ОРТОГОНАЛЬНЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ НА НЕСКОЛЬКИХ ДУГАХ ЕДИНИЧНОЙ ОКРУЖНОСТИ

А. Л. Лукашов

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 36, № 5, 2001

В статье приводится представление ортогональных рациональных функций на нескольких дугах единичной окружности по отношению весовых функций геронимусовского типа.

Теория ортогональных рациональных функций, созданная М. М. Джрбашяном [5] – [8], находит много приложений в оптимальном управлении, системном анализе, стохастических процессах, теории прогнозирования и т.п. (см., например, книгу [2] или [14]). Тем не менее, явные представления ортогональных рациональных функций на единичном круге известны лишь для очень специальных случаев весов, аналогичным весам Бернштейна - Сегё (см. [8], Теорема 1.5).

Основная цель этой статьи – дать представление ортогональных рациональных функций на нескольких дугах единичной окружности по отношению к весам геронимусовского типа [9]. Теория ортогональных многочленов для таких весов была построена в [19] и, для более общих случаев, в серии работ Ф. Пехерсторфера и Р. Штейнбауэра (см., например, [15] – [17]). Представления ортогональных полиномов для специальных случаев были даны в терминах абелевых интегралов в [19] и для более общих случаев в терминах автоморфных функций Шоттки-Бернсайда в [11], [12].

Здесь мы применяем идеи из [12], [15] к теории ортогональных рациональных функций и находим представления в терминах автоморфных функций для ортогональных рациональных функций относительно весов из работ [15], [19].

Пусть заданы $2l$, $l \in \mathbb{N}$, точки $\varphi_1 < \ldots < \varphi_{2l}$, причём $\varphi_{2l} - \varphi_1 < 2\pi$,

---

Работа поддержана РФФИ, гранты № 99-01-01120 и № 00-15-96123 и Министерством образования РФ, грант Е00-1.0-192.

$E = \bigcup_{j=1}^{l}[\varphi_{2j-1}, \varphi_{2j}]$, $\Gamma_E = \{e^{i\varphi},\ \varphi \in E\}$, и пусть $\mathcal{R}$ – тригонометрический многочлен

$$\mathcal{R}(\varphi) = \prod_{j=1}^{2l} \sin\left(\frac{\varphi - \varphi_l}{2}\right).$$

Далее, пусть $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ – разложение $\mathcal{R}$ (т.е. $\mathcal{R}(\varphi) = \mathcal{V}(\varphi)\mathcal{W}(\varphi)$) на тригонометрические полиномиальные множители степеней $l/2$ такое, что функция

$$f(\varphi, \mathcal{W}) = \begin{cases} \frac{\mathcal{W}(\varphi)}{r(\varphi)}, & \varphi \in E, \\ 0, & \varphi \notin E, \end{cases}$$

где $\pm 1/r(\varphi) = (-1)^j/\sqrt{|\mathcal{R}(\varphi)|}$ при $\varphi \in (\varphi_{2j-1}, \varphi_{2j})$, является весовой функцией, т.е. $f(\varphi, \mathcal{W}) > 0$ для $\varphi \in int(E)$. Мы не будем рассматривать более общие весовые функции, поскольку формулы станут более громоздкими.

Обозначим через $\mathcal{G} = G(K_1, \ldots, K_{l-1})$ верхнюю полуплоскость комплексного пространства без непересекающихся кругов $K_1, \ldots, K_{l-1}$, которые лежат в этой полуплоскости с центрами на мнимой оси. Используя Лемму 2 из [10], отобразим область $\mathbf{C} \setminus \Gamma_E$ на $\mathcal{G}$. Отображающая функция будет обозначаться через $z = \varphi(u)$, $u \in \mathcal{G}$. Область $G(K_1, \ldots, K_{l-1})$ вместе с областью, симметричной ей относительно действительной оси, и вместе с действительной осью и с $\cup_{j=1}^{l-1} \partial K_j$ называется **фундаментальной областью** $\mathcal{T}$ группы Шоттки Γ. Порождающие группы Γ суть дробно–линейные отображения

