# О ЕДИНСТВЕННОСТИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

**Г. Г. Геворкян**

**Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 36, № 6, 2001**

**Рассматриваются гармонические в единичном круге $B$ функции $F(\xi)$, $\xi \in B$, удовлетворяющие условию $\liminf_{\lambda\to\infty} \lambda \cdot \mu\{\eta \in \partial B : M_\sigma(F,\eta) > \lambda\} = 0$, где $M_\sigma(F,\eta)$ – нетангенциальная гармоническая функция функции $F$. Доказано, что такие функции можно восстановить через радиальные предельные значения при помощи некоторого обобщения $A$-интеграла.**

В теории гармонических функций хорошо известен следующий результат (см., например, [1]). Пусть $D$ – односвязная область в $\mathbb{R}^2$, и её граница $\partial D$ – спрямляемая жорданова кривая. Тогда для любой непрерывной на $\partial D$ функции $f(\eta)$, $\eta \in \partial D$ существует единственная гармоническая в $D$ функция $F(\xi)$, которая непрерывна на замыкании $D$ и $F(\eta) = f(\eta)$, $\eta \in \partial D$. Кроме того, для каждой такой области $D$ существует функция $K_D(\xi,\eta)$, $\xi \in D$, $\eta \in \partial D$ такая, что

$$F(\xi) = \int_{\partial D} f(\eta)\, K_D(\xi,\eta)\, ds, \quad \xi \in D, \tag{1}$$

где $ds$ – элемент длины на $\partial D$.

В частности, если $D$ – круг радиуса $R$ с центром в начале координат, то $K_D(\xi,\eta)$ совпадает с ядром Пуассона

$$P_R(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi R} \cdot \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - t) + r^2}, \tag{2}$$

где $\xi = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, $\eta = (R\cos t, R\sin t)$. В случае, когда $R = 1$, будем писать $P_R(\xi,\eta) = P(\xi,\eta)$.

Известно (см., например, [2]), что ядро $K_D(\xi,\eta)$ удовлетворяет условиям :

$$\begin{gathered} \int_{\partial D} K_D(\xi,\eta)\, ds = 1 \quad \text{для любого} \quad \xi \in D, \\ K_D(\xi,\eta) > 0 \quad \text{для любых} \quad \xi \in D \quad \text{и} \quad \eta \in \partial D. \end{gathered} \tag{3}$$

Для заданной функции $f$, определённой в круге радиуса $R$ и для числа $0 \le \sigma < 1$, нетангенциальная максимальная функция $M_\sigma(f,\eta)$ функции $f$ определяется как (см. [3])

$$M_\sigma(f,\eta) = \sup_{\xi \in \Omega_\sigma(\eta)} |f(\xi)|, \quad |\eta| = R,$$

где $\Omega_\sigma(\eta)$ – область, ограниченная двумя касательными, проведенными из точки $\eta$ к окружности $|z| = \sigma R$ и максимальной дугой этой окружности, заключенных между точками касания. При $\sigma = 0$ область $\Omega_\sigma(\eta)$ вырождается в радиус круга. В этом случае максимальная функция называется радиальной, и

$$M_0(f,\eta) = \sup_{0 \le r < 1} |f(r\eta)|, \quad |\eta| = R.$$

Для чисел $A$ и $\lambda > 0$ положим

$$[A]_\lambda = \begin{cases} A, & \text{если} \quad |A| \le \lambda, \\ 0, & \text{если} \quad |A| > \lambda. \end{cases}$$

Напомним, что $\nu$-измеримая функция $f$ называется $A$-интегрируемой, если

$$\nu\{\eta : |f(\eta)| > \lambda\} = o(1/\lambda) \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty$$

и существует предел $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \int_X [f(\eta)]_\lambda \, ds$. Этот предел называется $A$-интегралом функции $f$ и обозначается через $(A) \int f \, d\nu$.

