $(q_i\, 2^{-s_i}, (q_i + 1)\, 2^{-s_i})$ или же вида $(q_i\, 2^{-s_i-1}, (q_i + 1)\, 2^{-s_i-1})$.

Без ограничения общности предположим, что $m_1^* = m_1$. Тогда $s_1 \ge s_2$ и, следовательно, $2^{-(s_1+1)} \le m(I) \le 2^{-s_1}$. Имеем

$$\frac{1}{2} m_1^* = \frac{1}{2} m_1 \le \frac{1}{2} 2 \cdot 2^{s_1} \le 2^{s_1} \le \frac{1}{m(I)} \le 2^{s_1+1} \le 2\, 2^{s_1} \le 2\, m_1^*.$$

Так как при $t > 1$ функция $\varphi(t)/\ln(t)$ не возрастает, то

$$\frac{\varphi(2/m(I))}{\ln(2/m(I))} \ge \frac{\varphi(4m_1^*)}{\ln(2(2m_1^*))} \ge \frac{\varphi(2m_1^*)}{\ln(2(2m_1^*))} \ge \frac{\varphi(2m_1^*)}{2\ln(2m_1^*)}.$$

Следовательно

$$\frac{\varphi(2m_1^*)}{\ln(2m_1^*)} S_{m_1 m_2}(|f|, x) \le 2\, \frac{\varphi(2/m(I))}{|I| \ln(2/m(I))} \int_I |f|,$$

что завершает доказательство первой части Леммы 2. Для доказательства второй части предположим, что $m_2^* \ge 2\, t_0$, где $t_0 > 0$ – положительное число из условия Δ_2. Тогда для соответствующего двоичного интервала I будем иметь $1/m(I) \ge t_0$. Так как $\nu(t)$ возрастает, то из неравенства $\nu(m_1^*) \le \nu(2/m(I)) \le \kappa\, \nu(1/m(I))$ при $m(I) \le 1/t_0$ получаем

$$\frac{S_{m_1 m_2}(|f|, x)}{\nu(m_1^*)} \ge \frac{1}{|I| \nu(2/m(I))} \int_I |f| \ge \frac{1}{\kappa} \frac{1}{|I| \nu(1/m(I))} \int_I |f|.$$

Отсюда непосредственно следует искомое неравенство. Лемма 2 доказана.

Доказательство Леммы 3 : следует прямым вычислением.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Мы докажем Теорему 2 ; Теорему 1 можно доказать аналогично.

Доказательство Теоремы 2 : Положим

$$E(f, \lambda) = \left\{ x \in [0,1]^2 : \sup_{I \in D(x)} \frac{\varphi(2/m(I))}{|I| \ln(2/m(I))} \int_I |f| > \lambda \right\},$$

$$\mathcal{I} = \left\{ I \in D : \frac{\varphi(2/m(I))}{|I| \ln(2/m(I))} \int_I |f| > \lambda \right\}.$$

В силу Леммы 3 для доказательства пункта (A) достаточно показать, что для любого $\lambda > 0$ имеем

$$|E(f,\lambda)| < c \int \frac{|f|}{\lambda}\Big(1+\varphi^+\Big(\frac{|f|}{\lambda}\Big)\Big),$$

где c зависит лишь от φ. Доказательство этого неравенства следует из доказательства Теоремы 2 работы [5], поэтому мы приводим его с минимальными подробностями.

Будем считать, что система $\mathcal{I}$ состоит из конечного числа интервалов таких, что $I_k \subset I_l$ не выполняется ни для какой пары $I_k, I_l \in \mathcal{I}$. В силу результата А. Кордоба и Р. Фефермана [7] о экспоненциальной интегрируемости характеристических функций интервалов (см. также Р. Багби [8]), существует подсистема $\{I_k\}_{k=1}^m \subset \mathcal{I}$ и положительные числа p, q такие, что

$$\int_{\cup_{k=1}^m I_k} e^{q\sum_{k=1}^m \chi_{I_k}(y)}\,dy \le \frac{9}{8}|\cup_{k=1}^m I_k|$$

