

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И СЛЕДЫ ФУНКЦИЙ ИЗ НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВ ТИПА СОБОЛЕВА–ЛИУВИЛЛЯ

А. Г. Багдасарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 36, № 5, 2001

В статье доказывается формула вещественной интерполяции для пары H -пространств типа Соболева–Лиувилля с разными анизотропиями. На основании этой формулы доказывается теорема о следах функций из H -пространств, порождённых полными многогранниками. Оказывается, что пространство следов зависит только от части многогранника, заключённой между гиперплоскостями $\{x : x_n = 0\}$ и $\{x : x_n = m\}$, где m – n -ая координата ближайшей к $\mathbb{R}^{n-1}$ вершины многогранника.

ВВЕДЕНИЕ

Интерполяционные теоремы и теоремы о следах для некоторых H -пространств типа Соболева–Лиувилля важны при исследовании краевых задач для общих регулярных дифференциальных операторов. H -пространства исследовались многими авторами. В частности, в [1] доказана теорема о следах в гильбертовых пространствах, а [2] содержит формулу комплексной интерполяции.

В настоящей статье доказываются теорема о следах и формула вещественной интерполяции для пары $\{H_p^1(\mu), H_p^1(\nu)\}$ пространств типа Соболева–Лиувилля. Для этого мы вводим B -пространства типа Бесова, порождённые отношением μ/ν , которые могут быть характеризованы посредством покрытий $\mathbb{R}^n$ только в частном случае, когда $\mu/\nu \rightarrow \infty$ (см. [3] – [5]).

Формула вещественной интерполяции вместе со свойством “квазилинеаризуемости” (см. [4]) пары H -пространств и абстрактная теорема вложения для разных измерений (Теорема 1.8.5 из [4]) позволяют доказать теорему о следах для H -пространств, порождённых некоторым полным многогранником (см. Определение 4). Обнаруживается интересная особенность, что пространство следов зависит только от части многогранника, заключённой между гиперплоскостями $\{x : x_n = 0\}$ и $\{x : x_n = m\}$, где m – n -ая координата ближайшей к $\mathbb{R}^{n-1}$ вершины многогранника.

§1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Будем пользоваться следующими обозначениями :

$\mathbb{R}^n$ – n -мерное евклидово пространство,

$\mathbb{Z}_+^n$ – множество мультииндексов, т.е. векторов с неотрицательными целыми компонентами,

F – оператор преобразования Фурье,

S – класс Шварца,

M_p – пространство мультипликаторов Фурье типа (p, p) .

Знак “ $\sim$ ” будет означать двустороннюю оценку, буквой c будем обозначать константы. Для $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ и $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ положим

$$\xi^\gamma = \prod_{i=1}^n \xi_i^{\gamma_i}, \quad D^\gamma = D_1^{\gamma_1} \dots D_n^{\gamma_n},$$

$$\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, i = 1, \dots, n\}.$$

Определение 1. Обозначим через G_+ множество положительных функций $\mu \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ таких, что для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ с компонентами 0 или 1

$$|\xi^\alpha D^\alpha \mu(\xi)| \leq c\mu(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \prod_{i=1}^n \xi_i \neq 0. \quad (1)$$

Функциональные пространства, гладкость в которых задается функцией $\mu(\xi)$, удовлетворяющей (1), изучались в [2].

Определение 2. Пусть $1 < p < \infty$, $-\infty < s < \infty$, $\mu \in G_+$. Положим

$$H_p^s(\mu, \mathbb{R}^n) \equiv H_p^s(\mu) = \left\{ f \in S' : \|f\|_H = \|F^{-1}\{\mu^s Ff\}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\}.$$

Для положительных функций μ , непрерывных в $\mathbb{R}^n$, бесконечно дифференцируемых вне координатных осей и удовлетворяющих (1), H -пространства понимаются как пополнение класса Шварца S относительно вышеопределенной нормы. Полагая $I_\mu(\cdot) = F^{-1}\{\mu F(\cdot)\}$, $I(M) = \{f \in S' : If \in M\}$, можно записать $H_p^s(\mu) = I_{\mu^s}(L_p)$. Для определения B -пространств типа Бесова, порожденных функциями из G_+ , воспользуемся методом вещественной интерполяции ([4], [5]).