$$T_i(z) = \frac{R_i^2}{z - o_i} + \bar{o}_i, \quad i = 1, \ldots, l-1,$$

где o_i обозначает центр, а R_i – радиус круга K_i, $i = 1, \ldots, l-1$. Группа Γ состоит из отображений $\Gamma = \{T_i\}_{i=0}^{\infty}$, $T_0(z) \equiv z$. Напомним, что функция f называется **автоморфной**, если она является однозначной мероморфной функцией на комплексной сфере $\overline{\mathbf{C}}$ без предельных точек группы Γ и такая, что для любого $T \in \Gamma$ тождество $f(T(z)) = f(z)$ выполняется для $z \in \mathcal{T}$.

Введем теперь следующие функции В. Бернсайда :

$$\Omega(z, y) = (z - y)\prod_i{}' \frac{(T_i(z) - y)(T_i(y) - z)}{(T_i(z) - z)(T_i(y) - y)}, \quad [4], \S 2, \tag{1}$$

$$\exp \Phi_i(z) = \frac{z - c_i}{z - c_{i^{-1}}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\infty} \frac{z - c_{j^{-1}i}}{z - c_{j^{-1}}}, \quad [3], \S 4. \tag{2}$$

Здесь и всюду в дальнейшем $c_j = T_j^{-1}(\infty)$, $c_{i^{-1}} = T_i(\infty)$, и $c_{i^{-1}j} = T_i(T_j^{-1}(\infty))$, а штрих у знака произведения означает, что из каждой пары взаимно обратных отображений T и T^{-1} в произведении участвует только одно и $i > 0$.

Нам понадобятся следующие свойства функций (1) и (2) при подстановках группы Γ :

$$\frac{\Omega(T_p(z),y)}{\Omega(z,y)} \equiv (\gamma_p z+\delta_p)^{-1}\exp\left\{\Phi_p(z)-\Phi_p(y)+\frac{a_{pp}}{2}\right\}, \quad [4], \text{ стр. } 292, \tag{3}$$

$$\frac{\exp\Phi_i(T_p(z))}{\exp\Phi_i(z)} \equiv \exp(n_1a_{i1}+n_2a_{i2}+\ldots+n_{l-1}a_{il-1}), \quad [3], \text{ стр. } 66. \tag{4}$$

Здесь

$$T_p(z)=\frac{\alpha_p z+\beta_p}{\gamma_p z+\delta_p}, \quad \alpha_p\delta_p-\beta_p\gamma_p=1$$

– так называемая нормальная форма $T_p(z)$, a_{pq} являются значениями интегралов $\int\limits_{A'_qA_q}\theta(z,c_{p-1})\,dz$, по путям A'_qA_q, которые не имеют самопересечений и не пересекаются между собой, делают область $\mathcal{T}$ односвязной, и находятся вне кругов $K_1,\ldots,K_{l-1}, K'_1,\ldots,K'_{l-1}$ (здесь K'_j симметричен K_j относительно действительной оси, $A_q=o_q+iR_q$, $A'_q=\bar{o}_q-iR_q$, $q=1,\ldots,l-1$). Функция $\theta(z,a)$ определяется равенством

$$\theta(z,a)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\gamma_i z+\delta_i)^{-2}}{\frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}-a}$$

(т.е как тэта-ряд Пуанкаре), а целые числа $n_1,\ldots,n_{l-1}$ определяются следующим образом. Если $z\in\mathcal{T}$, то любой путь, соединяющий z и $T_i(z)$, который не пересекает разрезы A'_pA_p, $p=1,\ldots,l-1$, включает части, гомотопичные образам некоторых из исходных разрезов $A'_1A_1,\ldots,A'_{l-1}A_{l-1}$, взятых в положительном или отрипательном направлении, тогда среди них образ A'_1A_1 встречается n_1 раз, образ A'_2A_2 - n_2 раз и т.д. Впоследствии мы будем использовать тот факт, что для $i=1,\ldots,l-1$ в (4) числа n_k равны $-\delta_{k,p}$, $k,p=1,\ldots,l-1$, так как для таких p вышеупомянутый путь содержит только $A_pA'_p$. На самом деле матрица $\left(-\frac{1}{2}a_{pq}\right)$ есть не что иное, как матрица периодов для соответствующей гиперэллиптической римановой поверхности [3], стр. 71 – 72.