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения : $\mu$ – мера Лебега ; через $C$, $C_1$, $C_\sigma$,... обозначим постоянные, зависящие от соответствующих параметров, через $E^c$ обозначим дополнение множества $E$ относительно единичной окружности. В [4] А. Б. Александровым была доказана следующая теорема.

**Теорема A1. Если радиальная максимальная функция гармонической в единичном круге функции $F(\xi)$ удовлетворяет условию**

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda \, \mu\{\eta : M_0(F,\eta) > \lambda\} = 0 \tag{4}$$

**и $\lim\limits_{r \to 1-0} F(r\eta) = f(\eta)$ почти всюду на единичной окружности, то для любого $\xi$, $|\xi| < 1$**

$$F(\xi) = (A) \int_{|\eta|=1} f(\eta) \, P(\xi,\eta) \, ds.$$

Эту теорему можно переформулировать следующим образом :

**Теорема А2. Пусть тригонометрический ряд**

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{5}$$

**суммируется методом Абеля к некоторой функции $f(x)$ почти всюду на $[0, 2\pi]$, и пусть мажоранта Абеля**

$$A^*(x)=\sup_{r<1}\left|\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\, r^n\right|$$

**удовлетворяет условию**

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\cdot\mu\{x\in[0,2\pi]:\ A^*(x)>\lambda\}=0. \tag{6}$$

**Тогда для коэффициентов ряда (5) имеем**

$$\pi a_n=\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{2\pi}[f(x)\cos nx]_\lambda\, dx, \tag{7}$$

$$\pi b_n=\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{2\pi}[f(x)\sin nx]_\lambda\, dx. \tag{8}$$

Будем говорить, что ряд (5) суммируется методом Римана к числу $s$ в точке $x_0$, если

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2\right)=s.$$

Функция

$$S^*(x)=\sup_{h>0}\left|\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2\right|$$

называется мажорантой Римана ряда (5).

В [5] доказана следующая теорема.

**Теорема Г1. Если ряд (5) суммируем почти всюду методом Римана и**

$$\liminf_{\lambda\to+\infty}\lambda\cdot\mu\{x\in[0,2\pi]:\ S^*(x)>\lambda\}=0,$$

**то все коэффициенты этого ряда равны нулю.**

Следующая теорема была доказана в [6].

**Теорема Г2. Если для некоторой последовательности $\lambda_k \uparrow +\infty$ выполняется**

$$\liminf_{k\to+\infty} \lambda_k \cdot \mu\{x \in [0, 2\pi] : S^*(x) > \lambda_k\} = 0$$

**и ряд (5) почти всюду суммируем методом Римана к функции $f(x)$, то**

$$a_n = \frac{1}{\pi} \lim_{k\to\infty} \int_0^{2\pi} [f(x) \cos nx]_{\lambda_k} \, dx, \qquad (9)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \lim_{k\to\infty} \int_0^{2\pi} [f(x) \sin nx]_{\lambda_k} \, dx. \qquad (10)$$

Многомерные аналоги теорем Г1 и Г2 доказаны в работах [7], [8]. В работе [9] высказана гипотеза, что если вместо условия (6) потребовать выполнение более слабого условия

$$\liminf_{\lambda\to+\infty} \lambda_k \cdot \mu\{x \in [0, 2\pi] : A^*(x) > \lambda_k\} = 0,$$

то имеют место формулы (9), (10) восстановления коэффициентов ряда (5). Отметим, что метод Александрова не даёт ответа на гипотезу. Гипотеза всё ещё ждёт ответа, однако имеет место следующее утверждение.