Определение 3. Пусть $1 < p < \infty$, $-\infty < s < \infty$, $\mu \in G_+$. Положим

$$B_{p,q}^0(\mu, \mathbb{R}^n) \equiv B_{p,q}^0(\mu) = (H_p^1(\mu), H_p^{-1}(\mu))_{1/2,q}, \quad B_{p,q}^s(\mu, \mathbb{R}^n) = I_{\mu^s}(B_{p,q}^0(\mu, \mathbb{R}^n)).$$

Если в Определениях 2 и 3 в качестве функции $\mu(\xi)$ использовать функцию $(1 + |\xi|^2)^{1/2}$, то H и B -пространства совпадают с классическими пространствами Соболева–Ляувилля и Бесова (см. [3] – [5]).

Определение 4. Непустой многогранник $\mathcal{N}$ с вершинами из $\mathbb{Z}_+^n$ называется полным, если начало координат является одной из вершин $\mathcal{N}$, причём $\mathcal{N}$ имеет вершины на каждой координатной оси, отличные от начала координат.

Сопоставим полному многограннику $\mathcal{N}$ функцию

$$\mu(\xi) = \left(1 + \sum_{\alpha} \xi_i^{2\alpha_i}\right)^{1/2}, \quad (2)$$

где сумма берётся по всем вершинам многогранника $\mathcal{N}$.

§2. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ H -ПРОСТРАНСТВ

Начнем с B^0 -пространств.

Теорема 1. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $\mu \in G_+$, $a \neq 0$. Тогда $B_{p,q}^0(\mu) = B_{p,q}^0(\mu^a)$.

Доказательство : Сначала рассмотрим случай $a = -1$. По Теореме 3.4.1 из [5] получим

$$\begin{aligned} B_{p,q}^0\left(\frac{1}{\mu}\right) &= \left(H_p^1\left(\frac{1}{\mu}\right), H_p^1(\mu)\right)_{1/2,q} = \left(H_p^1(\mu), H_p^1\left(\frac{1}{\mu}\right)\right)_{1/2,q} = \\ &= (H_p^1(\mu), H_p^{-1}(\mu))_{1/2,q} = B_{p,q}^0(\mu). \end{aligned}$$

В [6] доказано, что при $1 < p < \infty$, $\lambda, \rho \in G_+$ пара $\{H_p^1(\lambda), H_p^1(\rho)\}$ квазилинеаризуема (см. [4]) с операторами

$$V_0(t) = F^{-1}\left(\frac{t\rho}{\lambda + t\rho}F\right), \quad V_1(t) = F^{-1}\left(\frac{\lambda}{\lambda + t\rho}F\right).$$

Следовательно, по Лемме 1.8.4 из [4], для функционала Петре (см. [4], [5]) имеем

$$K(t, f; H_p^1(\lambda), H_p^1(\rho)) \sim \left\| F^{-1}\left\{\frac{t\lambda\rho}{\lambda + t\rho}Ff\right\} \right\|_{L_p}.$$

Так как по предположению $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ и $\lambda, \rho \in G_+$, то имеем

$$\begin{aligned} &(H_p^1(\lambda), H_p^1(\rho))_{\theta,q} = \\ &= \left\{ f \in S' : \|f\| = \left(\int_0^\infty t^{-\theta q} \left\| F^{-1}\left\{\frac{t\lambda\rho}{\lambda + t\rho}Ff\right\} \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty \right\}. \quad (3) \end{aligned}$$

Полагая $\lambda = \mu$, $\rho = 1/\mu$, $\theta = 1/2$ и учитывая Определение 3, получим

$$B_{p,q}^0(\mu) = \left\{ f \in S' : \|f\|_B = \left(\int_0^\infty \left\| F^{-1}\left\{\frac{t^{1/2}\mu}{\mu^2 + t}Ff\right\} \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty \right\}. \quad (4)$$