Теперь пусть $\{\alpha_k\}_1^\infty$ – произвольная последовательность комплексных чисел, удовлетворяюших условию $|\alpha_k|<1$. Пусть $\{B_k\}_0^\infty$ – соответствующие конечные произведения Бляшке ($B_0=1$ и $B_n=B_{n-1}\zeta_n$, где

$$\zeta_i(z)=-\frac{\overline{\alpha_i}}{|\alpha_i|}\frac{z-\alpha_i}{1-\overline{\alpha_i}z},$$

а для $\alpha_i=0$ мы полагаем $\overline{\alpha_i}/|\alpha_i|=-1$), $\mathcal{L}_n=span\{B_0,\ldots,B_n\}$. Будем использовать обозначения

$$\omega_0(z)\equiv 1, \quad \omega_n(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-\alpha_k), \quad \eta_n=\prod_{k=1}^{n}\frac{-\overline{\alpha_k}}{|\alpha_k|}, \quad n=1,2,\ldots,$$

$$\pi_0(z) \equiv 1, \quad \pi_n(z) = \prod_{k=1}^{n}(1 - \overline{\alpha_k} z), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Через $\phi_n(z) = \phi_n(z, \mathcal{W})$ обозначим ортогонализацию $\{B_n\}_0^\infty$ относительно весовой функции $f(\varphi, \mathcal{W})$, т.е.

$$\int_E \phi_n(e^{i\varphi})\overline{\phi_m(e^{i\varphi})} f(\varphi, \mathcal{W})\, d\varphi = 0, \quad \text{для } n \neq m, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Пусть $\psi_n(z, \mathcal{W})$ – соответствующие функции второго рода

$$\psi_n(z, \mathcal{W}) = \int_E \left[\frac{2e^{i\varphi}}{e^{i\varphi} - z}\phi_n(e^{i\varphi}) - \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z}\phi_n(z)\right] f(\varphi, \mathcal{W}) d\varphi$$

и

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_E \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} f(\varphi, \mathcal{W})\, d\varphi$$

есть преобразование Стилтьеса меры $f(\varphi, \mathcal{W})d\varphi$.

Сопоставим $\mathcal{R}$, $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ (как в [15]) алгебраические многочлены

$$R(e^{i\varphi}) = e^{il\varphi}\mathcal{R}(\varphi), \quad V(e^{i\varphi}) = e^{il\varphi/2}\mathcal{V}(\varphi), \quad W(e^{i\varphi}) = e^{il\varphi/2}\mathcal{W}(\varphi).$$

Рассмотрим модифицированный взаимный многочлен $C^*(z)$ степени m, т.е. $C^*(z) = z^m \overline{C}(1/z)$, и его аналог для рациональных функций $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k B_k(z)$, а именно, $f^*(z) = B_n(z)\overline{f(1/\bar{z})}$.

Теорема 1. Для данной рациональной функции $\phi_n(z) \in \mathcal{L}_n$, ортогональной относительно веса $f(\phi, \mathcal{W})$, существуют многочлен $g_{(n)}$ степени $l-1$ и рациональная функция $\chi \in \mathcal{L}_n$ такие, что

$$\phi_n^2(z)W(z) - \chi_n^2(z)V(z) = B_{n-1}(z)g_{(n)}(z)\frac{z}{1 - \overline{\alpha_n} z}. \tag{5}$$

Доказательство : Из Теоремы 6.1.1 из [2] следует, что

$$\frac{\phi_n(z)F(z) + \psi_n(z)}{B_{n-1}(z)} = g(z), \tag{6}$$

$$\frac{\phi_n^*(z)F(z) + \psi_n^*(z)}{B_n(z)} = h(z), \tag{7}$$

где $g(z)$ и $h(z)$ аналитичны в $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ и таковы, что $g(0) = h(0) = 0$. Заметим, что обе функции $g(z)$ и $h(z)$ являются интегралами типа Коши-Стилтьеса, аналитичными в $\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}$ и их граничные значения на $\partial\mathbb{D}\backslash\Gamma_E$ равны ([18], Глава 2, §5.2). Они не равны нулю тождественно в $\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}$, так как $\log f(\varphi, \mathcal{W})$ не интегрируема на $\partial\mathbb{D}$ (ср. [18], Глава 2, §6).

