О ДВУМЕРНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ЭРМИТА

О. Геворгян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 36, № 6, 2001

В работе рассматривается интерполяция Эрмита двумерными алгебраическими полиномами общего порядка $\leq n$. Интерполяционные параметры суть значения функции и её частных производных до порядка $n_\nu - 1$ в точках $z_\nu = (x_\nu, y_\nu)$, $\nu = 1, \ldots, s$, где n_ν – кратность точки z_ν. Регулярность интерполяционной схемы $\{n_1, \ldots, n_s; n\}$ изучается с помощью кубических преобразований.

§1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РАССУЖДЕНИЯ

Определим схему $\mathcal{N} = \{n_1, \ldots, n_s; n\}$ как последовательность неотрицательных целых чисел. Натуральные числа $n_1, \ldots, n_s$ предполагаются невозрастающими, n называется порядком, а s – длиной $\mathcal{N}$. Через $\mathcal{S}$ обозначим множество всех схем. Для произвольного числа нулей положим $\{n_1, \ldots, n_s, 0, \ldots, 0; n\} = \{n_1, \ldots, n_s; n\}$. Схема $\mathcal{N} \in \mathcal{S}$ называется точной или интерполяционной схемой (пишем $\mathcal{N} \in \mathcal{IS}$), если

$$\sum_{v=1}^{s} \overline{n_v} = \overline{n+1}, \tag{1.1}$$

где $\overline{m} = 1 + \ldots + m$.

Интерполяционные схемы с $s = 1$, т.е. схемы $\{n+1; n\}$, $n = 0, 1, \ldots$, называются **схемами Тейлора**. Пусть $\pi_n(\mathbb{R}^2)$ – пространство двумерных полиномов общего порядка $\leq n$.

Определение 1.1. Пусть даны интерполяционная схема $\mathcal{N} = \{n_1, \ldots, n_s; n\} \in \mathcal{IS}$, множество узлов $\mathcal{Z} = \{z_\nu = (x_\nu, y_\nu)\}_{\nu=1}^{s} \subset \mathbb{R}^2$ и набор значений $\Lambda = \{\lambda_{i,j,\nu};\ i + j < n_\nu, \nu = 1, \ldots, s\}$. Интерполяционная (регулярная) задача Эрмита $(\mathcal{N}, \mathcal{Z})$ состоит в нахождении (единственного) полинома $P \in \pi_n(\mathbb{R}^2)$, удовлетворяющего условиям

$$\left.\frac{\partial^{i+j} P}{\partial x^i\, \partial y^j}\right|_{z=z_\nu} = \lambda_{i,j,\nu}, \quad \nu = 1, \ldots, s, \tag{1.2}$$

или коротко $D^{\mathcal{N}} P\big|_{\mathcal{Z}} = \Lambda$. Ясно, что (1.1) означает, что число интерполяционных условий в (1.2) равно $\dim \pi_n\left(\mathbb{R}^2\right)$. В узлах с $n_\nu = 0$ интерполяционное условие отсутствует. Обозначим через $d_{\mathcal{N}}(\mathcal{Z}) := d_{\mathcal{N}}(x_1, y_1, \ldots, x_s, y_s)$ детерминант системы линейных уравнений (1.2) (относительно неизвестных коэффициентов P), который состоит из строк :

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i\, \partial y^j}\left[1, x_\nu, y_\nu, \ldots, x_\nu^n, x_\nu^{n-1} y_\nu, \ldots, y_\nu^n\right]; \quad i+j < n_\nu, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Замечание 1.2. В [3] доказано, что для $\mathcal{N} \in \mathcal{IS}$ задача $(\mathcal{N}, \mathcal{Z})$ сингулярна (нерегулярна) тогда и только тогда, когда существует полином P такой, что

$$P \in \pi_n\left(\mathbb{R}^2\right), \quad P \neq 0, \quad D^{\mathcal{N}} P\big|_{\mathcal{Z}} = 0. \tag{1.3}$$

Так как $d_{\mathcal{N}}(\mathcal{Z})$ – полином со значениями $x_1, y_1, \ldots, x_s, y_s$, то регулярность проблемы $(\mathcal{N}, \mathcal{Z})$ для некоторого $\mathcal{Z}$ влечёт её регулярность для почти всех $\mathcal{Z} \in \mathbb{R}^{2s}$ (относительно меры Лебега в $\mathbb{R}^{2s}$).

