

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ В ПРОСТРАНСТВАХ С ВЕСОМ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

Г. М. Айрапетян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 36, № 6, 2001

Пусть B_1 – класс гармонических функций $u(z)$ в верхней комплексной полуплоскости, удовлетворяющих условию $|u(z)| < M \exp |z|^\gamma$, $\gamma < 1$, $\operatorname{Im} z > y_0 > 0$, где M – постоянная, зависящая от y_0 . В работе рассматривается задача Дирихле в B_1 в следующей постановке : найти действительнзначную гармоническую функцию $u(x, y) \in B_1$, удовлетворяющую граничному условию $\lim_{y \rightarrow +0} \|u(x, y) - f(x)\|_{L^1(\rho)} = 0$, где $\rho(x)$ – весовая функция из некоторого класса, а $f(x) \in L^1(\rho)$ – действительнзначная функция. Для любой функции $f(x) \in L^1(\rho)$ задача разрешима и все решения соответствующей однородной задачи определяются в явном виде.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть B_1 — класс гармонических функций $u(z)$ в верхней полуплоскости $G^+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, удовлетворяющих условию

$$|u(z)| < M \exp |z|^\gamma, \quad \gamma < 1, \quad \operatorname{Im} z > y_0 > 0,$$

где M – постоянная, зависящая, вообще говоря, от y_0 . Рассмотрим задачу Дирихле в B_1 в следующей постановке : найти действительнзначную гармоническую функцию $u(x, y) \in B_1$, удовлетворяющую граничному условию

$$\lim_{y \rightarrow +0} \|u(x, y) - f(x)\|_{L^1(\rho)} = 0, \tag{1}$$

где

$$\rho(x) = (1 + |x|)^{-n_0} \prod_{k=1}^m \frac{|x - x_k|^{n_k}}{(|x| + 1)^{n_k}}, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

– весовая функция такая, что n_k , $k = 0, 1, \dots, m$ – произвольные натуральные числа, $n = n_1 + \dots + n_m$, а $f(x) \in L^1(\rho)$ – действительнзначная функция.

Целью работы является доказательство разрешимости задачи для произвольной функции $f(x) \in L^1(\rho)$ и определение в явном виде всех решений однородной задачи (при $f \equiv 0$).

Граничная задача Римана в классах $L^p(\rho) \subset L^1$, $1 < p < \infty$ в классической постановке исследована многими авторами (см. [2] – [5]). Краевые задачи для аналитических функций в смысле L^1 -сходимости рассмотрены в работе [1]. Задача Дирихле в круге для более общих весовых пространств исследована в работах [6] и [7].

Ниже мы будем использовать следующие обозначения. Если функция $\Phi(z)$ определена на $G^+ \cup G^-$, где $G^- = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$ – нижняя полуплоскость, то обозначим через $\Phi_-(z) = \overline{\Phi(\bar{z})}$, а через $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ – сужения функции $\Phi(z)$ на G^+ и G^- соответственно. Через A_1 будем обозначать множество целых функций, порядок которых меньше единицы.

Наконец, отметим, что условие $\gamma < 1$ в определении класса B_1 существенно для нетеровости задачи (1). При $\gamma \geq 1$ мы можем найти бесконечно много линейно независимых гармонических функций, удовлетворяющих однородному условию (1). Например, $u(x, y) = \operatorname{Re} \Phi(z)$, где $\Phi(z) = iz^{2k}e^{-z^2}$, $k = 0, 1, \dots$, или $\Phi(z) = i(z(z - \pi))^{-1} \sin z$.

§2. ОСОБАЯ ТОЧКА В БЕСКОНЕЧНОСТИ

В этом параграфе исследуем задачу (1) в случае, когда бесконечно удалённая точка является единственной особой точкой весовой функции $\rho(x)$.

Лемма 1. Пусть $\rho(x) = (1 + |x|)^{-n_0}$, $f(x) \in L^1(\rho)$ и

$$\Phi(z) = \frac{(z + i)^{n_0}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t + i)^{n_0}} \frac{dt}{t - z}, \quad z \in G^+ \cup G^-. \quad (2)$$

Тогда

$$\|\Phi^+(x + iy) - \Phi^-(x - iy)\|_{L^1(\rho)} < C \|f\|_{L^1(\rho)}, \quad (3)$$

где C – постоянная, не зависящая от $y > 0$.