Из Теоремы 2.1 из [15] следует, что функцию F можно представить следующим образом :

$$F(z) = -\frac{1}{i}\left(b + \frac{W(z)}{\sqrt{R(z)}}\right), \quad b = -\operatorname{Re}\left(\frac{W(0)}{\sqrt{R(0)}}\right). \tag{8}$$

Здесь и всюду в дальнейшем ветвь квадратного корня аналитична в $\mathbf{C}\backslash\Gamma_E$ и удовлетворяет равенству $sgn\sqrt{R(e^{i\varphi})} = -e^{il\varphi/2}$ для $\varphi \in (\varphi_2, \varphi_3)$. Равенства (6) и (7) могут быть переписаны с помощью (8) так :

$$\frac{\phi_n(z)W(z)}{\sqrt{R(z)}} - \chi_n(z) = -iB_{n-1}(z)g(z), \tag{9}$$

$$\frac{\phi_n^*(z)W(z)}{\sqrt{R(z)}} - \chi_n^*(z) = -iB_n(z)h(z), \tag{10}$$

где $\chi_n(z) = \psi_n(z) - b\phi_n(z)$. Умножая равенства (9), (10) на $-\sqrt{R(z)}/V(z)$, после несложных вычислений получим

$$\phi_n(z)^2W(z) - \chi_n^2(z)V(z) = B_{n-1}(z)(B_{n-1}(z)V(z)g^2(z) - 2g(z)\phi_n(z)\sqrt{R(z)}), \tag{11}$$

$$(\phi_n^*(z))^2W(z) - (\chi_n^*(z))^2V(z) = B_n(z)(B_n(z)V(z)h^2(z) - 2ih(z)\phi_n^*(z)\sqrt{R(z)}). \tag{12}$$

Обозначив числители ϕ_n, χ_n через p_n, q_n, соответственно, из (11), (12) выводим представления

$$p_n(z)^2W(z) - q_n^2(z)V(z) = \omega_{n-1}(z)(1 - \overline{\alpha_n}z)\tilde{g}(z), \tag{13}$$

$$(p_n^*(z))^2W(z) - (q_n^*(z))^2V(z) = \omega_n(z)\tilde{h}(z), \tag{14}$$

где

$$\tilde{g}(z) = \eta_{n-1}\left(\omega_{n-1}(z)(1 - \overline{\alpha_n}z)\eta_{n-1}V(z)g^2(z) - 2ig(z)p_n(z)\sqrt{R(z)}\right),$$

$$\tilde{h}(z) = \omega_n(z)V(z)h^2(z) - 2ih(z)p_n^*(z)\sqrt{R(z)}.$$

Так как левые части (13), (14) являются многочленами степеней не выше чем $2n + l$, то можно записать

$$p_n(z)^2W(z) - q_n^2(z)V(z) = c\omega_{n-1}(z)(1 - \overline{\alpha_n}z)zp(z), \tag{15}$$

$$(p_n^*(z))^2W(z) - (q_n^*(z))^2V(z) = dz\omega_n(z)q(z), \tag{16}$$

где p и q – многочлены степеней не выше $n+l-1$, c и d – ненулевые постоянные. Беря взаимные многочлены степени $n+l-1$ от обеих частей (15) и сравнив результат с (16), получим

$$\bar{c}(z-\alpha_n)\pi_{n-1}(z)p^*(z) = dz\omega_n(z)q(z),$$

откуда

$$p^*(z) = z\omega_{n-1}\tilde{g}_{(n)}(z), \tag{17}$$

где $\tilde{g}_{(n)}$ – многочлен степени не выше $l-1$. Из (17) получим

$$p(z) = \pi_{n-1}(z)\tilde{g}^*_{(n)}(z) = \frac{1}{c}\pi_{n-1}(z)g_{(n)}(z), \tag{18}$$

