ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО СДВИГА НАДЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, ОПРЕДЕЛЁННЫЕ НА ПРОСТРАНСТВАХ ЛОРЕНЦА

С. Я. Новиков

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 36, № 6, 2001

Рассматриваются надлинейные (по Никишину) операторы $T : L_{p,q} \longmapsto L_0([0,1],\mathcal{M},\mathrm{m})$, где $L_{p,q}$–банахово пространство Лоренца, а $L_0([0,1],\mathcal{M},\mathrm{m})$ – пространство всех действительнозначных измеримых функций. Для операторов T, инвариантных относительно сдвига, перечислены свойства, которыми обладает оператор $\tilde{T}$: $L_{p,q}^{\mathbb{N}} \longmapsto (L_0)^{\mathbb{N}}$. Перечисленные свойства характерны для операторов, инвариантных относительно сдвига, операторы общего вида, даже линейные, ими могут не обладать.

Мы будем рассматривать надлинейные операторы (по Никишину [1]) $T : X \longmapsto L_0([0,1],\mathcal{M},\mathrm{m})$, определённые на банаховом пространстве X со значениями в пространстве $L_0([0,1],\mathcal{M},\mathrm{m})$ действительнозначных функций, измеримых по Лебегу. Для функции $f \in L_0([0,1],\mathcal{M},\mathrm{m})$ определена её функция распределения

$$d_f(\tau) = \mathrm{m}(t : |f(t)| > \tau), \quad \tau \geq 0$$

и убывающая перестановка $f^*(t) = \inf\{\tau : d_f(\tau) < t\}$. Функции f и g называются **равноизмеримыми** (обозначение $f \sim g$), если $d_f(\tau) = d_g(\tau)$ для любого $\tau \geq 0$. Инвариантные относительно сдвига множества и операторы определяются, отождествляя стандартным образом полуинтервал $[0,1)$ с окружностью $\mathbf{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Отметим, что каждое $t \in \mathbf{T}$ определяет линейный **оператор сдвига** $(S_t x)(s) = x(t+s)$, где сложение проводится по mod 1.

Определение 1. Множество $U \subset L_0(\mathbf{T})$ называется **инвариантным относительно сдвига**, если $S_t(U) \subset U$ для любого $t \in \mathbf{T}$.

Оператор T, определенный на некотором инвариантном относительно сдвига пространстве $X \subset L_0$, со значениями в L_0 называется **инвариантным относительно сдвига**, если $T \circ S_t = S_t \circ T$ для любого $t \in \mathbf{T}$.

Примером множества, инвариантного относительно сдвига, является ограниченное подмножество симметричного функционального пространства (в частности, классического пространства L_p, $1 \leq p \leq \infty$), а примером оператора, инвариантного относительно сдвига, является оператор свертки.

Определение 2. Оператор $T : X \longmapsto L_0$ называется **надлинейным**, если он положительно однородный и сублинейный, т.е.

$$|T(\gamma x)| = |\gamma| \cdot |Tx|, \quad x \in X, \quad \gamma \in \mathbb{R},$$

$$|T(x_1 + x_2)| \leq |Tx_1| + |Tx_2|, \quad x_1, x_2 \in X.$$

С помощью теоремы Хана-Банаха-Канторовича (см. [8], Теорема 0.11), нетрудно показать, что данное определение надлинейного оператора эквивалентно тому, которое использовал Е. М. Никишин [1].

Определение 3. Оператор $T : X \longmapsto L_0$ называется **надлинейным** (по Никишину [1]), если для любого $x \in X$ существует линейный оператор $\mathcal{L}_x : X \longmapsto L_0$ такой, что

$$1) \quad \mathcal{L}_x x = Tx, \quad 2) \quad |\mathcal{L}_x y| \leq |Ty|, \quad y \in X.$$

Если X является банаховой решёткой, и линейный оператор $\mathcal{L}_x$ является положительным для любого $x \in X$, то и надлинейный оператор T называется **положительным**.