Доказательство : Из (2) имеем $\Phi^+(x + iy) - \Phi^-(x - iy) = I_1(x, y) + I_2(x, y)$, где

$$I_1(x, y) = \frac{(x + iy + i)^{n_0} - (x - iy + i)^{n_0}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t + i)^{n_0}} \frac{dt}{t - x + iy},$$

$$I_2(x, y) = \frac{(x + iy + i)^{n_0}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t + i)^{n_0}} \frac{y dt}{(t - x)^2 + y^2}.$$

Используя неравенство $|(x + iy + i)^{n_0} - (x - iy + i)^{n_0}| < C_1|x|^{n_0-1}y$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} I_1(x, y) \frac{dx}{1 + |x|^{n_0}} &< \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t)|}{|t + i|^{n_0}} \frac{|x|^{n_0-1}y dx dt}{|t - x + iy|(1 + |x|^{n_0})} < \\ &< \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t)|}{|t + i|^{n_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y dx dt}{|t - x + iy|(1 + |x|)}. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y dx}{|t - x + iy|(1 + |x|)} < \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y dx}{(t - x)^2 + y^2} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y dx}{1 + |x|^2} < 2,$$

получим $\|I_1(x, y)\|_{L^1(\rho)} < C\|f\|_{L^1(\rho)}$. Так как $|x + iy + i|^{n_0}(|x|^{-n_0} + 1) < \text{const}$, то

$$\|I_2(x, y)\|_{L^1(\rho)} < C_3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t)|}{|t + i|^{n_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y dx dt}{(t - x)^2 + y^2} < C_3\|f\|_{L^1(\rho)}.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Функция $\Phi(z)$, определённая по (2) удовлетворяет граничному условию

$$\lim_{y \rightarrow +0} \|\Phi^+(x + iy) - \Phi^-(x - iy) - f(x)\|_{L^1(\rho)} = 0. \quad (4)$$

Доказательство : Пусть f_k – последовательность бесконечно дифференцируемых финитных функций такая, что $\|f_k - f\|_{L^1(\rho)} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Для каждого $k > 0$ положим

$$\Phi_k(z) = \frac{(z + i)^{n_0}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_k(t)}{(t + i)^{n_0}} \frac{dt}{t - z}, \quad z \in G^+ \cup G^-.$$

Так как

$$\lim_{y \rightarrow +0} \|\Phi_k^+(x + iy) - \Phi_k^-(x - iy) - f_k(x)\|_{L^1(\rho)} = 0, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} &\|\Phi^+(x + iy) - \Phi^-(x - iy) - f(x)\|_{L^1(\rho)} < \\ &< \|(\Phi^+(x + iy) - \Phi_k^+(x + iy)) - (\Phi^-(x - iy) - \Phi_k^-(x - iy))\|_{L^1(\rho)} + \\ &+ \|\Phi_k^+(x + iy) - \Phi_k^-(x - iy) - f_k(x)\|_{L^1(\rho)} + \|f_k - f\|_{L^1(\rho)}, \end{aligned}$$

то учитывая Лемму 1 завершаем доказательство Леммы 2.

Лемма 3. Пусть $\rho(x) = (1 + |x|)^{-n_0}$, $f(x) \in L^1(\rho)$, и $\Phi(z)$ – функция, определённая по формуле (2). Тогда гармоническая функция $u(x, y) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\Phi(z) + \Phi_*(z))$ удовлетворяет граничному условию

$$\lim_{y \rightarrow +0} \|u(x, y) - f(x)\|_{L^1(\rho)} = 0. \quad (6)$$

Доказательство : Так как

$$\Phi_+(z) = -\frac{(z-i)^{n_0}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t-i)^{n_0}} \frac{dt}{t-z}, \quad z \in G^+ \cup G^-,$$

то ясно, что функция $\Phi_+(z)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{y \rightarrow +0} \|\Phi_+^+(x+iy) - \Phi_-^-(x-iy) - f(x)\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Учитывая, что $\Phi(z) + \Phi_+(z) = \overline{\Phi(\bar{z})} + \Phi_+(\bar{z})$, завершаем доказательство Леммы 3.