где $g_{(n)}$ – многочлен степени $l-1$. Подстановка (18) в (15) дает

$$p_n(z)^2W(z) - q_n^2(z)V(z) = \omega_{n-1}(z)\pi_n(z)zg_{(n)}(z). \tag{19}$$

Утверждение теоремы следует из (19) после деления на $\pi_n^2(z)$.

Замечания. 1. Для $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ утверждение Теоремы 1 содержится в Теореме 2.2 из [15].

2. Числители p_n ортогональных рациональных функций ϕ_n являются многочленами, ортогональными на E относительно веса

$$\frac{\mathcal{W}(\varphi)}{r(\varphi)(1-\overline{\alpha_n}e^{i\varphi})\prod_{m=1}^{n-1}|1-\alpha_m e^{i\varphi}|^2} \tag{20}$$

(см., например, [1]). Вес (20) не содержится в классе весов, рассмотренных в [15], и, следовательно, Теорема 1 не может быть выведена из [15] простой переформулировкой в терминах ортогональных рациональных функций.

3. Метод доказательства может быть применен к более общим весам, подобно в [15], но формулы существенно усложняются.

Алгебраическое уравнение (5) является ключевым для представлений ортогональных рациональных функций в терминах автоморфных функций Шоттки-Бернсайда. Для простоты будем предполагать, что

$$W(e^{i\varphi_{2j-1}})W(e^{i\varphi_{2j}}) = V(e^{i\varphi_{2j-1}})V(e^{i\varphi_{2j}}) = 0, \quad j = 1,\ldots,l.$$

Будем использовать обозначения $a_1,\ldots,a_n \in \mathcal{G}$ для образов α_k, $\xi \in \mathcal{G}$ – для образа ∞ и $w_1,\ldots,w_l \in \mathcal{G}$ – для образов нулей многочлена W при отображении φ.

Теорема 2. Пусть $z = \varphi(u)$ – вышеопределенная отображающая функция, а ϕ_n – ортогональная функция относительно $f(\varphi, \mathcal{W})$. Тогда

$$\phi_n(z) = \text{ const } (\Omega_n(u) + \Omega_n(-u)), \tag{21}$$

где

$$\Omega_n(u) = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\Omega(u, -a_k)}{\Omega(u, -\overline{a_k})} \frac{\Omega(u, -b_j^{(n)})}{\Omega(u, w_j)} \frac{\Omega(u, \overline{\xi})\Omega(u, -\xi)}{\Omega(u, -\overline{a_n})\Omega(u, w_l)} \exp \sum_{j=1}^{l-1} \frac{m_j^{(n)} + 1}{2} \Phi_j(u). \tag{22}$$

Величины $b_j^{(n)} \in \mathcal{T}, j = 1, \ldots, l-1$, и целые числа $m_j^{(n)}$ удовлетворяют системе уравнений

$$2\sum_{j=1}^{n-1}(\Phi_k(a_j) - \Phi_k(\overline{a_j})) - 2\Phi_k(\overline{a_n}) - 2\Phi_k(\overline{\xi}) + 2\Phi_k(\xi) +$$

$$+2\sum_{j=1}^{l-1} \Phi_k(b_j^{(n)}) - \sum_{j=1}^{l-1} m_j^{(n)} a_{jk} \equiv 0 \quad (mod 2\pi i), \quad k = 1, \ldots, l-1. \tag{23}$$

Доказательство : Положим

$$\Psi(z) = \left(\phi_n(z) + \left(\sqrt{\frac{V(z)}{W(z)}}\right) \chi_n(z)\right)^2 W(z)(1 - \overline{\alpha_n} z) \Big/ \left(B_{n-1}(z) g_{(n)}(z) z\right), \tag{24}$$