Примеры надлинейных операторов приведены в [1]. Отметим, что если $\mathcal{L}_n : X \longmapsto L_0$ — последовательность линейных операторов, инвариантных относительно сдвига, то оператор $T : x \longmapsto \sup_n |\mathcal{L}_n x|$ является надлинейным оператором, инвариантным относительно сдвига.

Пространство L_0, область значений рассматриваемых операторов, наделено топологией сходимости по мере и является метрическим пространством. Пространство L_0 не является локально ограниченным, и поэтому L_0 не является квазинормированным. Функционал

$$\|f\|_0 = \int_{[0,1]} \frac{|f(t)|}{1 + |f(t)|} \, dm(t),$$

который определяет метрику в пространстве L_0, не является однородным. Фундаментальную систему окрестностей нуля образуют множества вида

$$V_\varepsilon = \{ f \in L_0 : m[|f| > \varepsilon] < \varepsilon \}, \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

или

$$U(A,\varepsilon) = \{f \in L_0 : \|f\chi_A\|_0 < \varepsilon\}, \quad A \in \mathcal{M}, \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

где χ_A обозначает характеристическую функцию множества A.

Определение 4. Множество $E \subset L_0$ называется **ограниченным в пространстве** L_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $R > 0$ такое, что $\mathrm{m}[|f| > R] < \varepsilon$ для всех $f \in E$.

Единичный шар банахова пространства X будет обозначаться через B_X, т.е. $B_X = \{x : \|x\| \le 1\}$.

Лемма. Для надлинейного оператора $T : X \longmapsto L_0$ следующие утверждения эквивалентны :

1) Образ $T(B_X)$ единичного шара пространства X ограничен в L_0.

2) Для любого $\varepsilon \in (0,1]$ существует число $C_\varepsilon > 0$ такое, что $(Tx)^*(\varepsilon) \le C_\varepsilon\|x\|, \quad x \in X$.

3) Оператор $x \longmapsto |Tx|$ непрерывен в произвольной точке $x \in X$, т.е. $|Tx_n| \to |Tx|$, при $x_n \to x$.

Доказательство : 1) выполнено тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует $C_\varepsilon > 0$ такое, что $d_{Tx}(C_\varepsilon) < \varepsilon$ для всех $x \in B_X$. Это эквивалентно тому, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $C_\varepsilon > 0$ такое, что $\sup_{B_X}(Tx)^*(\varepsilon) \le C_\varepsilon$. Принимая во внимание однородность оператора и нормы, из последнего утверждения получаем 2). Эквивалентность 2) и 3) устанавливается стандартными рассуждениями с использованием свойства (см. [1])

$$|T(x-y)| \ge \big||Tx| - |Ty|\big|, \quad x, y \in X.$$

Лемма 1 доказана.

Напомним определения пространств Лоренца $L_{p,q}$ (см. [2], [3]). Пусть $0 < p < \infty$, $0 < q \le \infty$, и $(\mathcal{J},\nu)$ - пространство с σ-конечной мерой ν

$$L_{p,q}(\mathcal{J},\nu) = \left\{ x \in L_0(\mathcal{J},\nu) : \|x\| = \left[\int_0^{\nu(\mathcal{J})} (x^*(t))^q \, d(t^{q/p})\right]^{1/q} < \infty \right\}, \quad q < \infty,$$

$$L_{p,\infty}(\mathcal{J},\nu) = \left\{ x \in L_0(\mathcal{J},\nu) : \|x\| = \sup_{0<t<\nu(\mathcal{J})} x^*(t) t^{1/p} < \infty \right\}.$$

Отметим, что функционалы $x \longmapsto \|x\|$, участвующие в определении пространств $L_{p,q}$, являются, вообще говоря, квазинормами. Для $p = q$ будем обозначать