Лемма 4. Пусть $\rho(x) = (1+|x|)^{-n_0}$. Общее решение однородной задачи (1) можно представить в виде

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{n_0-1} ia_k z^k, \quad (7)$$

где a_k — действительные постоянные.

Доказательство : Пусть $u(x, y)$ — произвольное решение однородной задачи (1) и $y_0 > 0$. Положим $u_0(x, y) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\Phi(z) + \Phi_+(z))$, где $\Phi(z)$ определяется формулой (2) с $f(x) = u(x, y_0)$. Имеем

$$u_1(x, y) = u(x, y + y_0) - u_0(x, y) \in B_1, \quad u_1(x, 0) \equiv 0.$$

Пусть функция $\Phi_1(z) \in A_1$ такая, что $u_1(x, y) = \operatorname{Re} \Phi_1(z)$. Тогда $\Phi_1(z) = -\overline{\Phi_1(\bar{z})}$ и

$$u_1(x, y) = \frac{1}{2}(\Phi_1(x+iy) - \Phi_1(x-iy)) \in L^1(\rho).$$

Полагая $\Phi_y(z) = \frac{1}{2}(\Phi_1(z+iy) - \Phi_1(z-iy))$, получим $\Phi_y(z) \in A_1$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_y(x)| \frac{dx}{1+|x|^{n_0}} < \infty. \quad (8)$$

Если $z_k, k = 1, \dots, n_0$ являются нулями функции $\Phi_y(z)$, то $\Phi_y(z) \prod_{k=1}^{n_0} (z - z_k)^{-1} \in A_1$, и в силу (8), получаем $\Phi_y(x) \prod_{k=1}^{n_0} (x - z_k)^{-1} \in L^1(-\infty, \infty)$. Первообразная этой функции ограничена на действительной оси, и поэтому, в силу принципа Фрагмана-Линделёфа, данная функция постоянна на комплексной плоскости. Это возможно лишь при $\Phi_y(z) \equiv 0$. Следовательно, $\Phi_1(z+iy) = \Phi_1(z-iy)$ для любого $y > 0$, т.е. $\Phi_1(z) = \operatorname{const}$. Следовательно, $\Phi_1(z) = ia_0$, где a_0 — действительная постоянная.

Рассмотрим случай, когда количество нулей функции $\Phi_y(z)$ меньше, чем n_0 . Тогда (см. [8]) $\Phi_y(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n_0-1} z^{n_0-1}$ и

$$\Phi_y(z+iy) - \Phi_y(z-iy) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n_0-1} z^{n_0-1}.$$

Дифференцируя последнее равенство $n_0 - 1$ раз, получим

$$\Phi_y^{(n_0-1)}(z + iy) - \Phi_y^{(n_0-1)}(z - iy) \equiv 0, \quad y > 0,$$

что возможно лишь тогда, когда $\Phi_y^{(n_0-1)}(z) = \text{const}$. Поэтому

$$\Phi_1(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n_0-1} z^{n_0-1}, \quad \Phi_{1*}(z) = \overline{a_0} + \overline{a_1} z + \dots + \overline{a_{n_0-1}} z^{n_0-1},$$

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left((a_0 - \overline{a_0}) + (a_1 - \overline{a_1})z + \dots + (a_{n_0-1} - \overline{a_{n_0-1}})z^{n_0-1} \right),$$

Переходя к пределу в равенстве $u(x, y + y_0) = u_1(x, y) + u_0(x, y)$ при $y_0 \rightarrow 0$ и учитывая, что $\|u(x, y_0)\|_{L^1(\rho)} \rightarrow 0$, получаем (7). Остаётся заметить, что функция (7) удовлетворяет однородному условию (1). Лемма 4 доказана.

Лемма 5. Пусть $\rho(x) = (1 + |x|)^{-n_0}$. Тогда задача (1) разрешима для любой функции $f \in L^1(\rho)$, и общее решение представимо в виде

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{n_0-1} i a_k z^k + \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\Phi(z) + \Phi_{*}(z)), \quad (9)$$

где a_k суть действительные числа, а $\Phi(z)$ определяется по формуле (2).