**Теорема 1. Пусть для гармонической в единичном круге $B$ функции $F(\xi)$, $|\xi| < 1$ существует последовательность $\lambda_k \uparrow +\infty$ такая, что для некоторого $\sigma > 0$**

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k \cdot \mu\{\eta \in \partial B : M_\sigma(F, \eta) > \lambda_k\} = 0 \qquad (11)$$

**и**

$$\lim_{r\to 1-0} F(r\,\eta) = f(\eta) \quad \text{почти всюду на} \quad \partial B. \qquad (12)$$

**Тогда для всех $\xi \in B$ имеет место (формула восстановления)**

$$F(\xi) = \lim_{k\to\infty} \int_{\partial B} [f(\eta)]_{\lambda_k} P(\xi, \eta) \, ds. \qquad (13)$$

**В частности, если $\lim\limits_{r\to 1-0} F(r\,\eta) = 0$ почти всюду на $\partial B$, то $F(\xi) \equiv 0$.**

Теорему 1 можно переформулировать в терминах тригонометрических рядов.

**Теорема 2. Пусть суммы Абеля $A(r, x) = a_0/2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\, r^n$ ряда (5) при $r \to 1 - 0$ для почти всех $x$ сходится к $f(x)$. Если для некоторой последовательности $\lambda_k \uparrow +\infty$ выполняется**

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k \cdot \mu\{\eta \in \partial B : M_\sigma(A, \eta) > \lambda_k\} = 0, \qquad (14)$$

**то имеют место формулы (9) и (10). В частности, если функция $f$ интегрируема по Лебегу, то**

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Прежде, чем доказать Теорему 1, сделаем некоторые замечания, и получим следствия из этой теоремы.

**Замечание 1.** Очевидно, что для любой функции $f$ имеет место неравенство $M_0(f,\eta) \le M_\sigma(f,\eta)$, и, вообще говоря, не верно обратное неравенство. Однако, если $f$ – гармоническая функция и $M_0(f,\cdot) \in L_p$, $p > 0$, то $M_\sigma(f,\cdot) \in L_p$ и $\|M_\sigma(f,\cdot)\|_p \le C_p \cdot \|M_0(f,\cdot)\|_p$ (см. [10], стр. 170). Нам не известно, будет ли выполняться (11), если $F$ гармоническая функция и $\liminf_{\lambda\to\infty} \lambda \cdot \mu\{\eta : M_0(f,\eta) > \lambda\} = 0$.

**Замечание 2** (см. [3], стр. 516 и [11], стр. 51). Если $F$ – гармоническое продолжение в $B$ интегрируемой на $\partial B$ функции $f$, то

$$M_\sigma(F,\eta) \le M(f,\eta), \tag{15}$$

где $M(f,\eta)$ – максимальная функция Харди–Литтлвуда функции $f$. Известно также, что для интегрируемой функции $f$ имеет место

$$\mu\{\eta \in \partial B : M(f,\eta) > \lambda\} = o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty. \tag{16}$$

Следовательно, классы тригонометрических рядов, удовлетворяющих условиям Теорем A2 или Теоремы 2 содержат в себе класс рядов Фурье. Поэтому из Теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

**Теорема 3. Ряд (5) является рядом Фурье некоторой интегрируемой функции $f$ тогда и только тогда, когда ряд (5) почти всюду методом Абеля суммируется к функции $f$ и выполняется (14).**

**Замечание 3.** Ниже мы построим пример тригонометрического ряда гармонической функции, которая удовлетворяет условию (11), но не удовлетворяет условию (6), и формулы (7) и (8) не восстанавливают коэффициенты ряда (5). Таким образом, классы тригонометрических рядов, удовлетворяющих условиям Теоремы A2 или Теоремы 2, содержат в себе ряды Фурье, однако эти классы не содержатся один в другом.

**Замечание 4.** Из условия (14) следует, что почти всюду существует предел $\lim\limits_{\substack{\xi\to\eta\\ \xi\in\Omega_\sigma(\eta)}} F(\xi)$ (см. [12], стр. 297). В Теореме 1 условие (12) дано лишь для указания предельной функции $f$.

**Замечание 5.** Легко проверить, что для ненулевой функции $F(\xi) = P(r,t)$, $\xi = (r,t) \in B$ выполнено

$$\limsup_{\lambda\to\infty} \lambda \cdot \mu\{\eta \in \partial B : M_\sigma(F,\eta) > \lambda\} < \infty$$

и $\lim\limits_{r\to 1-0} F(r\,\eta) = 0$, $\eta \neq (0,1)$. Следовательно, условие (14) необходимо, чтобы имела место формула восстановления (13).