и

$$|\cup_{I\in\mathcal{I}} I| \le p\,|\cup_{k=1}^m I_k|.$$

Рассмотрим функцию $\psi(t) = \varphi(e^t)$, $t \in [0,+\infty[$. Так как производная $\psi'(t)$ не возрастает (см. [6], стр. 67), то без ограничения общности можно считать, что $\psi'(t) \le 1$, $t \ge 0$. Пользуясь неравенством (см. Лемму 2, [5])

$$l\,t \le e^{\theta\,\psi^{-1}(t)} - 1 + c(\theta)(1+\varphi^+(l)),$$

которое справедливо для любых действительных чисел $l > 0$, $t > 0$, $0 < \theta < 1$ и постоянной $c(\theta)$, зависящей только от θ, получаем $|\bigcup_{k=1}^m I_k| <$

$$< \int_{\cup_{k=1}^m I_k}\Big(\frac{\varphi(1/m(I))}{\ln(2/m(I))}\chi_{I_k}(y)\Big)\frac{|f(y)|}{\lambda} < 4\int_{\cup_{k=1}^m I_k}\varphi(e^{\sum_{k=1}^m \chi_{I_k}(y)})\,\frac{|f(y)|}{\lambda} <$$

$$< 4\Bigg(\int_{\cup_{k=1}^m I_k} e^{q\psi^{-1}(\varphi(e^{\sum_{k=1}^m \chi_{I_k}(y)}))} - |\cup_{k=1}^m I_k| + c(q)\int\frac{|f|}{\lambda}\Big(1+\varphi^+\Big(\frac{|f|}{\lambda}\Big)\Big)\Bigg) \le$$

$$\le 4\Bigg(\int_{\cup_{k=1}^m I_k} e^{q\sum_{k=1}^m \chi_{I_k}(y)} - |\cup_{k=1}^m I_k| + c(q)\int\frac{|f|}{\lambda}\Big(1+\varphi^+\Big(\frac{|f|}{\lambda}\Big)\Big)\Bigg) \le$$

$$\le \frac{1}{2}|\cup_{k=1}^m I_k| + 4\,c(q)\int\frac{|f|}{\lambda}\Big(1+\varphi^+\Big(\frac{|f|}{\lambda}\Big)\Big).$$

Отсюда следует

$$|E(f,\lambda)| = |\cup_{I\in\mathcal{I}} I| \le 2\,p|\cup_{k=1}^m I_k| < c\int\frac{|f|}{\lambda}\Big(1+\varphi^+\Big(\frac{|f|}{\lambda}\Big)\Big),$$

где $c = c(p,q)$ – постоянная. С помощью стандартной техники из полученного неравенства легко можно вывести соответствующее предельное соотношение. Утверждение (A) доказано.

Доказательство утверждения (B) : Разобьём доказательство на несколько этапов.

1. В силу Леммы 2, для доказательства (B) достаточно построить неотрицательную функцию $f \in L\phi(L)([0,1]^2)$, для которой соотношение

$$\overline{\lim}_{\substack{I\in D(x)\\ \delta(I)\to 0}} \frac{1}{|I|\nu(1/m(I))}\int_I f = +\infty$$

выполняется почти всюду на G. Будем считать, что $\nu(t)\uparrow\infty$ при $t\to\infty$ и

$$\nu(t)=\varepsilon(t)\log_2(t)/\phi(t), \quad (\varepsilon(t)\to 0, \quad t\uparrow\infty).$$

Рассмотрим последовательность натуральных чисел $(\gamma_m)_{m=1}^{\infty}$, удовлетворяющую следующему условию :

$$\varepsilon^{1/2}(2^{\gamma_m})<2^{-m},\ 2^{\gamma_m}>\gamma_m\, 2^{\gamma_m/2},\ \sqrt{\frac{\varepsilon^{1/2}(2^{\gamma_{m+1}})\,\gamma_{m+1}}{\phi(2^{\gamma_{m+1}})}}\geq 2^4 2^{\gamma_m},\ m=1,2,\ldots. \quad (1)$$

Предположим, что $(\varepsilon^{1/2}(2^{\gamma_1})\,\gamma_1)/\phi(2^{\gamma_1})\geq 4$ и $\phi(2^{\gamma_1})\geq 1$. Определим натуральные числа r_m по формулам

$$r_m=\left[\log_2\left(\frac{\varepsilon^{1/2}(2^{\gamma_m})\gamma_m}{\phi(2^{\gamma_m})}\right)\right], \quad m=1,2,\ldots$$

и положим

$$Q_m=\left[0,\frac{1}{2^{\gamma_m}}\right]\times\left[0,\frac{1}{2^{\gamma_m}}\right] \quad \text{и} \quad H_m=H(\gamma_m,r_m).$$