Замечание 1.3. (см. [3]) Следующие утверждения эквивалентны для произвольного $\mathcal{N} \in \mathcal{S}$:

(i) $n_\nu \leq n$ для $\nu = 1, \ldots, s$,

(ii) существуют множество узлов $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^2$ и полином P такие, что имеет место (1.3).

Отсюда, в частности следует, что схема Тейлора – единственная интерполяционная схема, которая регулярна при любом множестве узлов (см. [6] и [7]).

Ввиду Замечания 1.2, регулярность и сингулярность задачи $(\mathcal{N}, \mathcal{Z})$ можно определить в более общем случае, не требуя интерполяционности схемы $\mathcal{N}$.

Определение 1.4. Задача $(\mathcal{N}, \mathcal{Z})$ называется сингулярной, если существует полином P, удовлетворяющий (1.3), в противном случае она называется регулярной. Скажем, что схема $\mathcal{N}$

(i) регулярна, если задача $(\mathcal{N}, \mathcal{Z})$ регулярна для некоторого множества узлов $\mathcal{Z}$,

(ii) сингулярна, если $(\mathcal{N}, \mathcal{Z})$ сингулярна для любого множества узлов $\mathcal{Z}$.

Обозначим через $\mathcal{RS}$ множество всех регулярных схем. Из Определения 1.4 и Замечания 1.2 имеем

Замечание 1.5. Интерполяционная схема $\mathcal{N}$ регулярна тогда и только тогда, когда существует множество узлов $\mathcal{Z} = \{z_\nu\}_{\nu=1}^{s}$ такое, что $d_{\mathcal{N}}(\mathcal{Z}) \neq 0$.

Проблема полного описания регулярных и сингулярных схем остается открытой. Определим следующий класс схем

$$LC := \left\{ \mathcal{M} = \{m_1, \ldots, m_s; m\} \in \mathcal{S}; \quad \sum_{\nu=1}^{s} \overline{m_\nu} < \overline{m+1} \right\}.$$

Для схем $\mathcal{N} = \{n_1, \ldots, n_s; n\}$ и $\mathcal{M} = \{m_1, \ldots, m_s; m\}$ обозначим

$$\mathcal{N} + \mathcal{M} := \{n_1 + m_2, \ldots, n_s + m_s; n + m\}.$$

Определение 1.6. (см. [5]) Схема $\mathcal{N}$ называется числовой кривой, если существует множество $M \subset LC$ такое, что

$$\mathcal{N} = \sum_{\mathcal{M} \in M} \mathcal{M}. \tag{1.4}$$

Легко проверить, что числовые кривые являются сингулярными схемами [5].

Гипотеза 1.7 (см. [1], [8]). Любая сингулярная схема является числовой кривой. (Верна при ограничении, что существуют самое большее 9 узлов с кратностями ≥ 2, см. [2]).

Определение 1.8 (см. [5]). Пусть $\mathcal{N} = \{n_1, \ldots, n_s; n\} \in \mathcal{S}$.

(i) Если $n_1 \leq n$, $n_2 \leq n$ и $n_1 + n_2 \geq n + 1$, то схема

$$\mathcal{N}^\times = \mathcal{N}^\times_{1,2} = \{n - n_2, n - n_1, n_3, \ldots, n_s; 2n - n_1 - n_2\}$$

называется редукцией $\mathcal{N}$ относительно первых двух членов,

(ii) если

$$n_i + n_j \leq n, \qquad 1 \leq i \leq j \leq 3, \tag{1.5}$$

то $\mathcal{N}^* = \mathcal{N}^*_{1,2,3} =$

$$= \{n - n_2 - n_3, n - n_1 - n_3, n - n_1 - n_2, n_4, \ldots, n_s; 2n - n_1 - n_2 - n_3\}$$

называется квадратичным преобразованием $\mathcal{N}$ относительно первых трех членов. Легко проверить, что $\mathcal{N}^\times = \mathcal{N}^\times_{1,2} = \{n_1 - r, n_2 - r, n_3, \ldots, n_s; n - r\}$,

$$\mathcal{N}^* = \mathcal{N}^*_{1,2,3} = \{n_1 - t, n_2 - t, n_3 - t, n_4, \ldots, n_s; n - t\},$$

где $r = n_1 + n_2 - n$ и $t = n_1 + n_2 + n_3 - n$.