Доказательство : следует из Лемм 3 и 4.

§3. КОНЕЧНАЯ ОСОБАЯ ТОЧКА

В этом параграфе исследуется задача (1) для весовой функции $\rho(x)$, имеющей единственную конечную особую точку ($n_k = 0, k = 0, 2, 3, \dots, m$).

Лемма 6. Пусть $\rho(x) = |x - x_0|^k (1 + |x|)^{-k}$ и

$$\Phi_1(z) = \frac{(z + i)^k}{2\pi(z - x_0)^k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)(t - x_0)^k dt}{(t + i)^k(t - z)}. \quad (10)$$

Тогда

$$\lim_{y \rightarrow +0} \|\Phi_1^+(x + iy) - \Phi_1^-(x - iy) - f(x)\|_{L^1(\rho)} = 0. \quad (11)$$

Доказательство : Сначала докажем, что

$$\|\Phi_1^+(x + iy) - \Phi_1^-(x - iy)\|_{L^1(\rho)} < C \|f\|_{L^1(\rho)}. \quad (12)$$

Действительно, $\Phi_1^+(x + iy) - \Phi_1^-(x - iy) = I_1(x, y) + I_2(x, y)$, где

$$I_1(x, y) = \left(\frac{(x + iy + i)^k}{2\pi i(x + iy - x_0)^k} - \frac{(x - iy + i)^k}{2\pi i(x - iy - x_0)^k} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)(t - x_0)^k dt}{(t + i)^k(t - z)},$$

$$I_2(x, y) = \frac{(x + iy + i)^k}{\pi(x + iy - x_0)^k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)(t - x_0)^k y dt}{(t + i)^k ((t - x)^2 + y^2)} dx.$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} |I_1(x, y)| \frac{|x - x_0|^k dx}{(1 + |x|)^n} < \\ & < \frac{C_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t)||t - x_0|^k dt}{|t + i|^k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(|x - x_0|^{k-1} + y^{k-1})|x - x_0|^k}{((x - x_0)^2 + y^2)^k |t - ix - iy|} dx + \\ & + \frac{C_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t)||t - x_0|^k dt}{|t + i|^k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(|x - x_0|^{k-1} + y^{k-1})}{(1 + |x|)^k |t - ix - iy|} dx < \\ & < \frac{C}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t)||t - x_0|^k dt}{|t + i|^k} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y dx}{|x - iy - x_0|^n (1 + |x|)^k ((t - x)^2 + y^2)} + \right. \\ & \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y dx}{1 + x^2} \right) < C \|f\|_{L^1(\rho)}. \\ & \int_{-\infty}^{\infty} |I_2(x, y)| \frac{|x - x_0|^k dx}{(1 + |x|)^n} < \\ & < \frac{C}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t)||t - x_0|^k dt}{|t + i|^k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x - iy + i|^k |x - x_0|^k y dx}{|x - iy - x_0|^k (x - x_0)^2 + y^2 (1 + |x|)^k} < \\ & < C \|f\|_{L^1(\rho)}. \end{aligned}$$

Пусть теперь $f_n(x) = f(x)$ при $|x - x_0| > n^{-1}$ и $f_n(x) = 0$ при $|x - x_0| < n^{-1}$. Ясно, что $\|f_n - f\|_{L^1(\rho)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Обозначая через $\Phi_n(z)$ функцию (10), после замены $f(x)$ на $f_n(x)$ будем иметь

$$\lim_{y \rightarrow +0} \|\Phi_n^+(x + iy) - \Phi_n^-(x - iy) - f_n(x)\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Так что с учётом оценки (12), получим (11). Лемма 6 доказана.

Лемма 7. Пусть $\rho(x) = |x - x_0|^k (1 + |x|)^{-k}$, $f \in L^1(\rho)$, а функция $\Phi_1(z)$ определена по формуле (10). Тогда функция $u(x, y) = 2^{-1} \operatorname{Re} (\Phi_1(z) + \Phi_{1*}(z))$ удовлетворяет граничному условию (1).