Так как $\gamma_m/r_m\to\infty$, то можем считать, что $\gamma_m>r_m$, $m=1,2,\ldots$. С помощью Леммы 3 для $|Q_m|=2^{-2\gamma_m}$ получаем

$$\begin{aligned}
\frac{|H_m|}{2^{\gamma_m}\phi(2^{\gamma_m})|Q_m|}&=\frac{1}{2}\,\frac{(\gamma_m-r_m)2^{\gamma_m-r_m}|Q_m|}{2^{\gamma_m}\phi(2^{\gamma_m})|Q_m|}=\\
&=\frac{1}{2}\frac{\log_2(2^{\gamma_m}/2^{r_m})}{2^{r_m}\phi(2^{\gamma_m})}>\frac{1}{2}\,\frac{\log_2(2^{\gamma_m}\phi(2^{\gamma_m})/\gamma_m)}{2^{r_m}\phi(2^{\gamma_m})}>\\
&>\frac{1}{2}\,\frac{\log_2(2^{\gamma_m}\phi(2^{\gamma_m})/\gamma_m)}{\varepsilon^{1/2}(2^{\gamma_m})\gamma_m}>\frac{1}{2}\,\frac{\log_2(2^{\gamma_m}/2)}{\varepsilon^{1/2}(2^{\gamma_m})\gamma_m}>\frac{1}{4}\,\frac{1}{\varepsilon^{1/2}(2^{\gamma_m})}.
\end{aligned} \quad (2)$$

Для каждого m выберем натуральное число s_m так, что

$$1\leq s_m\,|H_m|<2, \quad m=1,2,\ldots. \quad (3)$$

Очевидно $\sum_{m=1}^{\infty}s_m\,|H_m|=+\infty$, и в силу леммы Кальдерона (см. [9]) существуют последовательность точек $(x_m^k)_{k=1}^{s_m}$, $m=1,2,\ldots$ единичного куба и множество $H\subset[0,1]^n$ полной меры такое, что

$$H=\cap_{p=1}^{\infty}\cup_{m=p}^{\infty}\cup_{k\in T_m}H_m^k,$$

где $H_m^k = H_m + x_m^k$ и $T_m = \{1, 2, \dots, s_m\}$. Рассмотрим интервалы

$$I_m^k(\iota) = I_m(\iota) + x_m^k, \quad Q_m^k = Q_m + x_m^k, \quad k \in T_m, \quad \iota = \overline{0, \gamma_m - r_m}.$$

2. Положим

$$f(x) = \sup_{m \geq 1} \max_{k \in T_m} 2^{\gamma_m} \chi_{Q_m^k}(x), \quad x \in [0,1]^2.$$

Покажем, что функция f принадлежит классу Орлича $L\phi(L)$. Из (2) и (3) получаем

$$\int f\phi(f) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{s_m} 2^{\gamma_m} \phi(2^{\gamma_m}) |Q_m^k| = \sum_{m=1}^{\infty} s_m 2^{\gamma_m} \phi(2^{\gamma_m}) |Q_m| <$$

$$< \sum_{m=1}^{\infty} 4\varepsilon^{1/2}(2^{\gamma_m}) s_m |H_m| < \sum_{m=1}^{\infty} 4\varepsilon^{1/2}(2^{\gamma_m}) < \infty.$$

3. Пусть δ – фиксированное положительное число и $\delta < 1/2$. Рассмотрим квадрат $U(\delta) = [\delta, 1-\delta] \times [\delta, 1-\delta]$. Так как $\delta(H_m^k) \leq 2^{1-r_m}$ и $r_m \uparrow \infty$, то существует натуральное число $M_\delta \in \mathbb{N}$ такое, что $\delta(H_m^k) < \delta/4$ при $m \geq M_\delta$, $k \in T_m$. Положим $T_m(\delta) = \{k : k \in T_m, \ H_m^k \cap U(\delta) \neq \emptyset\}$ при $m \geq M_\delta$. Ясно, что $|H(\delta)| = |U(\delta)|$, где $H(\delta) = \cap_{p=M_\delta}^{\infty} \cup_{m=p}^{\infty} \cup_{k \in T_m(\delta)} H_m^k$.

4. Для каждого составляющего интервала $I_m^k(\iota)$, $m \geq M_\delta$, $k \in T_m(\delta)$, $\iota = \overline{0, \gamma_m - r_m}$ построим другой двоичный интервал $J_m^k(\iota)$, который обладает следующим свойством :

$$\frac{1}{|J_m^k(\iota)|} \int_{J_m^k(\iota)} 2^{\gamma_m} \chi_{Q_m^k}(y)\, dy \geq \frac{2^{r_m}}{4}. \tag{4}$$