Редукция и квадратичное преобразование относительно других членов $\mathcal{N}$ определяется аналогично. Обозначение $\mathrm{supp}\mathcal{Q} = \{i, j, k\}$ означает, что $\mathcal{Q}$ является квадратичным преобразованием относительно членов с индексами i, j, k.
Скажем, что квадратичное преобразование $\mathcal{Q}$ положительное (для $\mathcal{N}$), если $\deg \mathcal{Q}(\mathcal{N}) < \deg \mathcal{N}$, т.е. $t > 0$. Отметим, что положительность $\mathcal{Q}$ (для $\mathcal{N}$) влечет

$$\mathrm{supp}\mathcal{Q} \subset \mathrm{supp}\mathcal{N}. \tag{1.6}$$

Следующая теорема доказана в [2].

Теорема 1.9. Пусть $\mathcal{N} = \{n_1, \ldots, n_s; n\} \in \mathcal{S}$.

(i) Если $n_1 \leq n$, $n_2 \leq n$ и $n_1 + n_2 = n + r \geq n + 1$, то схемы $\mathcal{N}$ и $\mathcal{N}^\times$ сингулярны или регулярны одновременно.

(ii) Если $n_i + n_j \leq n$ для $1 \leq i \leq j \leq 3$, то схемы $\mathcal{N}$ и $\mathcal{N}^*$ сингулярны или регулярны одновременно.

Эта теорема приводит рассмотрение произвольной схемы к следующим двум случаям :

1) $n_{\nu_0} \geq n + 1$ для некоторого ν_0,

2) $n_i + n_j + n_k \leq n$ для $1 \leq i < j < k \leq s$.

Ясно, что в первом случае схема регулярна (см. Замечание 1.3).

Определение 1.10. Схема $\mathcal{N} = \{n_1, \ldots, n_s; n\} \in \mathcal{S}$, удовлетворяющая вышеупомянутому условию 2), называется базисной схемой. Множество всех базисных схем обозначим через $\mathcal{BS}$.

Гипотеза 1.11 ([1]). Базисная схема регулярна тогда и только тогда, когда она принадлежит $\mathcal{LC}$. (Верна в случае, когда

$$\sum_{\{\nu;\ n_\nu > 1\}} n_\nu \leq 3n, \tag{1.7}$$

Гипотезы 1.7 и 1.11 эквивалентны, см. [3], [5]).

Определение 1.12. Схемы $\mathcal{N}, \mathcal{M}$ называются квадратично эквивалентными ($\mathcal{N} \sim \mathcal{M}$), если каждую из них можно получить из другой с помощью квадратичных преобразований.

Определение 1.13. Схема, квадратично эквивалентная некоторой базисной схеме, называется e-базисной схемой.

Обозначим через $\mathcal{BS}^* \supset \mathcal{BS}$ класс всех e-базисных схем, через $\mathcal{BS}_0$ множество базисных схем, удовлетворяющих условию (1.7), а через $\mathcal{BS}_0^*$ – класс схем, квадратично эквивалентных некоторой базисной схеме из $\mathcal{BS}_0$.

§2. КУБИЧЕСКИЕ СХЕМЫ И КУБИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Пусть $\mathcal{C}_+ := \{z = (x, y)\,;\, y = x^3,\ x > 0\}$, $I \subset \{1, \ldots, s\}$ и $J = \{1, \ldots, s\} \setminus I$.

Определение 2.1. Скажем, что

$$T_I := T_I\mathcal{N} = \{t_1, \ldots, t_s; t\} \tag{2.1}$$

является I-кубическим преобразованием схемы $\mathcal{N} \in \mathcal{IS}$, если $t_\nu = n_\nu - 1$ при $\nu \in I$, $t_\nu = n_\nu$ при $\nu \in J$ и $t = n - 3$.

Определение 2.2. Интерполяционная схема $\mathcal{N} \in \mathcal{IS}$ называется I-кубически регулярной, если для любого множества точек $\mathcal{Z}_1 = \{z_\nu; \nu \in I\} \subset \mathcal{C}_+$ существует множество $\mathcal{Z}_2 = \{z_\nu; \nu \in J\}$ такое, что для множества узлов $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_1 \cup \mathcal{Z}_2$ интерполяционная задача $(\mathcal{N}, \mathcal{Z})$ регулярна.