Доказательство : аналогично доказательству Леммы 3.

Лемма 8. Пусть $u(x, y) \in B_1$ и для любого $y > 0$ имеем $u(x, y) \in L^1(-\infty, \infty)$. Тогда при $y_0 > 0$ функция $u(x, y)$ ограничена на полуплоскости $y > y_0$ и

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t, y_0) y dt}{(t - x)^2 + y^2}. \quad (13)$$

Доказательство : Правую часть (13) обозначим через $u_0(x, y)$. Ясно, что функция $u_1(x, y) = u(x, y + y_0) - u_0(x, y)$ принадлежит классу B_1 , $u(x, 0) \equiv 0$ и

$u_1(x, y) \in L^1(-\infty, \infty)$. Положим $u_1(x, y) = \operatorname{Re} \Psi(z)$. Тогда $\Psi(z) \in A_1$. Учитывая, что $\Psi(z) = -\overline{\Psi(\bar{z})}$ и

$$u_1(x, y) = 2^{-1} \left(\Psi(x + iy) + \overline{\Psi(x + iy)} \right) = 2^{-1} (\Psi(x + iy) - \Psi(x - iy)),$$

будем иметь $\Psi(x + iy) - \Psi(x - iy) \in L^1(-\infty, \infty)$. Следовательно, $\Psi(x + iy) = \Psi(x - iy)$ для любого $y > 0$. Поэтому $\Psi(z) = \operatorname{const}$. Так как $\Psi(z) = -\overline{\Psi(\bar{z})}$, то $\Psi(z) = ib$, где b — действительное число. Следовательно, $u_1(x, y) \equiv 0$ и Лемма 8 доказана.

Лемма 9. Пусть $\rho(x) = |x - x_0|^k (1 + |x|)^{-k}$. Тогда общее решение однородной задачи (1) можно представить в виде

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{p=0}^k \frac{iA_k}{(z - x_0)^p}, \quad (14)$$

где A_k — действительные числа.

Доказательство : Пусть $u(x, y)$ — произвольное решение однородной задачи (1) и $u(x, y) = \operatorname{Re} \Phi^+(z)$, где $\Phi^+(z)$ — аналитическая функция в G^+ . Полагая $\Phi(z) = \Phi^+(z)$ для $z \in G^+$ и $\Phi^-(z) = \overline{\Phi^+(\bar{z})}$ — для $z \in G^-$, из условия (1) получаем

$$\|\Phi^+(x + iy) - \Phi^-(x - iy)\|_{L^1(\rho)} \rightarrow 0.$$

Следовательно

$$\left\| \frac{\Phi^+(x + iy)(x - x_0)^k}{(x + i)^k} - \frac{\Phi^-(x - iy)(x - x_0)^k}{(x + i)^k} \right\|_{L^1(-\infty, \infty)} \rightarrow 0.$$

Положим

$$\frac{\Phi^+(x + iy)(x - x_0)^k}{(x + i)^k} - \frac{\Phi^-(x - iy)(x - x_0)^k}{(x + i)^k} = f_y(x). \quad (15)$$

Пусть $A_0(y) + A_1(y)(z + i)^{-1} + \dots + A_k(y)(z + i)^{-k}$ — главная часть разложения Лорана функции $\Phi^-(z - iy)(z - x_0)^k(z + i)^{-k}$ в точке $z = -i$. Из (15) для $z \in G^\pm$ будем иметь

$$\frac{\Phi^\pm(z + iy)(z - x_0)^k}{(z + i)^k} = A_0(y) + A_1(y)(z + i)^{-1} + \dots + A_k(y)(z + i)^{-k} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_y(t) dt}{t - z}.$$

Переходя к пределу при $y \rightarrow +0$, получим

$$\frac{\Phi^\pm(z)(z - x_0)^k}{(z + i)^k} = B_0 + B_1(z + i)^{-1} + \dots + B_k(z + i)^{-k}, \quad B_k = \lim_{y \rightarrow +0} A_k(y).$$