Пусть теперь $a > 1$. Так как

$$b \equiv \frac{t^{1/2} \mu^a}{\mu^{2a} + t} \leq \frac{1}{2}, \quad 1 - \frac{1}{a} > 0,$$

то из теоремы Лизоркина [7] и (1) вытекает, что $b^{1-1/a} \in M_p$. Следовательно, в силу (3) имеем

$$\|f\|_{B_{p,q}^0(\mu^a)}^q \sim \int_0^\infty \left\| F^{-1} b^{1-1/a} b^{1/a} F f \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} \leq c \int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2} \mu}{\mu^2 + t^{1/a}} F f \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t}. \quad (5)$$

Сделав замену переменной $u = t^{1/a}$ в последнем интеграле, в силу (4) и (5) имеем

$$\|f\|_{B_{p,q}^0(\mu^a)}^q \leq c \int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{u^{1/2} \mu}{\mu^2 + u} F f \right\|_{L_p}^q \frac{du}{u} = c \|f\|_{B_{p,q}^0(\mu)}^q,$$

т.е.

$$B_{p,q}^0(\mu) \subset B_{p,q}^0(\mu^a), \quad a > 1, \quad 1 < p < \infty, \quad 1 \leq q \leq \infty. \quad (6)$$

По Теореме 3.7.1 из [5] и §13.3 из [1] имеем

$$(B_{p,q}^0(\mu))^* = (H_{p'}^{-1}(\mu), H_{p'}^1(\mu))_{1/2, q'} = (H_{p'}^1(\mu), H_{p'}^{-1}(\mu))_{1/2, q'} = B_{p',q'}^0(\mu), \quad (7)$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

Следовательно, вложение, обратное к (6), также выполняется. Итак, Теорема 1 доказана для $a > 1$. Если $0 < a < 1$, то имеем $B_{p,q}^0(\mu^a) = B_{p,q}^0((\mu^a)^{1/a}) = B_{p,q}^0(\mu)$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \theta < 1$, $\lambda, \rho \in G_+$. Тогда

$$(H_p^1(\lambda), H_p^1(\rho))_{\theta, q} = I_{\lambda^{1-\theta} \rho^\theta} (B_{p,q}^0(\lambda/\rho)).$$

Доказательство : Из (3) имеем

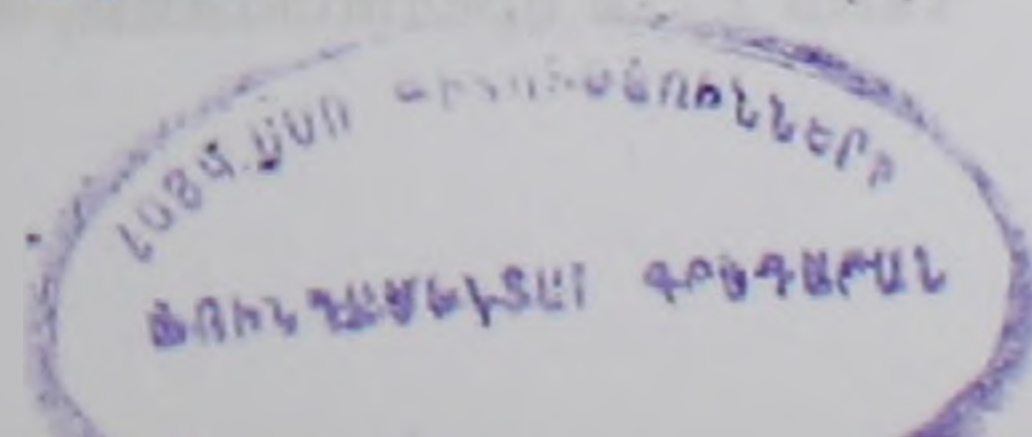
$$\|f\| = \left(\int_0^\infty \left\| F^{-1} \lambda^{1-\theta} \rho^\theta \frac{t^{1-\theta} \mu^\theta}{\mu + t} F f \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q},$$