$L_{p,q} = L_p$. Если $q_1 < q_2$, то $L_{p,q_1} \subset L_{p,q_2}$. Для $p \neq q$ пространства $L_{p,q}$ нормируемы тогда и только тогда, когда $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$. Пространства $L_{p,q}(\mathbb{N})$ при $q < \infty$ обозначаются $\ell_{p,q}$, т.е. $\ell_{p,q} =$

$$= \left\{ a \in \mathbb{R}^\infty : \|a\| = \left[\sum_{i=1}^{\infty} (a_i^*)^q i^{q/p-1}\right]^{1/q} \asymp \left[\sum_{i=1}^{\infty} (a_i^*)^q (i^{q/p} - (i-1)^{q/p})\right]^{1/q} < \infty \right\}$$

$$\ell_{p,\infty} = \left\{ a \in \mathbb{R}^\infty : \|a\| = \sup_i a^*(i)\, i^{1/p} < \infty \right\}.$$

Наряду с оператором $T : X \longmapsto L_0$ мы будем рассматривать оператор $\bar{T} : X^{\mathbb{N}} \longmapsto (L_0)^{\mathbb{N}}$, определённый следующим образом : $\bar{T}(x_n) := (Tx_n)$ (такие операторы широко используются в теории абсолютно суммирующих операторов, см. [4], [5]). Для формулировки свойств таких операторов удобно ввести пространства функциональных последовательностей :

$$L_0(\ell_\infty) = \left\{ (f_i) \in (L_0)^{\mathbb{N}} : \sup_i |f_i| < \infty \quad \text{почти всюду} \right\},$$

$$L_{p,q}(\ell_r) = \left\{ (f_i) \in (L_{p,q})^{\mathbb{N}} : \|(f_i(t))\|_r \in L_{p,q} \right\}, \quad 0 < p < \infty, \quad 0 < q \leq \infty, \quad r > 0,$$

$$\mathcal{A}(X) = \left\{ (x_i) \in X^{\mathbb{N}} : (\|x_i\|_X) \in \mathcal{A} \right\}.$$

Мы исследуем свойства оператора $\bar{T}$, соответствующего оператору T, инвариантному относительно сдвига, областью определения которого являются пространства $L_{p,q}$.

Теорема. Пусть $T : L_{p,q}(\mathrm{T}) \longmapsto L_0(\mathrm{T})$ – инвариантный относительно сдвига, ограниченный надлинейный оператор.

A) Если $1 < p < 2$ и $1 \leq q \leq \infty$, то оператор $\bar{T}$ обладает следующими эквивалентными свойствами :

1) Существует $q \in (0, p]$ такое, что $\bar{T} : \ell_{p,q}(X) \longmapsto L_0^I(\ell_\infty)$, т.е. для произвольной последовательности (x_i), $x_i \in X$ такой, что $(\|x_i\|) \in \ell_{p,q}$ и произвольной последовательности (Y_i) независимых функций, равноизмеримых с (Tx_i) имеем $\sup_i |Y_i| < \infty$ почти всюду.

2) Существует $q \in (0, p]$ такое, что $\bar{T} : \ell_{p,q}(X) \longmapsto L_0^F(\ell_\infty)$, т.е. для любой последовательности (x_i), $x_i \in X$ с $(\|x_i\|) \in \ell_{p,q}$ и любой последовательности (Y_i) функций, равноизмеримых с (Tx_i) имеем $\sup_i |Y_i| < \infty$ почти всюду.

3) Существует постоянная $C > 0$ такая, что для любого $\varepsilon \in (0,1]$ и для любого конечного множества (x_i) элементов из пространства $L_{p,q}$ выполняется неравенство

$$\left(\sup_i |Tx_i|\right)^* (\varepsilon) \leq \frac{C}{\varepsilon^{1/p}} \left(\sum_i \|x_i\|^p\right)^{1/p}.$$

4) Оператор $\tilde{T} : \ell_p(X) \longmapsto L_{p,\infty}(\ell_\infty)$.