В нижеследующей лемме $\Pi$ является криволинейным прямоугольником $\Pi = \{(r,\theta) : R(1-\alpha) \le r \le R, |\theta - \theta_0| \le \beta\}$, $\max\{\alpha,\beta\} < \frac{1}{2}$.

**Лемма 1.** **Пусть область $D$ со спрямляемой границей $\partial D$ лежит в круге радиуса $R$, $1/2 < R < 1$. Тогда для любого $\xi \in D$ имеем**

$$\int_{\partial D\cap\Pi} K_D(\xi,\eta)\,ds < C\cdot R\cdot \frac{\max\{\alpha,\beta\}}{R-|\xi|}. \tag{17}$$

**Доказательство :** Не умаляя общности можем считать, что $\theta_0 = 0$. Обозначим $\gamma = \max\{\alpha,\beta\}$ и рассмотрим функцию

$$F(r,\theta) = \frac{(R+\gamma)^2 - r^2}{(R+\gamma)^2 - 2r(R+\gamma)\cos\theta + r^2}.$$

Ясно, что функция $F(r,\theta)$ совпадает с ядром Пуассона $P_{R+\gamma}(\xi,\eta)$ при $\eta = (R+\gamma,0)$. Следовательно, функция $F(r,\theta)$ гармонична, неотрицательна в круге радиуса $R+\gamma$. Кроме того, $F(r,\theta)$ непрерывна в $\overline{D}$. Пусть $(r,\theta) \in \Pi$. Тогда, учитывая, что $R(1-\gamma) \le r < R$ и $|\theta| \le \gamma$, получаем

$$\begin{aligned} F(r,\theta) &= \frac{(R+\gamma-r)(R+\gamma+r)}{(R+\gamma-r)^2 + 4r(R+\gamma)\sin^2\vartheta/2} > \\ &> \frac{4\gamma}{(R+1)^2\gamma^2 + 4R(R+1)\sin^2\gamma/2} > \frac{C}{\gamma}. \end{aligned} \tag{18}$$

Полагая $\xi = (r,\theta)$, имеем

$$F(\xi) < \frac{R^2 - r^2}{(R-r)^2} < \frac{2R}{R-r} = \frac{2R}{R-|\xi|}. \tag{19}$$

Так как функции $F$ и $K_D(\xi,\cdot)$ положительны на $\partial D$, то из (18) и (19) получаем

$$\begin{aligned} \frac{2R}{R-|\xi|} &> F(\xi) = \int_{\partial D} F(\eta)\,K_D(\xi,\eta)\,ds > \\ &> \int_{\partial D\cap\Pi} F(\eta)\,K_D(\xi,\eta)\,ds \ge \frac{C}{\gamma}\int_{\partial D\cap\Pi} K_D(\xi,\eta)\,ds. \end{aligned} \tag{20}$$

Наконец, из (20) вытекает (17). Лемма 1 доказана.

**Доказательство Теоремы 1 :** Пусть $\xi$ – произвольная точка из $B$ и $\varepsilon > 0$. Выберем такое $k$, чтобы

$$\lambda_k \cdot \mu\{\eta \in \partial B : M_\sigma(f, \eta) > \lambda_k\} < \varepsilon(1 - |\xi|). \tag{21}$$