Рассмотрим сдвинутый интервал $I_m^k(\iota) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$. Для $k \in T_m(\delta)$ имеем $0 < \frac{3}{4}\delta \leq \delta - \delta(H_m^k) \leq a_i \leq 1 - \delta$. Предположим, что $b_i - a_i = 2^{-s_i}$, $s_i \in \mathbb{N}$, $s_i \geq r_m$ и

$$\frac{d_i - 1}{2^{s_i}} \leq a_i \leq \frac{d_i}{2^{s_i}}, \quad 1 \leq d_i \leq 2^{s_i}, \quad d_i \in \mathbb{N}, \quad i = \overline{1,2}.$$

Так как $b_i \leq a_i + 2^{-s_i} \leq (d_i + 1)/2^{s_i}$, то

$$(a_i, b_i) \subset \left(\frac{d_i - 1}{2^{s_i}}, \frac{d_i}{2^{s_i}}\right) \cup \left(\frac{d_i}{2^{s_i}}, \frac{d_i + 1}{2^{s_i}}\right), \quad i = \overline{1,2}.$$

Заметим, что интервалы, стоящие в правой части, являются двоичными интервалами, т.е. $((d_i - 1)/2^{s_i}, d_i/2^{s_i}) \in D$ и $(d_i/2^{s_i}, (d_i+1)/2^{s_i}) \in D$. Действительно

$$\frac{d_i + 1}{2^{s_i}} = \frac{d_i - 1}{2^{s_i}} + \frac{2}{2^{r_m}} \leq a_i + \frac{\delta}{2} \leq 1 - \delta + \frac{\delta}{2} < 1.$$

Значит $d_i \le 2^{s_i} - 1$, $i = \overline{1,2}$ и, очевидно, интервал $(d_i/2^{s_i}, d_i/(2^{s_i}+1))$ является двоичным.

Рассмотрим четыре двоичных интервала :

$$I_\eta = \left(\frac{d_1 - \sigma_1}{2^{s_1}}, \frac{d_1 + 1 - \sigma_1}{2^{s_1}}\right) \times \left(\frac{d_2 - \eta_2}{2^{s_2}}, \frac{d_2 + 1 - \eta_2}{2^{s_2}}\right), \quad \eta = \overline{1,4},$$

где σ_i принимает значения 0 или 1. Ясно, что $I_m^k(\iota) \subset \cup_{\eta=1}^4 I_\eta$. Так как функция f неотрицательна, то

$$\frac{1}{|I_m^k(\iota)|}\int_{\cup_{\eta=1}^4 I_\eta} f(y)\,dy \ge \frac{1}{|I_m^k(\iota)|}\int_{I_m^k(\iota)} 2^{\gamma_m}\chi_{Q_m^k}(y)\,dy =$$
$$= \frac{|I_m^k(\iota)|^{-1}}{2^{\gamma_m}} = \frac{2^{r_m}\,2^{\gamma_m}}{2^{\gamma_m}} = 2^{r_m}.$$

Отсюда следует, что для некоторого интервала $I_{\eta'}$, $1 \le \eta' \le 4$ имеем

$$\frac{1}{|I_m^k(\iota)|}\int_{I_{\eta'}} f(y)\,dy \ge \frac{2^{r_m}}{4}.$$

Интервал, удовлетворяющий этому условию обозначим через $J_m^k(\iota)$. Заметим, что его мера совпадает с мерой интервала $I_m^k(\iota)$, т.е. равна $2^{-s_1} \times 2^{-s_2}$. Следовательно

$$|I_m^k(\iota)| = |J_m^k(\iota)|, \quad m(I_m^k(\iota)) = m(J_m^k(\iota)). \tag{5}$$

5. Рассмотрим множества $h_m^k = \cup_{\iota=0}^{\gamma_m - r_m} J_m^k(\iota)$, $m > M_\delta$, $k \in T_m(\delta)$ и покажем, что $|h(\delta)| = |H(\delta)|$, где $h(\delta) = \cap_{p=M_\delta}^\infty \cup_{m=p}^\infty \cup_{k\in T_m(\delta)} h_m^k$. Вместе с каждым составляющим интервалом $J_m^k(\iota)$ множества h_m^k рассмотрим интервал $J_m^{*k}(\iota)$, имеющий тот же центр симметрии, но в два раза меньшие рёбра чем $J_m^k(\iota)$. Заметим, что

$$I_m^k(\iota) \subset 6 \cdot J_m^{*k}(\iota), \quad m > M_\delta, \quad k \in T_m(\delta), \quad \iota = \overline{0, \gamma_m - r_m}. \tag{6}$$

Рассмотрим множества

$$h_m^{*k} = \cup_{\iota=0}^{\gamma_m - r_m} J_m^{*k}(\iota), \quad m > M_\delta, \quad k \in T_m(\delta).$$