Через I-$\mathcal{CRS}$ обозначим множество всех I-кубически регулярных схем.

Определение 2.3. Интерполяционная схема $\mathcal{N} = \{n_1, \ldots, n_s; n\} \in \mathcal{IS}$ называется кубической, если для некоторого множества натуральных чисел $I \subset \{1, \ldots, s\}$

$$\sum_{\nu \in I} n_\nu = 3n. \tag{2.2}$$

Обозначим через $\mathcal{CS}$ множество всех кубических схем, а $\mathcal{N}(I) \in \mathcal{CS}$ означает, что (2.2) выполняется для множества I.

Легко проверить, что для кубической схемы $\mathcal{N}(I) \in \mathcal{CS}$ I-кубическое преобразование $T_I\mathcal{N}$ является интерполяционной схемой.

В этой статье обобщается следующий результат (см. [3], Теорема 3.3).

Теорема 2.4. (Геворкян, Акопян, Саакян). Пусть $\mathcal{N} = \{n_1, \ldots, n_s; n\} \in \mathcal{BS}_0$. Тогда $\mathcal{N} \in I - \mathcal{CRS}$ для любого множества $I \subset \{1, \ldots, s\}$, удовлетворяющего условию $I \supset \{\nu; n_\nu > 1\}$ и $\sum_{\nu \in I} n_\nu \le 3n$.

Докажем следующую основную лемму.

Лемма 2.5. Пусть $\mathcal{N}(I) \in \mathcal{CS}$ и для некоторого множества узлов $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_1 \cup \mathcal{Z}_2$, где $\mathcal{Z}_1 \subset \mathcal{C}_+$ и

$$\mathcal{Z}_2 \cap \mathcal{C}_+ = \emptyset \tag{2.3}$$

выполняются условия (1.3). Тогда

$$P(x, y) = \left(y - x^3\right) G(x, y), \tag{2.4}$$

где

$$G \in \pi_n\left(\mathbb{R}^2\right), \quad G \neq 0 \quad \text{и} \quad D^{T_I \mathcal{N}} G\big|_Z = 0. \tag{2.5}$$

Доказательство : Легко видеть, что полином $q(x) := P\left(x, x^3\right) \in \pi_{3n}(\mathbb{R})$ имеет нуль порядка n_ν в точке x_ν $(\nu \in I)$. Поэтому

$$q(x) = C \prod_{\nu \in I} (x - x_\nu)^{n_\nu} = Cx^{3n} - Cx^{3n-1} \sum_{\nu \in I} n_\nu x_\nu + \ldots.$$

С другой стороны, поскольку полином $q(x)$ не содержит мономы вида x^{3n-1}, заключаем, что $C = 0$. Поэтому, $P\left(x, x^3\right) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Это означает, что имеет место (2.4), и согласно (1.3) и (2.3), полином G удовлетворяет соотношениям (2.5). Лемма 2.5 доказана.

Теорема 2.6. Пусть $\mathcal{N}(I) \in \mathcal{CS}$. Тогда $\mathcal{N} \in I\text{-}\mathcal{CRS}$ тогда и только тогда, когда $T_I\mathcal{N} \in I\text{-}\mathcal{CRS}$.

Доказательство : Пусть $Z = Z_1 \cup Z_2$ - множество узлов такое, что $(T_I\mathcal{N}, Z)$ регулярна, и пусть $d_{T_I\mathcal{N}}(Z)$ - детерминант регулярной интерполяционной задачи $(T_I\mathcal{N}, Z)$. Согласно Замечанию 1.5 имеем $d_{T_I\mathcal{N}}(Z) \neq 0$. Так как $d_{T_I\mathcal{N}}(Z)$ - полином, то он отличен от нуля в окрестности множества узлов Z_2. Поэтому, не ограничивая общности, можно предположить, что имеет место (2.3).

Предположим, что задача $(\mathcal{N}, Z)$ сингулярна. Тогда существует полином $P(x, y)$, удовлетворяющий (1.3). Применяя Лемму 2.5 заключаем, что $P(x, y)$ удовлетворяет (2.4) и (2.5). Это противоречит условию, что интерполяционная задача $(T_I\mathcal{N}, Z)$ регулярна.