Поскольку $\lim_{r \to 1-0} F(r\eta) = f(\eta)$, то можно выбрать множество $E_k$ и число $r_0 < 1$ такие, что $E_k$ является объединением конечного или счётного числа открытых дуг окружности $\partial B$, причём $1 - |\xi| r_0^{-1} > (1 - |\xi|)/2$

$$M_\sigma(f, \eta) \le \lambda_k \quad \text{если} \quad \eta \notin E_k, \tag{22}$$

$$\mu(E_k) < 2\mu\{\eta \in \partial B : M_\sigma(F, \eta) > \lambda_k\}, \tag{23}$$

$$|F(r\eta) - f(\eta)| < \varepsilon \quad \text{если} \quad \eta \notin E_k \quad \text{и} \quad r_0 \le r < 1, \tag{24}$$

$$|F(r^{-1}\eta) - F(\xi)| < \varepsilon \quad \text{если} \quad r_0 \le r < 1. \tag{25}$$

Из (2) и (21)–(23) получаем

$$\left| \int_{\partial B} [f(\eta)]_{\lambda_k} P(\xi, \eta)\, ds - \int_{E_k^c} f(\eta)\, P(\xi, \eta)\, ds \right| = \left| \int_{\partial B} [f(\eta)]_{\lambda_k} P(\xi, \eta)\, ds - \right.$$
$$\left. - \int_{E_k^c} [f(\eta)]_{\lambda_k} P(\xi, \eta)\, ds \right| \le \lambda_k \cdot \mu(E_k) \max P(\xi, \eta) < \lambda_k \cdot \mu(E_k) \frac{1}{1 - |\xi|} < 2\varepsilon. \tag{26}$$

Пусть

$$\varphi(\eta) = \begin{cases} f(\eta), & \text{если} \quad \eta \notin \partial E_k \\ 0, & \text{если} \quad \eta \in \partial E_k. \end{cases} \tag{27}$$

Положим

$$\Phi(\xi) = \int_{\partial B} \varphi(\eta)\, P(\xi, \eta)\, ds. \tag{28}$$

Поскольку $|\varphi(\eta)| \le \lambda_k$, $\eta \in \partial B$, то (см. [3])

$$|\Phi(\xi)| \le \lambda_k, \quad \xi \in B, \tag{29}$$

$$\lim_{r \to 1-0} \Phi(r\eta) = \varphi(\eta) \quad \text{почти всюду на} \quad \partial B.$$

Следовательно, существуют множество $E \subset \partial B$ и число $r_1 \in (r_0, 1)$ такие, что

$$E = \bigcup I_m, \quad \text{где } I_m \text{ – открытые непересекающиеся дуги окружности} \quad \partial B, \tag{30}$$

$$\mu E < 2\mu E_k, \quad E_k \subset E, \tag{31}$$

$$|\Phi(r\eta) - \varphi(\eta)| < \varepsilon, \quad \eta \notin E, \quad r_1 < r < 1. \tag{32}$$

Для $r > r_1$ рассмотрим гармоническую функцию

$$\Psi(\zeta) = \Phi(r\zeta) - F(r\zeta), \quad \zeta \in B. \tag{33}$$

Из (24), (31) и (32) имеем

$$|\Psi(\eta)| < 2\varepsilon, \quad \text{если} \quad \eta \notin E. \tag{34}$$

Из (29) следует, что

$$M_\sigma(\Psi, \eta) < 2\lambda_k, \quad \text{если} \quad \eta \notin E. \tag{35}$$

Построим область $D$ следующим образом. Для каждого $m$ из концов дуги $I_m$ (см. (30)) проведём те касательные к окружности радиуса $\sigma$, которые пересекаются. Из круга отбросим область, ограниченную этими касательными и дугой $I_m$. Полученную область обозначим через $D$. Она имеет спрямляемую границу $L$. Через $L_m$ обозначим ту часть контура $L$, которая лежит в секторе с дугой $I_m$. Очевидно, что $L_m$ лежит в криволинейном прямоугольнике

$$\pi_m = \left\{(r, \theta) : \theta \in I_m,\, 1 - \frac{2|I_m|}{\sigma} \le r \le 1\right\}.$$

Тогда, в силу Леммы 1, имеем

$$\int_{L_m} K_D(\zeta, \eta)\, ds < \frac{C}{\sigma} \cdot \frac{|I_m|}{1 - |\zeta|}. \tag{36}$$