а также множества $T_{m_0}^m(\delta)$, где $m \ge m_0 \ge M_\delta$ суть натуральные : $T_{m_0}^{m_0}(\delta) = T_{m_0}(\delta)$, а при $m > m_0$

$$T_{m_0}^m(\delta) = \{k \in T_m(\delta) : h_m^{*k} \subset [0,1]^2 \setminus \cup_{m'=m_0}^{m-1} \cup_{k' \in T_{m'}(\delta)} h_{m'}^{*k'}\}.$$

Ясно, что при фиксированном m_0 множества $\sup_{k\in T^m_{m_0}(\delta)} h^{*k}_m$, $m = m_0, m_0+1, \ldots$ взаимно не пересекаются. Так как для любого m множества h^{*k}_m содержатся в единичном квадрате, получаем

$$\sum_{m=m_0}^{\infty} |\cup_{k\in T^m_{m_0}(\delta)} h^{*k}_m| < 1. \tag{7}$$

Из (6) вытекает $\cup_{k\in T^m_{m_0}(\delta)} H^k_m \subset \cup_{k\in T^m_{m_0}(\delta)} \cup_{\iota=0}^{\gamma_m - r_m} 6\cdot J^{*k}_m(\iota)$. В силу Леммы 3 получаем

$$\sum_{m=m_0}^{\infty} |\cup_{k\in T^m_{m_0}(\delta)} H^k_m| \le 36 \sum_{m=m_0}^{\infty} |\cup_{k\in T^m_{m_0}(\delta)} \cup_{\iota=0}^{\gamma_m - r_m} J^{*k}_m(\iota)| =$$

$$= 36 \sum_{m=m_0}^{\infty} |\cup_{k\in T^m_{m_0}(\delta)} h^{*k}_m| < 36.$$

Следовательно, $|Z(\delta)| = 0$, где $Z = \cup_{m_0=M_\delta}^{\infty} Z_{m_0}(\delta)$ и $Z_{m_0}(\delta) = \cap_{p=m_0}^{\infty} \cup_{m=p}^{\infty} \cup_{k\in T^m_{m_0}(\delta)} H^k_m$. Для того, чтобы показать, что $|h(\delta)| = |U(\delta)|$, достаточно проверить включение $H(\delta)\setminus Z(\delta) \subset h(\delta)$. С этой целью, зафиксируем точку $x \in H(\delta)\setminus Z(\delta)$ и покажем, что для всех $m_0 \in \mathbb{N}$ и $m_0 \ge M_\delta$ имеем $x \in \cup_{m=m_0}^{\infty} \cup_{k\in T_m(\delta)} h^k_m$. Из включения $x \in H(\delta)$ следует, что

$$x \in H^{k_j}_{m_j}, \quad k_j \in T_{m_j}(\delta), \quad m_j \ge M_\delta, \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

Кроме того, из $x \in [0,1]^2 \setminus Z(\delta)$ следует, что для любого натурального $m_0 > M_\delta$, $x \in [0,1]^n \setminus Z_{m_0}(\delta)$ имеем

$$x \in [0,1]^2 \setminus \cap_{p=m_0}^{\infty} \cup_{m=p}^{\infty} \cup_{k\in T^m_{m_0}(\delta)} H^k_m.$$

Следовательно, существует номер $m(x)$, $m(x) \ge m_0$ такой, что $x \in [0,1]^n \setminus \cup m = m(x)^{\infty} \cup_{k\in T^m_{m_0}(\delta)} H^k_m$. Отсюда и из (8) следует, что существуют натуральные числа $\bar m$, $\bar k$ и $\bar m \ge m(x)$ такие, что $x \in H^{\bar k}_{\bar m}$, $\bar k \in T_{\bar m(\delta)} \setminus T^{\bar m}_{m_0}(\delta)$. Но тогда из определения множеств $T^m_{m_0}(\delta)$ следует

$$h^{*\bar k}_{\bar m} \cap (\cup_{m=m_0}^{\bar m -1} \cup_{k\in T_m(\delta)} h^{*k}_m) \ne \emptyset.$$

Следовательно, $h^{*\bar k}_{\bar m} \cap h^{*k'}_{m'} \ne \emptyset$ для некоторой пары m', k', при $m_0 \le m' \le \bar m - 1$, $k' \in T_{m'}(\delta)$. Более того, для некоторого составляющего интервала $J^{k'}_{m'}(\iota')$, $0 \le \iota' \le \gamma_{m'} - r_{m'}$ имеем

$$h^{*\bar k}_{\bar m} \cap J^{*k'}_{m'}(\iota') \ne \emptyset. \tag{9}$$

Очевидно
$$\operatorname{dist}(J^{k'}_{m'}(\iota'), J^{\bullet k'}_{m'}(\iota')) \geq \frac{1}{2}\,\frac{1}{2^{\gamma_{m'}}}. \tag{10}$$