Обратное утверждение доказывается аналогично. Действительно, предположим, что $(T_I\mathcal{N}, Z)$ сингулярна, где $Z = Z_1 \cup Z_2$, $Z_1 \subset C_+$ и соотношение (2.3) выполняется. Это означает, что существует полином G, удовлетворяющий условиям (2.5). Тогда полином, определенный в (2.4), удовлетворяет (1.3), и согласно Замечанию 1.2 интерполяционная задача $(\mathcal{N}, Z)$ сингулярна. Теорема 2.6 доказана.

В частности, справедлива

Теорема 2.7. Пусть $\mathcal{N}(I) = \{n_1, \ldots, n_s; n\} \in \mathcal{CS} \cap \mathcal{BS}$, $T_I\mathcal{N} \in \mathcal{BS}$ и

$$\sum_{n_\nu > 1} n_\nu \leq 3n + p - 9, \tag{2.6}$$

где $p = \#\{\nu \in I; n_\nu > 1\}$. Тогда $\mathcal{N} \in I - \mathcal{CRS}$.

Доказательство : Пусть $I' = I \cup \{\nu \in J; n_\nu > 1\}$. Из (2.1) и (2.6) получим

$$\sum_{\{\nu\in I'; n_\nu>1\}} t_\nu \le \sum_{\nu\in I}(n_\nu - 1) + \sum_{\{\nu\in J; n_\nu>1\}} n_\nu = \sum_{n_\nu>1} n_\nu - p \le 3n - 9 = 3t.$$

Следовательно, $T_{I'}\mathcal{N} \in \mathcal{BS}_0$. Согласно Теореме 2.4 $T_{I'}\mathcal{N} \in I' - \mathcal{CRS}$. Далее, так как $I \subset I'$, то имеем $T_I\mathcal{N} \in I - \mathcal{CRS}$. Согласно Теореме 2.6 заключаем, что $\mathcal{N} \in I - \mathcal{CRS}$. Теорема 2.7 доказана.

Заметим, что множество схем, удовлетворяющих условиям Теоремы 2.7, содержит класс $\mathcal{BS}_0$. Например, схема $\mathcal{N} = \{\underbrace{4,\dots,4}_{5}, 3,3,3,3,2,2,2,\underbrace{1,\dots,1}_{8}; 12\}$ удовлетворяет (2.6) при $I = \{1,\dots,11\}$, но $\mathcal{N} \notin \mathcal{BS}_0$.

В связи с Теоремой 2.7 возникает следующий вопрос : когда I-кубическое преобразование кубической схемы $\mathcal{N}(I)$ принадлежит классам $\mathcal{BS}$ или $\mathcal{BS}^*$?

Обозначим через $\mathcal{CS}_0$ класс кубических схем, для которых $I_0 = \{1,\dots,9\} \subset I$.

Теорема 2.8. Если $\mathcal{N}(I) = \{n_1,\dots,n_s;n\} \in \mathcal{CS}_0 \cap \mathcal{BS}$ и $n_{10} > 1$, то $T_I\mathcal{N} \in \mathcal{BS}^*$.

Доказательство : Для произвольной схемы $\mathcal{M} = \{m_1,\dots,m_s;m\}$ обозначим

$$[i,j,k]_{\mathcal{M}} := m_i + m_j + m_k = \{max(m_\mu + m_\nu + m_\kappa),\ 1 \le \mu < \nu < \kappa \le s\}.$$

Пусть $\nu_0 = min\,\{\nu; \nu \in J\}$. Согласно (2.2) (мы опускаем индекс I)

$$T = T_I = \{n_1 - 1, \dots, n_{\nu_0 - 1} - 1, t_{\nu_0}, \dots, t_s; n-3\}. \tag{2.7}$$