Из (35) следует, что $|\Psi(\zeta)| < 2\lambda_k$ при $\zeta \in L_m$. Поэтому, последовательно применяя (34), (3), (36), (30), (31), (23), (22) и (21), получим

$$\begin{aligned}
|\Psi(r^{-1}\xi)| &= \left|\int_L \Psi(\eta)\, K_D(r^{-1}\xi, \eta)\, ds\right| \le \left|\int_{E^c} \Psi(\eta)\, K_D(r^{-1}\xi, \eta)\, ds\right| + \\
&+ \sum_m \int_{L_m} |\Psi(\eta)|\, K_D(r^{-1}\xi, \eta)\, ds < 2\varepsilon + \\
&+ \sum_m \lambda_k \cdot \frac{C}{\sigma} \cdot \frac{|I_m|}{1 - |r^{-1}\xi|} < 2\varepsilon + \frac{C}{\sigma(1 - |r^{-1}\xi|)} \lambda_k \cdot \mu(E) < C_\sigma \cdot \varepsilon.
\end{aligned}$$

Следовательно (см. (33), (27) и (28)) $|F(\xi) - \int_{\partial B} [f(\eta)]_{\lambda_k} P(\xi, \eta)\, ds| < C_1 \varepsilon$. Отсюда, с учётом (26), получим $|F(\xi) - \int_{\partial B} [f(\eta)]_{\lambda_k} P(\xi, \eta)\, ds| < C\, \varepsilon$. Теорема 1 доказана.

Теперь построим ряд, представляющий гармоническую в единичном круге функцию $F(\xi)$, которая удовлетворяет условиям Теоремы 1, но не удовлетворяет условиям Теоремы А1, и граничные значения которой не интегрируемы в смысле $A$-интегралов. Докажем следующее утверждение.

**Лемма 2.** **Для любых** $h \in (0; 0,01)$ **и** $\varepsilon > 0$ **существует функция** $f(t)$, **определённая на периодическом отрезке** $[-\pi, \pi]$ **такая, что**

$$f(t) = 0, \quad \text{если} \quad |t| > h, \tag{37}$$

$$|f(t)| = \frac{1}{h}, \quad \text{если} \quad |t| \le h, \tag{38}$$

$$M_{0,5}(F, e^{it}) < \varepsilon, \quad \text{если} \quad |t| > 4h, \tag{39}$$

**где** $F$ **– гармоническое продолжение функции** $f$, **т.е.**

$$F(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - t)\, \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos t + r^2}\, dt, \tag{40}$$

$$|F(r, \theta)| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad r < 1 - 4h. \tag{41}$$

**Доказательство :** Нетрудно видеть, что если построить функцию $f$, удовлетворяющую условиям (37), (38), и для которой $|F(r, \theta)| < \varepsilon$ вне криволинейного прямоугольника

$$\Pi_h = \{(r, \theta) : |\theta| < 2h,\ 1 - 2h < r < 1\}, \tag{42}$$

то функция $f$ будет удовлетворять условиям (37) — (41).

Отрезок $[-h, h]$ разделим на $2k$ равные части $\Delta_{km} = [-h + h(m-1)/k; -h + hm/k)$, $m = 1, 2, ..., 2k$, и рассмотрим функцию

$$f_k(t) = \begin{cases} (-1)^{m-1}/h, & \text{если} \quad t \in \Delta_{km}, \\ 0, & \text{если} \quad t \notin [-h, h). \end{cases}$$

Через $F_k(r, \theta)$ обозначим гармоническое продолжение функции $f_k$, а через

$$f_k^{(-1)}(t) = \int_{-h}^{t} f_k(\tau)\, d\tau.$$

Очевидно, что

$$f_k^{(-1)}(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \notin (-h, h), \tag{43}$$

$$0 \le f_k^{(-1)}(t) \le \frac{1}{k} \quad \text{при} \quad t \in [-\pi, \pi]. \tag{44}$$