Из последнего равенства получаем

$$\Phi^{\pm}(z) = \sum_{p=0}^k \frac{B_k}{(z - x_0)^p}.$$

Так как $\Phi(z) = -\overline{\Phi(\bar{z})}$, то $B_k = iA_k$, где A_k — действительные числа. Для завершения доказательства Леммы 9 нам следует показать, что каждая функция из (14) удовлетворяет однородному условию (1). Для этого достаточно проверить, что последнему условию удовлетворяет функция $i(z - x_0)^{-k}$. Действительно, тогда

$$|\operatorname{Re} i(x + iy - x_0)^{-k}| < C \frac{2y}{(x - x_0)^2 + y^2} \frac{|x - x_0|^{k-1}}{(|x - x_0| + y^2)^{k-1}},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\operatorname{Re} i(x + iy - x_0)^{-k}| \frac{|x - x_0|^k}{(1 + |x|)^k} dx < C \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2y}{(x - x_0)^2 + y^2} \frac{|x - x_0|}{(1 + |x|)^k} dx.$$

Последний интеграл стремится к нулю при $y \rightarrow +0$. Лемма 9 доказана.

Из Лемм 5, 7 и 9 непосредственно следуют основные результаты.

Теорема 1. Общее решение однородной задачи (1) можно представить в виде

$$u_0(x, y) = \sum_{k=1}^m \operatorname{Re} \sum_{p=0}^{n_k} \frac{ia_{kp}}{(z - x_0)^p} + \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{n_0-1} ia_{0k} z^k,$$

где a_{kp} , $k = 0, 1, \dots, m$, $p = 0, 1, \dots, n_k$ — действительные числа.

Теорема 2. Задача (1) разрешима для любой функции $f \in L^1(\rho)$. Общее решение (1) можно представить в виде

$$u(x, y) = u_0(x, y) + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\tau(z)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t) dt}{\tau(t)(t - z)} - \frac{\overline{\tau(z)}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t) dt}{\tau(t)(t - z)} \right),$$

где $u_0(x, y)$ — общее решение однородной задачи (1), а

$$\tau(z) = (z + i)^{n_0} \prod_{k=1}^m \frac{(z - x_k)^{n_k}}{(z + i)^{n_k}}.$$

ABSTRACT. Let B_1 be the class of harmonic functions $u(z)$ in the upper complex half-plane satisfying the condition $|u(z)| < M \exp |z|^\gamma$, $\gamma < 1$, $\operatorname{Im} z > y_0 > 0$, where M is a constant depending on y_0 . The paper considers Dirichlet problem in B_1 in the following setting: to find a real-valued harmonic function $u(x, y) \in B_1$, satisfying the boundary condition $\lim_{y \rightarrow +0} \|u(x, y) - f(x)\|_{L^1(\rho)} = 0$, where $\rho(x)$ is a weight function from a certain class, and $f(x) \in L^1(\rho)$ is a real valued function. For any $f(x) \in L^1(\rho)$ the problem is solvable and all solutions of the corresponding homogeneous problem are given in an explicit form.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Г. М. Айрапетян, "Разрывная задача Римана-Привалова со смещением в классе L^1 ", Изв. АН Арм.ССР, серия Математика, том 25, № 1, стр. 3 — 20, 1990.
2. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные Интегральные Уравнения. Москва, Наука, 1968.
3. Б. В. Хведелидзе, "Методы интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной", Современные Проблемы Математики, том 7, Москва, 1975.
4. И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, Введение в Теорию Одномерных Сингулярных Интегральных Операторов, Кишинёв, 1973.
5. З. Прёсдорф, Некоторые Классы Сингулярных Уравнений, Мир, Москва, 1979.
6. K. S. Kazarian, "Weighted norm inequalities for some classes of singular integrals", *Studia Math.*, vol. 86, pp. 97 – 130, 1987.
7. Г. М. Айрапетян, "О задаче Дирихле в пространствах с весом", Изв. НАН Армении, серия Математика, том 36, № 3, стр. 22 – 44, 2001.
8. А. И. Маркушевич, Теория Аналитических Функций, Физ.Мат.Гиз, Москва, 1950.

17 сентября 2001

Армянский государственный
инженерный университет