Сначала отметим, что если $n_1 + n_2 + n_3 \le n - 3$, то $[i,j,k]_T \le n-3$, и поэтому $T \in \mathcal{BS}$. Следовательно, нужно доказать только случай, когда $n_1+n_2+n_3 \ge n-2$. Ясно, что $t_{\nu_0} = n_{\nu_0} \ge t_i$ при $i = \nu_0 + 1, \dots, s$. При $n_3 > n_{\nu_0}$ имеем $T \in \mathcal{BS}$, поскольку $[i,j,k]_T \le n_1 - 1 + n_2 - 1 + n_3 - 1 \le n-3$. Следовательно, можно предположить, что $n_3 = n_{\nu_0} =: a$, $n_1 = a + b$, $n_2 = a + c$, $b \ge c \ge 0$ (отметим, что $a > 1$, поскольку $n_{10} > 1$). Учитывая (2.7), получим представления

$$\mathcal{N} = \{a+b, a+c, \underbrace{a,\dots,a}_{\nu_0-2}, n_{\nu_0+1}, \dots, n_s; n\}, \tag{2.8}$$

$$T = \{a+b-1, a+c-1, \underbrace{a-1,\dots,a-1}_{\nu_0-3}, a, t_{\nu_0+1}, \dots, t_s; n-3\}. \tag{2.9}$$

Допустим, что $T \notin \mathcal{BS}$. Имеем

$$[i,j,k]_T > n-3. \tag{2.10}$$

Так как $\mathcal{N} \in \mathcal{BS}$, то обозначив $d := n-(n_1+n_2+n_3)$ и используя (2.10), получим $0 \le d \le 2$ и

$$3a+b+c=n-d. \tag{2.11}$$

Пусть $d=0$. Если $c \ge 1$, то из (2.9) получим $[i,j,k]_T = [1,2,\nu_0]_T = 3a+b+c-2 = n-2$. Это показывает, что положительное квадратичное преобразование $\mathcal{Q}^*$ с $\operatorname{supp}\mathcal{Q}^* = \{1,2,\nu_0\}$, можно применить к T. Пусть

$$T^{(*)} := \mathcal{Q}^*T = \{a+b-2, a+c-2, \underbrace{a-1,\ldots,a-1}_{\nu_0-2}, t_{\nu_0+1},\ldots,t_s; n-4\}. \tag{2.12}$$

Предположим, что $c>1$. Так как $t_\nu \le n_{\nu_0} = a$ при $\nu=\nu_0+1,\ldots,s$, из (2.12) и (2.11) имеем $[i,j,k]_{T^{(*)}} \le 3a+b+c-4 = n-4$. Это означает, что $T^{(*)} \in \mathcal{BS}$, и поэтому $T \in \mathcal{BS}^*$, откуда следует результат в случае $c>1$.

Пусть теперь $b>0$ и $c \le 1$. Не умоляя общности можно предположить, что $a = t_{\nu_0} \ge \ldots \ge t_s$. При $t_{\nu_0+1} < a$, из (2.12) следует, что $T \in \mathcal{BS}^*$, поэтому достаточно доказать случай, когда $t_{\nu_0+1} = \ldots = t_{\nu_0+q} = a$, $q \ge 1$ и $t_{\nu_0+q+1} < a$. Из (2.9) и (2.12) получаем

$$T^{(0)} = \{a+b-1-c, \underbrace{a-1,\ldots,a-1}_{\nu_0-2+c}, \underbrace{a,\ldots,a}_{q+1-c}, t_{\nu_0+q+1},\ldots,t_s; n-3-c\}. \tag{2.13}$$

Здесь $T^{(0)} = T^{(*)}$ при $c=1$ и $T^{(0)} = T$ при $c=0$.

Пусть $q = 2\beta+\gamma$, где β – неотрицательное целое число, а $\gamma = 0$ или 1. Для произвольного r, $1 \le r \le \beta$, обозначим $T^{(r)} = \left\{t_1^{(r)},\ldots,t_s^{(r)}; t^{(r)}\right\} := \mathcal{Q}_r^c T^{(r-1)}$, где $\mathcal{Q}_r^c$ – квадратичное преобразование с $\operatorname{supp}\mathcal{Q}_r^c = \{1, \nu_0+c+2r-2, \nu_0+c+2r-1\}$. При любом u, $0 \le u \le \beta$, имеем $t^{(u)} = n-3-c-(2-c)u$ и

$$[i,j,k]_{T^{(u)}} = [1, \nu_0+c+2u, \nu_0+c+2u+1]_{T^{(u)}} = 3a+b-1-c-(2-c)u.$$