Учитывая, что при фиксированном $r$ функция $P_r(t) = (1 - r^2)/(1 - 2r\cos t + r^2)$ убывает на $[0, \pi]$ и возрастает на $[-\pi, 0]$, получаем

$$F_k(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)\, df_k^{(-1)}(\theta + t) = \frac{1}{2\pi}(f_k^{(-1)}(\theta + \pi) - f_k^{(-1)}(\theta - \pi)\, P_r(\pi) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} f_k^{(-1)}(\theta + t)\, dP_r(t) + \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} f_k^{(-1)}(\theta + t)\, dP_r(t) = I_1(k) + I_2(k) + I_3(k). \tag{45}$$

Из (44) следует, что при любых $r$ и $\theta$ имеет место следующая оценка

$$|I_1(k)| < \frac{2}{k}. \tag{46}$$

Пусть $|\theta| \geq 2h$ и $1 - 2h \leq r < 1$. Тогда учитывая (43), монотонность функции $P_r(t)$ и теорему о среднем значении для интегралов, для $I_2(k)$ получим

$$|I_2(k)| < \frac{1}{k} P_r(h) = \frac{1}{k}\frac{1-r^2}{(1-r)^2 + 4r\sin^2 h/2} < \frac{1}{k}\cdot\frac{8h}{h^2} = \frac{8}{kh}. \tag{47}$$

В случае $0 \leq r < 1 - 2h$ имеем

$$|I_2(k)| < \frac{1}{k} P_r(0) = \frac{1}{k}\frac{1+r}{(1-r)} < \frac{1}{kh}. \tag{48}$$

Из (47) и (48) следует

$$|I_2(k)| < \frac{8}{kh}, \quad \text{если} \quad (r,\theta) \notin \Pi_h. \tag{49}$$

Аналогично получим

$$|I_3(k)| < \frac{8}{kh}, \quad \text{если} \quad (r,\theta) \notin \Pi_h. \tag{50}$$

Из (45), (46), (49) и (50) следует, что $|F_k(r,\theta)| < 18/(hk)$ для $(r,\theta) \notin \Pi_h$. Для завершения доказательства остаётся выбрать $k$ настолько большим, чтобы $18/(hk) < \varepsilon$. Лемма 2 доказана.

Перейдём к построению примера. Согласно Лемме 2 для $\varepsilon_n = h_n = 2^{-2^n}$, $n = 1, 2, \dots$ существуют функции $f_n(t)$ и их гармонические продолжения $F_n(\xi)$ такие, что

$$f_n(t) = 0, \quad \text{если} \quad |t| > h_n, \tag{51}$$

$$|f_n(t)| = 2^{2^n}, \quad \text{если} \quad |t| \leq h_n, \tag{52}$$

$$M_{0,5}(F_n, e^{it}) < h_n, \quad \text{если} \quad |t| > 4h_n, \tag{53}$$

$$|F_n(r,\theta)| < h_n, \quad \text{если} \quad r < 1 - 4h_n. \tag{54}$$

Из (51) и (52) получаем, что

$$M_{0,5}(F_n, e^{it}) \leq 2^{2^n} \quad \text{для всех} \quad t \tag{55}$$

и

$$M_{0,5}(F_n, e^{it}) = 2^{2^n}, \quad \text{когда} \quad |t| \leq h_n. \tag{56}$$

Из (54) следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(\xi \cdot e^{i2^{-n}})$ равномерно сходится внутри единичного круга. Следовательно, функция $F(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(\xi \cdot e^{i2^{-n}})$ является гармонической внутри единичного круга. Ясно, что

$$\lim_{r \to 1-0} F(re^{it}) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t + 2^{-n}) \quad \text{почти всюду на} \quad [-\pi, \pi].$$