где $g_{(n)}$ – многочлен из Теоремы 1. Смене ветвей квадратного корня соответствует переход к функции

$$\Psi_1(z) = \left(\phi_n(z) - \chi_n(z)\sqrt{\frac{V(z)}{W(z)}}\right)^2 W(z)(1 - \overline{\alpha}_n z) \Big/ (B_{n-1}(z) g_{(n)}(z) z). \tag{25}$$

По Теореме 1

$$\Psi(z)\Psi_1(z) \equiv 1. \tag{26}$$

Обе функции Ψ и Ψ_1 могут рассматриваться и как функции от $u \in \mathcal{G}$ после отображения $z = \varphi(u)$. Продолжим функции Ψ и Ψ_1 на всю область $\mathcal{T}$ по формулам $\Psi(-u) = \Psi_1(u)$ и $\Psi_1(-u) = \Psi(u)$, $u \in \mathcal{G}$. Убедимся, что продолженные функции Ψ и Ψ_1 аналитичны в $\mathcal{G}$. Достаточно проверить их непрерывность на $\mathbb{R}$, т.е.

$$\lim_{\zeta \to +0} \Psi(u + i\zeta) = \lim_{\zeta \to -0} \Psi(u + i\zeta), \quad u \in \mathbb{R}. \tag{27}$$

Пусть $u > 0$. Тогда $(z = \varphi(u))$

$$\lim_{\zeta \to -0} \Psi(u + i\zeta) = \lim_{\zeta \to -0} \Psi_1(-u - i\zeta) = \lim_{\substack{\eta \to z \\ |\eta| < 1}} \Psi_1(\eta) = \lim_{\substack{\eta \to z \\ |\eta| > 1}} \Psi(\eta) = \lim_{\zeta \to +0} \Psi(u + i\zeta),$$

т.е. (27) доказано. Аналогичным образом, Ψ может быть аналитически продолжена через ∂K_j, $j = 1, \dots, l-1$, по формуле $\Psi(T_j^{-1}(u)) = \Psi(u)$ (так как T_j^{-1} является композицией симметрии относительно действительной оси и инверсии относительно окружности ∂K_j). Отсюда Ψ может быть продолжена до автоморфной функции относительно группы Г. То же самое верно и для функции Ψ_1. Теперь для завершения доказательства достаточно воспользоваться теоремой Бернсайда о представлении [4], стр. 293. Надо лишь определить положение нулей и полюсов функции Ψ. Из (26) заключаем, что если u есть нуль функции $\Psi(u)$, то $-u$ – полюс $\Psi(u)$, и наоборот. Учитывая это, из (24) находим, что $a_1, \dots, a_{n-1}$, $-\overline{a_1}, \dots, -\overline{a_n}$, $-\overline{\xi}, \xi$ являются полюсами Ψ вместе с точками $\{b_1^{(n)}, \dots, b_{l-1}^{(n)}\} \subset \mathcal{T}$ такими, что $g_{(n)}(\varphi(b_j^{(n)})) = 0$ и $\Psi(b_j^{(n)}) = \infty$. Далее, $-a_1, \dots, -a_{n-1}$, $\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}$, $\overline{\xi}, -\xi$, $-b_1^{(n)}, \dots, -b_{l-1}^{(n)}$ являются нулями функции Ψ. Отсюда, по теореме Бернсайда о представлении

$$\Psi(u) = \mathrm{const}\ \frac{\Omega(u,-\xi)}{\Omega(u,\xi)} \prod_{j=1}^{l-1} \frac{\Omega(u,-b_j^{(n)})}{\Omega(u,b_j^{(n)})} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\Omega(u,-a_j)\Omega(u,\overline{a_j})}{\Omega(u,a_j)\Omega(u,-\overline{a_j})} \frac{\Omega(u,\overline{\xi})}{\Omega(u,-\overline{\xi})} \frac{\Omega(u,\overline{a_n})}{\Omega(u,-\overline{a_n})} \times$$