Отсюда следует, что $\mathcal{Q}_r^c$ является положительным квадратичным преобразованием с $\deg \mathcal{Q}_r^c = [i,j,k]_{T^{(r-1)}} - t^{(r-1)} = n-c-1-c-(2-c)(r-1)-(n-3-c-(2-c)(r-1)) = 2-c$. Мы использовали следующее неравенство, которое докажем позже :

$$t_1^{(1)} \ge \ldots \ge t_1^{(\beta)} \ge a+\gamma. \tag{2.14}$$

Таким образом, $T^{(\beta)} = \{a+b-1-c-(2-c)\beta,$

$$\underbrace{a-1,\ldots,a-1}_{\nu_0-2+c}, \underbrace{a-2+c,\ldots,a-2+c}_{2\beta}, \underbrace{a,\ldots,a}_{1-c+\gamma}, t_{\nu_0+q+1},\ldots,t_s; t^{(\beta)}\}.$$

Пусть теперь $c = 1$. Имеем $[i,j,k]_{T^{(\beta)}} \leq a + b - 2 - \beta + 2a - 1 = n - 4 - \beta = t^{(\beta)}$, откуда следует $T^{(\beta)} \in BS$, и поэтому $T \in BS^*$.

Рассмотрим случай $c = 0$. Используя (2.14) при $\gamma = 1$, получим

$$[i,j,k]_{T^{(\beta)}} = [1, \nu_0 + q - 1, \nu_0 + q]_{T_1^{(\beta)}} = 3a + b - 1 - 2\beta = n - 1 - 2\beta = t^{(\beta)} + 2$$

и при $\gamma = 0$ $[i,j,k]_{T^{(\beta)}} = [1, 2, \nu_0 + q]_{T^{(\beta)}} = 3a + b - 2 - 2\beta = n - 2 - 2\beta = t^{(\beta)} + 1$. Это означает, что положительное квадратичное преобразование Q^γ с $\mathrm{supp}Q^\gamma = \{1, \nu_0 + q - 1, \nu_0 + q\}$ при $\gamma = 1$, $\mathrm{supp}Q^\gamma = \{1, 2, \nu_0 + q\}$ при $\gamma = 0$ и $\deg Q^\gamma = 1 + \gamma$ можно применить к $T^{(\beta)}$. Положим $T^{(\gamma)} = \left\{t_1^{(\gamma)}, \ldots, t_s^{(\gamma)}; t^{(\gamma)}\right\} := Q^\gamma T^{(\beta)}$. Допустим теперь, что

$$t_1^{(\gamma)} \geq a - 1. \tag{2.15}$$

Имеем $[i,j,k]_{T^{(\gamma)}} = [1,2,3]_{T^{(\gamma)}} = 3a + b - 3 - 2\beta - 1 - \gamma = t^{(\gamma)}$. Отсюда следует, что $T^{(\gamma)} \in BS$. Итак, имеем $T \in BS^*$. Для завершения доказательства в случае $b > 0$, $d = 0$ остается доказать (2.14) и (2.15). Достаточно установить неравенство $b \geq q + 1$.

Так как T - интерполяционная схема, в силу (1.1) и (2.13) имеем

$$\overline{a + b - 1} + (q + 1)\,\overline{a} + (\nu_0 - 2)\,\overline{a - 1} \leq \overline{n - 2}. \tag{2.16}$$

После несложных вычислений получаем $4b \geq (a+1)q + (\nu_0 - 9)(a - 1) + 2$. Теперь покажем, что правая часть последнего неравенства больше или равно $4(q + 1)$, т.е. $(a - 3)q + (\nu_0 - 9)(a - 1) \geq 2$. Для $a \geq 3$ это очевидно, поскольку $\nu_0 > 9$. Для $a = 2$ из (2.16) имеем $\overline{b + 1} + 3(q + 1) + \nu_0 - 2 \leq \overline{b + 4}$, и следовательно $b \geq q + \dfrac{\nu_0 - 8}{3}$, откуда вытекает $b \geq q + 1$. Это завершает доказательство Теоремы 2.8 для $b > 0$ и $d = 0$.

Теперь предположим, что $b = 0$ и $d = 0$. В силу (2.8) имеем $3a = n$, которое невозможно, так как $\nu_0 > 9$.

Допустим, что $d = 1$. Из (2.10) следует, что $n_{\nu_0 + 1} = a$. Если $c \geq 1$, то из (2.9) и (2.11) поучим $[i,j,k]_T = [1, 2, \nu_0]_T = 3a + b + c - 2 = n - 3$, и поэтому $T \in BS$.