В) Если $p = 2$ и $1 \leq q \leq 2$, или $2 < p < \infty$ и $1 \leq q \leq \infty$, то оператор $\tilde{T}$ обладает следующими эквивалентными свойствами :

1') Существует $q \in (0,2]$ такое, что $\tilde{T} : \ell_{2,q}(X) \longmapsto L_0^I(\ell_\infty)$, т.е. для любой последовательности (x_i), $x_i \in X$ с $(\|x_i\|) \in \ell_{2,q}$ и любой последовательности (Y_i) независимых функций, равноизмеримых с (Tx_i), имеем $sup_i |Y_i| < \infty$ почти всюду.

2') Существует $q \in (0,2]$ такое, что $\tilde{T} : \ell_{2,q}(X) \longmapsto L_0^F(\ell_\infty)$, т.е. для любой последовательности (x_i), $x_i \in X$ с $(\|x_i\|) \in \ell_{2,q}$ и любой последовательности (Y_i) функций, равноизмеримых с (Tx_i), имеем $sup_i |Y_i| < \infty$ почти всюду.

3') Существует константа $C > 0$ такая, что для любого $\varepsilon \in (0,1]$ и для произвольного конечного набора элементов (x_i) из пространства $L_{p,q}$ выполняется неравенство

$$\left(\sup_i |Tx_i|\right)^* (\varepsilon) \leq \frac{C}{\varepsilon^{1/2}} \left(\sum_i \|x_i\|^2\right)^{1/2}.$$

4') Оператор $\tilde{T} : \ell_2(X) \longmapsto L_{2,\infty}(\ell_\infty)$.

Доказательство : Докажем, что каждое из утверждений 1) – 4) эквивалентно неравенству слабого типа для оператора T. Обозначим через X область определения оператора T. Предположим, что существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$(Tx)^*(t) \leq \frac{C}{t^{1/p}}, \quad t \in \mathrm{T}, \quad x \in B_X,$$

или в терминах функции распределения, $d_{Tx}(s) \leq C^p/s^p$, $s > 0$. Отсюда следует, что для любого конечного набора чисел $\{\alpha_i\}$ имеем

$$d_{\sup|\alpha_i Tx_i|}(s) \leq \sum d_{Tx_i}\left(\frac{s}{|\alpha_i|}\right) \leq \frac{C^p}{s^p} \sum |\alpha_i|^p.$$

По определению невозрастающей перестановки получаем неравенство

$$\left(\sup_i |\alpha_i Tx_i|\right)^* \left(\frac{C^p}{t^p} \sum |\alpha_i|^p\right) \leq t, \quad t > 0.$$

Обозначив через ε аргумент перестановки, получим

$$\left(\sup_i |\alpha_i T x_i|\right)^*(\varepsilon) \le \frac{C}{\varepsilon^{1/p}} \left(\sum_i |\alpha_i|^p\right)^{1/p}, \quad \varepsilon \in (0,1].$$

Пусть теперь (y_i) – произвольное множество ненулевых элементов пространства X. Положим $\alpha_i = \|y_i\|$ и $x_i = y_i/\|y_i\|$. Тогда последнее из доказанных неравенств примет следующий вид :

$$\left(\sup_i |Ty_i|\right)^*(\varepsilon) \le \frac{C}{\varepsilon^{1/p}} \left(\sum_i \|y_i\|^p\right)^{1/p}, \quad \varepsilon \in (0,1].$$

Таким образом доказано, что неравенство слабого типа для оператора T влечет 3). Для доказательства обратной импликации, достаточно взять множество из одного элемента. Эквивалентность 3) и 4) очевидна.