$$\times \exp \sum_{j=1}^{l-1} m_j^{(n)} \Phi_j(u). \tag{28}$$

Из автоморфности Ψ и (3), (4) вытекает, что для $k = 1, \dots, l-1$

$$\sum_{j=1}^{n-1} (\Phi_k(a_j) + \Phi_k(-\overline{a_j}) - \Phi_k(\overline{a_j}) - \Phi_k(-a_j)) + \Phi_k(-\overline{a_n}) - \Phi_k(\overline{a_n}) + \Phi_k(-\overline{\xi}) -$$

$$-\Phi_k(\overline{\xi}) + \Phi_k(\xi) - \Phi_k(-\xi) + \sum_{j=1}^{l-1} (\Phi_k(b_j^{(n)}) - \Phi_k(-b_j^{(n)})) - \sum_{j=1}^{l-1} m_j^{(n)} a_{jk} \equiv 0 \ (\mathrm{mod} 2\pi i). \tag{29}$$

Так как функции Φ_k – нечетные, то система уравнений (29) может быть переписана так

$$2\sum_{j=1}^{n-1} (\Phi_k(a_j) - \Phi_k(\overline{a_j})) - 2\Phi_k(\overline{a_n}) - 2\Phi_k(\overline{\xi}) + 2\Phi_k(\xi) +$$

$$+2\sum_{j=1}^{l-1} \Phi_k(b_j^{(n)}) - \sum_{j=1}^{l-1} m_j^{(n)} a_{jk} \equiv 0 \quad (mod 2\pi i), \quad k = 1, \dots, l-1. \tag{30}$$

Чтобы доказать (21) достаточно рассмотреть функцию

$$\Psi(u) B_{n-1}(\varphi(u)) g_{(n)}(\varphi(u)) \varphi(u) / (W(\varphi(u))(1 - \overline{\alpha_n} \varphi(u)))$$

и использовать представления, получаемые с помощью теоремы Бернсайда

$$B_{n-1}(\varphi(u)) = \mathrm{const} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\Omega(u, a_k)\Omega(u, -a_k)}{\Omega(u, \overline{a_k})\Omega(u, -\overline{a_k})},$$

$$g_{(n)}(\varphi(u)) = \mathrm{const} \prod_{j=1}^{l-1} \frac{\Omega(u, b_j^{(n)})\Omega(u, -b_j^{(n)})}{\Omega(u, \xi)\Omega(u, -\xi)},$$

$$W(\varphi(u)) = \mathrm{const} \prod_{j=1}^{l} \frac{\Omega^2(u, w_j)}{\Omega(u, \xi)\Omega(u, -\xi)} \exp\left(-\sum_{j=1}^{l-1} \Phi_j(u)\right),$$

$$1 - \overline{\alpha_n}\varphi(u) = \mathrm{const} \frac{\Omega(u, \overline{a_n})\Omega(u, -\overline{a_n})}{\Omega(u, \xi)\Omega(u, -\xi)}.$$

Следовательно

$$\Psi(u)B_{n-1}(\varphi(u))g_{(n)}(\varphi(u))\varphi(u)/(W(\varphi(u))(1 - \overline{\alpha_n}\varphi(u))) =$$

$$= \mathrm{const} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\Omega^2(u, -a_k)}{\Omega^2(u, -\overline{a_k})} \frac{\Omega^2(u, -b_j^{(n)})}{\Omega^2(u, w_j)} \frac{\Omega^2(u, \overline{\xi})\Omega^2(u, -\xi)}{\Omega^2(u, -\overline{a_n})\Omega^2(u, w_l)} \exp \sum_{j=1}^{l-1} (m_j^{(n)} + 1)\Phi_j(u).$$

В силу автоморфности этой функции, числа $m_j^{(n)} + 1$ – чётные и

$$\left(\phi_n + \chi_n \sqrt{\frac{V}{W}}\right)(\varphi(u)) = \mathrm{const} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\Omega(u, -a_k)}{\Omega(u, -\overline{a_k})} \frac{\Omega(u, -b_j^{(n)})}{\Omega(u, w_j)} \cdot$$

$$\cdot \frac{\Omega(u, \overline{\xi})\Omega(u, -\xi)}{\Omega(u, -\overline{a_n})\Omega(u, w_l)} \exp \sum_{j=1}^{l-1} \frac{m_j^{(n)} + 1}{2} \Phi_j(u). \tag{31}$$

Но правая часть равенства (31) – не что иное, как функция $\Omega_n(u)$. Теорема 2 доказана.