Если $c = 0$ и $b \geq 1$, из (2.13) и (2.11) получим $[i,j,k]_T = [1, \nu_0, \nu_0 + 1]_T = 3a + b - 1 = n - 2$. Доказательство этого случая аналогично доказательству в случае $d = 0$, $b \geq 1$, $c = 1$.

Если $c = 0$ и $b = 0$, из (2.11) получим $3a = n - 1$. Учитывая (2.10) получим $n_{\nu_0} + 1 = a$. Используя (1.1) получим $(\nu_0 + 1)\overline{a} \leq \overline{n + 1}$. Отсюда следует

$1 < a \leq 6/(\nu_0 - 8)$, которое возможно только при $a = 3$, $\nu_0 = 10$ и $a = 2$, $\nu_0 = 11$. Следовательно, для схем $\mathcal{N}$ с такими параметрами имеем $T\mathcal{N} \in BS$. Это завершает доказательство в случае $d = 1$.

Остается рассмотреть случай $d = 2$. Легко проверить, что $T \in BS$, если $bc > 0$. Поэтому предположим, что $b = c = 0$. Из (2.11) имеем $3a = n - 2$. Отсюда и из (2.10) вытекает $n_{\nu_0+1} = n_{\nu_0+2} = a$. Тогда, используя (1.1) получим $(\nu_0 + 2)\overline{a} \leq \overline{n+1}$. Следовательно, $1 < a \leq 12/(\nu_0 - 7)$, которое возможно только в следующих трех случаях :

$$1)\, a = 4,\ \nu_0 = 10; \quad 2)\, a = 3,\ \nu_0 \leq 11; \quad 3)\, a = 2,\ \nu_0 \leq 13. \tag{2.17}$$

Легко проверить, что для всех схем $\mathcal{N}$, удовлетворяющих одному из условий (2.17), за исключением $\mathcal{N} = \{\underbrace{2, \ldots, 2}_{15}; 8\}$, имеем $T\mathcal{N} \in BS$. Для $\mathcal{N} = \{\underbrace{2, \ldots, 2}_{15}; 8\}$ имеем $T\mathcal{N} = \{\underbrace{1, \ldots, 1}_{12}, 2, 2, 2; 5\} \in BS^*$. Теорема 2.8 доказана.

Автор выражает благодарность профессорам А. Акопяну и А. Саакяну за полезные обсуждения.

ABSTRACT. **The paper considers Hermite interpolation by bivariate algebraic polynomials of total degree $\leq n$. The interpolation parameters are the values of a function and its partial derivatives up to some order $n_\nu - 1$ at the points $z_\nu = (x_\nu, y_\nu)$, $\nu = 1, \ldots, s$, where n_ν is the multiplicity of z_ν. Regularity of interpolation scheme $\{n_1, \ldots, n_s; n\}$ is studied using cubic transformations.**

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. Акопян, О. Геворгян, А. Саакян, "О двумерной интерполяции Эрмита", Матем. заметки, том 48, стр. 137 — 139, 1990.
2. А. Акопян, О. Геворгян, А. Саакян, "О двумерной полиномиальной интерполяции", Мат. сборник, том 183, стр. 111 — 126, 1992.
3. H. Gevorgian, H. Hakopian and A. Sahakian, "On the bivariate Hermite interpolation problem", Constructive Approx., vol. 11, pp. 23 — 36, 1995.
4. H. Gevorgian, H. Hakopian and A. Sahakian, "Numerical curves and their application to algebraic curves", Studia Math., vol. 121, pp. 249 — 275, 1996.
5. H. Gevorgian, H. Hakopian and A. Sahakian, "Bivariate Hermite interpolation and numerical curves", J. Approx. Theory, vol. 85, pp. 297 — 317, 1996.
6. R-Q. Jia and A. Sharma, "Solvability of some multivariate interpolation problems", J. Reine Angew. Math., vol. 421, pp. 73 — 81, 1991.
7. G. G. Lorentz, R. A. Lorentz, Multivariate Interpolation, Lecture Notes in Math., vol. 1105, pp. 136 — 144, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
8. S. H. Paskov, "Singularity of bivariate interpolation", J. Approx. Theory, vol. 75, pp. 50 — 67, 1992.

18 мая 2001

Ереванский государственный университет