Используя (6), получаем
$$H^{\bar{k}}_{\bar{m}} \subset \cup_{\iota=0}^{\gamma_{\bar{m}}-r_{\bar{m}}} 6\cdot J^{\bullet\bar{k}}_{\bar{m}}(\iota) = \cup_{\iota=0}^{\gamma_{\bar{m}}-r_{\bar{m}}} 3\cdot J^{\bar{k}}_{\bar{m}}(\iota).$$

Следовательно,
$$h^{\bullet\bar{k}}_{\bar{m}} \cup H^{\bar{k}}_{\bar{m}} \subset \cup_{\iota=0}^{\gamma_{\bar{m}}-r_{\bar{m}}} 3\cdot J^{\bar{k}}_{\bar{m}}(\iota).$$

Отсюда следует
$$\delta(h^{\bullet\bar{k}}_{\bar{m}} \cup H^{\bar{k}}_{\bar{m}}) \leq \delta(\cup_{\iota=0}^{\gamma_{\bar{m}}-r_{\bar{m}}} 3\cdot J^{\bar{k}}_{\bar{m}}(\iota)) = 3\,\delta(h^{\bar{k}}_{\bar{m}}) = 3\,\delta(H^{\bar{k}}_{\bar{m}}) \leq \frac{6}{2^{r_{\bar{m}}}}.$$

Учитывая (1) и $r_m \geq \frac{1}{2}\log_2(\frac{\varepsilon^{1/2}(2^{\gamma_m})\gamma_m}{\phi(2^{\gamma_m})})$, получим
$$\delta(h^{\bullet\bar{k}}_{\bar{m}} \cup H^{\bar{k}}_{\bar{m}}) < \frac{6}{2^{r_{m'+1}}} < 6\sqrt{\frac{\phi(2^{\gamma_{m'+1}})}{\varepsilon^{1/2}(2^{\gamma_{m'+1}})(\gamma_{m'+1})}} < \frac{1}{4\,2^{\gamma_{m'}}}.$$

Из (9) и (10) вытекает $\delta(h^{\bullet\bar{k}}_{\bar{m}} \cup H^{\bar{k}}_{\bar{m}}) < 1/2\cdot\operatorname{dist}(J^{k'}_{m'}(\iota'), J^{\bullet k'}_{m'}(\iota'))$ и
$$h^{\bullet\bar{k}}_{\bar{m}} \cup H^{\bar{k}}_{\bar{m}} \subset J^{k'}_{m'}(\iota')) \subset h^{k'}_{m'}.$$

Поэтому $x \in h^{\bar{k}}_{\bar{m}} \cup H^{\bar{k}}_{\bar{m}} \subset h^{k'}_{m'} \subset \cup_{m\geq m_0} \cup_{k\in T_m} h^k_m$ что и требовалось доказать.

6. Пусть $x \in h(\delta)$. Тогда $x \in (J^{k_n}_{m_n}(\iota_n))_{n=1}^{\infty}$ для некоторой последовательности (m_n, k_n, ι_n), $1 \leq k_n \leq s_{m_n}$, $0 \leq \iota_n \leq \gamma_{m_n} - r_{m_n}$. Обозначая эти интервалы через J_n, из (4) находим
$$\frac{1}{|J_n|}\int_{J_n} f \geq \frac{1}{|J_n|}\int_{J_n} 2^{\gamma_{m_n}}\chi_{Q^{k_n}_{m_n}}(y)\,dy = \frac{2^{r_{m_n}}}{4} \geq \frac{\varepsilon^{1/2}(2^{\gamma_{m_n}})\gamma_{m_n}}{4\,\phi(2^{\gamma_{m_n}})}.$$

Вспоминая включение $Q^{k_n}_{m_n} \subset I^{k_n}_{m_n}(\iota)$, в силу (5) получим, что $m(J_n) = m(I^{k_n}_{m_n}(\iota)) \geq 2^{-\gamma_{m_n}}$ и
$$\frac{1}{|J_n|\,\nu(1/m(J_n))}\int_{J_n} f \geq \frac{1}{4}\,\frac{\varepsilon^{1/2}(2^{\gamma_{m_n}})\,\gamma_{m_n}/\phi(2^{\gamma_{m_n}})}{\varepsilon(2^{\gamma_{m_n}})\gamma_{m_n}/\phi(2^{\gamma_{m_n}})} = \varepsilon^{-1/2}\,(2^{\gamma_{m_n}}) \uparrow \infty.$$

Для завершения доказательства утверждения (B) остаётся заметить, что $\delta(J_n) = \delta(I^{k_n}_{m_n}(\iota_n)) \leq 2^{-r_{m_n}+1} \downarrow 0$. $n \uparrow \infty$ и $|h(\delta)| \uparrow 1$ при $\delta \downarrow 0$. Теорема 2 доказана.