Из неравенства $M_{0,5}(F, \eta) \le \sum_{n=1}^{\infty} M_{0,5}(F_n, \eta)$ и из (55) получаем

$$\begin{gathered}\{\eta \in \partial B : M_{0,5}(F, \eta) > 2^{2^k+1}\} \subset \{\eta \in \partial B : \sum_{n=k+1}^{\infty} M_{0,5}(F_n, \eta) > 2^{2^k+1}\} \subset \\ \subset \bigcup_{n=k+1}^{\infty} \{\eta \in \partial B : M_{0,5}(F_n, \eta) > 2^{2^k+1}\}.\end{gathered} \tag{57}$$

Из (53) и (57) имеем

$$\mu\{\eta \in \partial B : M_{0,5}(F, \eta) > 2^{2^k+1}\} \le \sum_{n=k+1}^{\infty} 4h_n < 8 \cdot 2^{-2^{k+1}}.$$

Следовательно, если положить $\lambda_k = 2^{2^k+1}$, то получим $\lim_{k \to 0} \lambda_k \cdot \mu\{\eta \in \partial B : M_{0,5}(F, \eta) > \lambda_k\} = 0$, т.е. функция $F$ удовлетворяет условиям Теоремы 1. С другой стороны, из (52) имеем

$$\mu\{\eta \in \partial B : M_0(F_n, \eta) > 2^{2^n-1}\} > \mu\{t : |f_n(t)| = 2^{2^n}\} = 2^{-2^n}. \tag{58}$$

Отсюда вытекает, что

$$\mu\{\eta \in \partial B : M_0(F, \eta) > \lambda\} \ne o\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

т.е. функция $F$ не удовлетворяет условиям Теоремы A1. Из (58) следует также, что функция $f$, которая является граничным значением для $F$ не является $A$–интегрируемой. Поэтому функцию $F$ невозможно восстановить применением $A$–интеграла.

**ABSTRACT.** The paper considers harmonic in the unit disk $B$ functions $F(\xi)$, $\xi \in B$, satisfying the condition $\liminf_{\lambda \to \infty} \lambda \cdot \mu\{\eta \in \partial B : M_\sigma(F, \eta) > \lambda\} = 0$, where $M_\sigma(F, \eta)$ is the non-tangential maximal function associated with $F$. Such functions can be restored by radial limiting values by means of certain generalization of $A$-integrals.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Г. М. Голузин, Геометрическая Теория Функций Комплексного Переменного, Москва, 1952.
2. А. Ф. Тиман, В. Н. Трофимов, Введение в Теорию Гармонических Функций, Мир, Москва, 1968.
3. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные Ряды, Москва, АФЦ, 1999.
4. А. Б. Александров, "Об $A$-интегрируемости граничных значений гармонических функций", Мат. Заметки, том 30, № 1, стр. 59 — 72, 1981.
5. Г. Г. Геворкян, "О единственности тригонометрических рядов", Мат. Сборник, том 180, № 11, стр. 1462 — 1474, 1989.
6. Г. Г. Геворкян, "О тригонометрических рядах, суммируемых методом Римана", Мат. Заметки, том 52, № 3, стр. 17 — 34, 1992.
7. Г. Г. Геворкян, "О единственности кратных тригонометрических рядов", Мат. Сборник, том 184, № 11, стр. 93 — 130, 1993.
8. С. Ш. Галстян, "О единственности аддитивных функций сегмента и тригонометрических рядов", Мат. Заметки, том 56, № 4, стр. 38 — 47, 1994.
9. G. G. Gevorkian, "An inequality for harmonic functions and uniqueness of Abel summable trigonometric series", East. J. on Approx., vol. 4, no. 3, pp. 433 — 434, 1998.
10. C. Fefferman, E. M. Stein, "$H_p$-spaces of several variables", Acta Math., vol. 129, pp. 137 — 193, 1972.
11. М. Гусман, Дифференцирование в $\mathbb{R}^n$, Мир, Москва, 1978.
12. А. Зигмунд, Тригонометрические Ряды, том 2, Мир, Москва, 1965.


17 сентября 2001

Ереванский государственный университет
E-mail : GGG@arminco.com