Для $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ представления ортогональных многочленов для более общих весовых функций были получены автором в [11], [12].

ABSTRACT. The paper gives a representation of orthogonal rational functions on several arcs of the unit circle with respect to the weight functions of Geronimus type.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Bultheel, P. González-Vera, E. Hendriksen, O. Njåstad, "Moment problems and orthogonal functions", J. Comp. Appl. Math., vol. 48, pp. 49 – 68, 1993.
2. A. Bultheel, P. González-Vera, E. Hendriksen, O.Njåstad, Orthogonal Rational Functions, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
3. W. Burnside, "On a class of automorphic functions", Proc. London Math. Soc., vol. 23, pp. 49 – 88, 1892.

4. W. Burnside, "Further note on automorphic functions", Proc. London Math. Soc., vol. 23, pp. 281 – 295, 1892.
5. М. М. Джрбашян, "Ортогональные системы рациональных функций на единичной окружности с заданным множеством полюсов", Докл. АН СССР, том 3, стр. 1794 – 1798, 1962.
6. М. М. Джрбашян, "Ортогональные системы рациональных функций на круге", Изв. АН Арм.ССР, Математика, том 1, стр. 3 – 24, 1966.
7. М. М. Джрбашян, "Ортогональные системы рациональных функций на единичной окружности", Изв. АН Арм.ССР, Математика, том 1, стр. 106 – 125, 1966.
8. M. M. Djrbashian, "A survey on the theory of orthogonal systems and some open problems", Orthogonal Polynomials : Theory and Practice (P. Nevai, ed.), Kluwer, Boston, pp. 135 – 146, 1990.
9. Я. Л. Геронимус, "О полиномах, ортогональных на круге, тритонометрической проблеме моментов и об ассоциированных с нею функциях типа Каратеодори и Шура", Мат. сборник, том 15, стр. 99 – 130, 1944.
10. A. L. Lukashov, "On Chebyshev-Markov rational fractions over several intervals", J. Approx. Theory, vol. 95, pp. 333 – 352, 1998.
11. А. Л. Лукашов, "Многочлены, ортогональные на нескольких дугах", Современные проблемы теории функций и их приложения. (Тезисы докл. 10-й Саратовской зимней школы), изд-во Саратовского университета, стр. 83 — 84, 2000.
12. А. Л. Лукашов, "Круговые параметры многочленов, ортогональных на нескольких дугах единичной окружности", сдано в печать.
13. A. L. Lukashov, F. Peherstorfer, "Automorphic orthogonal and extremal polynomials", submitted.
14. B. Ninness, H. Hjalmarsson, F. Gustafsson, "Generalized Fourier and Toeplitz results for rational orthonormal bases", SIAM J. Control Optim., vol. 37, pp. 429 – 460, 1998.
15. F. Peherstorfer, R. Steinbauer, "Orthogonal polynomials on arcs of the unit circle, I", J. Approx. Theory, vol. 85, pp. 140 – 184, 1996.
16. F. Peherstorfer, R. Steinbauer, "Comparative asymptotics for perturbed orthogonal polynomials", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 384, pp. 1459 – 1486, 1996.
17. F. Peherstorfer, R. Steinbauer, "Orthogonal polynomials on the circumference and arcs of the circumference", J. Approx. Theory, vol. 102, pp. 96 – 119, 2000.
18. И. И. Привалов, "Граничные свойства аналитических функций", второе изд. М.- Л., Гостехиздат, 1950.
19. Ю. Я. Томчук, "О многочленах, ортогональных на заданной системе дуг единичной окружности, Докл. АН СССР, том 151, стр. 55 – 58, 1963.

9 сентября 2001

Саратовский государственный университет,
Саратов, Россия
E–mail : LukashovAL@info.sgu.ru