§4. ЗАМЕЧАНИЯ

Негативные части (утверждения (B)) Теорем 1 и 2 можно усиливать. Для формулировки соответствующего результата дадим определение (см. [10], стр. 20) : непрерывная вогнутая функция $M(t)$, $t \geq 0$ называется N-функцией, если $\lim_{t\to 0} M(t)/t = 0$ и $\lim_{t\to\infty} M(t)/t = +\infty$. В частности, утверждение (B) Теоремы 2 можно обобщить следующим образом.

Пусть $t\,\phi(t) : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ является N–функцией, удовлетворяющей Δ_2-условию и $\phi(t) = o(\ln t)$, $t \to \infty$. Далее допустим, что $\nu : [1,+\infty[\to]0,+\infty[$ – возрастающая к бесконечности функция, удовлетворяющая Δ_2-условию и $\nu(t) = o(\ln(t)/\phi(t))$, $t \to \infty$. Множество функций $f \in L\phi(L)([0,1]^2)$, для которых соотношение

$$\limsup_{m_1^* \to \infty} \frac{S_{m_1 m_2}(f,x)}{\nu(m_1^*)} = +\infty$$

выполняется почти всюду на $[0,1]^2$ при $m_2^* \to \infty$, образует множество второй категории в пространстве Орлича $L\phi(L)([0,1]^2)$.

Доказательство опирается на следующую лемму.

Лемма 5. В пространстве Орлича $L\phi(L)([0,1]^2)$ существует такая неотрицательная функция f, что для каждого натурального N найдётся множество $E(N) \subset G$ и положительное число $\alpha = \alpha(N)$ такие, что

1) $|E(N)| > 1 - 1/N$,

2) для каждой точки $x \in E(N)$ существует такой двоичный интервал $I \in D(x)$, что $\delta(I) < 1/N$, $|I| \geq \alpha$ и

$$\frac{1}{|I|\,\nu(1/m(I))} \int_I f > N.$$

Доказательство Леммы 5 аналогично доказательству Теоремы 2 (B) и поэтому опускается.

Обозначим через M множество всех функций f из пространства Орлича $L\phi(L)$, для которых соотношение

$$\overline{\lim}_{\substack{I \in D(x) \\ \delta(I) \to 0}} \frac{1}{|I|\,\nu(1/m(I))} \int_I f = +\infty$$

выполняется почти всюду на G.

Легко видеть, что $\cap_{m=1}^{\infty} M(m, 1/m, 1/m) \subset M$, где

$$M(m, 1/m, 1/m) = \{f \in L\phi(L)([0,1]^2) : \ |\Theta(f, m, 1/m)| < 1/m\},$$

$$\Theta(f, m, 1/m) = \{x \in G : \text{ for all } I \in D(x),\ \delta(I) < 1/m,\ \frac{1}{|I|\,\nu(1/m(I))} \int_I f \leq m\}.$$

В силу Леммы 2 достаточно показать, что M образует множество второй категории в пространстве $L\phi(L)$. С этой целью мы покажем, что множества $L\phi(L) \setminus M(m, 1/m, 1/m)$ нигде не плотны в $L\phi(L)$. Для этого, в свою очередь, достаточно показать, что для любых фиксированных $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ и для любой функции $F \in L\phi(L) \setminus M(m, 1/m, 1/m)$ существует функция $f' \in L\phi(L)$ и число $\delta = \delta(F, \varepsilon)$ такие, что $B(f', \delta) \subset B(F, \varepsilon) \cap M(m, 1/m, 1/m)$, где $B(f', \delta)$ и $B(F, \varepsilon)$ обозначают шары в пространстве $L\phi(L)$ с центрами в f' и F и радиусами δ и ε, соответственно.