Покажем теперь, что 1) эквивалентно ограниченности множества $T(B_X)$ в пространстве $L_{p,\infty}(\mathrm{T})$. Пусть $y_i \in T(B_X)$, $y_i = T(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, и пусть $a = (\alpha_i) \in \ell_{p,q}$. Тогда $(\|\alpha_i x_i\|) \in \ell_{p,q}$, и поэтому в силу 1) для последовательности независимых функций (Y_i), равноизмеримых с (y_i) получаем, что $\sup_i |\alpha_i Y_i| < \infty$ почти всюду. Таким образом, $T(B_X)$ является независимым $(\ell_{p,q}, \ell_\infty)$-множеством. Это эквивалентно ограниченности $T(B_X)$ в пространстве $L_{p,\infty}(\mathrm{T})$ (см. [9]). Эквивалентность 2) ограниченности $T(B_X)$ в пространстве $L_{p,\infty}(\mathrm{T})$ доказывается аналогично.

С другой стороны, известно (см. [6], [7]), что всякий надлинейный оператор, инвариантный относительно сдвига и определенный на пространствах $L_{p,q}$, удовлетворяющих перечисленным в теореме условиям, является оператором слабого типа, который ограничен из $L_{p,q}$ в $L_{p,\infty}$. Этим завершается доказательство утверждения A). Утверждение B) доказывается аналогично (в этом случае надлинейный оператор, инвариантный относительно сдвига, ограничен из $L_{p,q}$ в $L_{2,\infty}$). Теорема доказана.

Замечание. Интересно отметить, что вышеуказанную теорему нельзя получить из факторизационных теорем Никишина для надлинейных операторов общего вида. В [7] построен пример непрерывного линейного оператора, определенного на пространстве $L_{p,1}$, $p > 1$, который нельзя профакторизовать через пространство $L_{r,\infty}$ ни для какого $r > 1$.

ABSTRACT. The paper considers the superlinear (in the sense of Nikishin) operators $T : L_{p,q} \longmapsto L_0([0,1], \mathcal{M}, m)$, where $L_{p,q}$ is the Banach–Lorentz space, and $L_0([0,1], \mathcal{M}, m)$ is the space of all real-valued measurable functions. For the shift-invariant operators T some properties of the operator $\tilde{T} : L_{p,q}^{\mathbb{N}} \longmapsto (L_0)^{\mathbb{N}}$ are proved. Even linear operators, that are no longer shift-invariant, may not possess these properties.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. М. Никишин, "Резонансные теоремы и надлинейные операторы", Успехи Мат. Наук, том 25, № 6, стр. 129 – 191, 1970.
2. И. Стейн, Г. Вейс, Введение в Гармонический Анализ на Евклидовых Пространствах, Мир, Москва, 1974.
3. R. A. Hunt, "On $L(p,q)$ spaces", L'Enseignement Math., vol. 12, no. 4, pp. 249 – 276, 1966.
4. Б. М. Макаров, "p–абсолютно суммируемые операторы и некоторые приложения", Алгебра и Анализ, том 3, № 2, стр. 1 – 76, 1991.
5. С. В. Кисляков, "Абсолютно суммирующие операторы на диск-алгебре", Алгебра и анализ, том 3, № 4, стр. 1 – 77, 1991.
6. А. М. Штейнберг, "Неравенства слабого типа для операторов, инвариантных относительно сдвига", Сообщения АН Гр.ССР, том 106, № 3, стр. 469 – 471, 1982.
7. А. М. Штейнберг, "Операторы, инвариантные относительно сдвига в пространствах Лоренца", Функц. Анализ и его прил., том 20, № 2, стр. 92 – 93, 1986.
8. В. Л. Левин, Выпуклый Анализ в Пространствах Измеримых Функций, Москва, Наука, 1985.
9. С. Я. Новиков, "Характеризация множеств измеримых функций, ограниченных в пространствах $L_{p,\infty}$", Соврем. методы теории функций..., Воронеж, стр. 200 – 201, 2001.

22 сентября 2001

Самарский государственный университет,
Самара, Россия
E-mail : nvks@transit.samara.ru