Так как $\phi(t)$ удовлетворяет Δ_2-условию, то множество $\{g : g \in L^\infty\}$ всюду плотно в пространстве Орлича $L\phi(L)$ (см. [10], стр. 98). Следовательно, множество $\{f + g : g \in L^\infty\}$, где f - функция из Леммы 4, также всюду плотно в $L\phi(L)$. Тогда существует функция $g \in L^\infty$ такая, что $||F - (f+g)||_{L\phi(L)} < \varepsilon/2$. Пусть $N \in \mathbb{N}$ и

$$N \geq 2m + \frac{||g||_\infty}{\nu(1)} + \frac{1}{\nu(1)}.$$

Обозначим через $\Psi(t)$ функцию, дополнительную к $t\,\phi(t)$ и пусть $c = ||\chi_{[0,1]^2}||_\Psi$. Далее пусть $\alpha = \alpha(N)$ – постоянная из Леммы 5 и $\delta = \min(\alpha/c, \varepsilon/2)$. Ясно, что $B(f+g, \alpha) \subset B(F, \varepsilon)$ и остаётся показать, что $B(f+g, \delta) \subset M(m, 1/m, 1/m)$.

Пусть $E(N)$ – множество из Леммы 3. В силу неравенства $|E(N)| > 1 - 1/N > 1 - 1/m$ достаточно показать, что для любой функции $h \in L\phi(L)$, $||h||_{L\phi(L)} < \delta$ и для любой точки $x \in E(N)$ найдётся такой интервал $I \in D(x)$, что $\delta(I) < 1/m$ и

$$\frac{1}{|I|\,\nu(1/m(I))} \int_I (f + g + h) > m.$$

Действительно, в силу Леммы 5 для любой точки $x \in E(N)$ найдётся такой интервал $I \in D(x)$, что $\delta(I) < 1/N < 1/m$, $|I| \geq \alpha$ и

$$\frac{1}{|I|\,\nu(1/m(I))} \int_I f > N.$$

Следовательно, для любой функции $h \in L\phi(L)$, $||h||_{L\phi(L)} < \delta$ имеем

$$\frac{1}{|I|\,\nu(1/m(I))} \int_I (f + g + h) = \frac{1}{|I|\,\nu(1/m(I))} \int_I f - \frac{||g||_{L^\infty}}{\nu(1/m(I))} - \frac{1}{\nu(1/m(I))} \frac{||h||_1}{|I|}.$$

Используя неравенство Гёльдера (см. [10]), имеем

$$||h||_1 \leq ||\chi_{[0,1]^2}||_\Psi \, ||h||_{L\phi(L)} < c\, ||h||_{L\phi(L)} \leq \alpha,$$

откуда получаем

$$\frac{1}{|I|\,\nu(1/m(I))} \int_I (f + g + h) \geq N - \frac{||g||_{L^\infty}}{\nu(1)} - \frac{1}{\nu(1)} \geq m.$$

Доказательство завершено.

ABSTRACT. The paper considers a question concerning divergence of the double Fourier–Haar series of functions from Orlicz class $L\varphi(L)$. Sharp upper bounds for the growth of rectangular partial sums of these series are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Алексич, Проблемы Сходимости Ортогональных Рядов, Мир, Москва, 1963.
2. B. Jenssen, J. Marcinkievich and A. Zygmund, "Note on the differentiability of the indefinite integral", Fund. Math., vol. 35, pp. 217 — 235, 1935.
3. Т. Ш. Зерекидзе, "Сходимость кратных рядов Фурье–Хаара и сильная дифференцируемость интегралов, Труды Тбилисского Мат. Института АН ГССР, том 76, стр 80 — 99, 1985.
4. G. Karagulyan, "On the growth of integral means of the functions from $L^1(\mathbb{R}^n)$", East. J. Approx., vol. 3, pp. 1 — 20, 1997.
5. G. Lepsveridze, "On growth order of rectangular integral means of summable functions", Proc. A. Razmadze Math. Inst., vol. 121, pp. 89 — 107, 1999.
6. И. Крейн, И. Петунин, Е. Семенов, Интерполяция Линейных Операторов, Наука, Москва, 1958.
7. A. Cordoba, R. Fefferman, "A geometric proof of the strong maximal theorem", Annals of Mathematics, vol. 102, pp. 95 — 100, 1975.
8. R. J. Bagby, "Maximal functions and rearrangements : some new proofs", Indiana Univ. Math. J., vol. 23, no. 6, pp. 879 — 891, 1983.
9. М. Гусман, Дифференцирование в $\mathbb{R}^n$, Мир, Москва, 1978.
10. М. Красносельский, И. Рутитский, Выпуклые Функции и Пространства Орлича, Москва, 1958.

26 сентября 2001

Телавский государственный университет, Грузия
E-mail : glepsveridze@yahoo.com