где $\mu = \lambda/\rho$. В силу (4), для доказательства Теоремы 2 достаточно показать, что

$$\|f\|_{B_{p,q}^0(\mu)} \sim \left(\int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1-\theta} \mu^\theta}{\mu + t} F f \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}. \quad (8)$$

Выберем число $m > 0$, удовлетворяющее условию $(2m)^{-1} < \theta$ и $(2m)^{-1} < 1 - \theta$, и покажем, что

$$\frac{u^{m(1-\theta)} \mu^\theta}{\mu + u^m} \leq c \frac{u^{1/2} \mu^{1/(2m)}}{\mu^{1/m} + u}, \quad u > 0, \quad c > 0. \quad (9)$$



Для этого положим $a = 1 - \theta - (2m)^{-1}$ и $b = 1 - \theta + (2m)^{-1}$. Поскольку $(2m)^{-1} < \theta$, $(2m)^{-1} < 1 - \theta$, то имеем $0 < a, b < 1$. Неравенство (9) перепишем в виде

$$u^{m(1-\theta)} \mu^{\theta+1/m} + u^{m(1-\theta)+1} \mu^\theta \leq cu^{1/2} \mu^{1/(2m)} (\mu + u^m). \quad (10)$$

Имеем

$$\begin{aligned} u^{m(1-\theta)} \mu^{\theta+1/m} + u^{m(1-\theta)+1} \mu^\theta &= u^{1/2} \mu^{1/(2m)} \mu^{1-a} u^{ma} + u^{1/2} \mu^{1/(2m)} \mu^{1-b} u^{mb} = \\ &= u^{1/2} \mu^{1/2} (u^{ma} \mu^{1-a} + u^{mb} \mu^{1-b}) \leq cu^{1/2} \mu^{1/2} (\mu + u^m). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает (10), а следовательно и (9).

Сделаем замену переменной $t = u^m$ в интеграле (8). Тогда используя (1), (9), Теорему 1 и теорему Лизоркина о мультипликаторах Фурье из [7], получим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1-\theta} \mu^\theta}{\mu + t} Ff \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} &\sim \int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{u^{m(1-\theta)} \mu^\theta}{\mu + u^m} Ff \right\|_{L_p}^q \frac{du}{u} \leq \\ &\leq c \int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{u^{1/2} \mu^{1/(2m)}}{\mu^{1/m} + u} Ff \right\|_{L_p}^q \frac{du}{u} = c \|f\|_{B_{p,q}^0(\mu^{1/m})}^q \sim \|f\|_{B_{p,q}^0(\mu)}^q. \end{aligned} \quad (11)$$

Для доказательства обратной оценки воспользуемся представлением (3). Имеем

$$\begin{aligned} \|f\|_{(H_p^\theta(\mu), H_p^{\theta-1}(\mu))_{\theta,q}} &\sim \int_0^\infty t^{-\theta q} \left\| F^{-1} \frac{t \mu^{2\theta-1}}{\mu^\theta + t \mu^{\theta-1}} Ff \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} = \\ &= \int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1-\theta} \mu^\theta}{\mu + t} Ff \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (8) вытекает $B_{p,q}^0(\mu) = (H_p^\theta(\mu), H_p^{\theta-1}(\mu))_{\theta,q}$. Следовательно, (11) равносильно вложению $B_{p,q}^0(\mu) \subset (H_p^\theta(\mu), H_p^{\theta-1}(\mu))_{\theta,q}$. Доказательство обратного вложения аналогично последней части Теоремы 1 и получается переходом к сопряженным пространствам с использованием (7). Теорема 2 доказана.

Следующие два параграфа посвящены проблеме следов.

§3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}_+^n$ — полный выпуклый многогранник, и пусть $0 = m_0 < m_1 < \dots < m_N$ — n -тые координаты вершин многогранника $\mathcal{N}$. Рассмотрим гиперплоскости

$$P_j = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = m_j\}, \quad j = 0, 1, \dots, N.$$

Обозначим через $\mathcal{N}_j$ проекции на $\mathbb{R}^{n-1}$ сечений многогранника $\mathcal{N}$ гиперплоскостями P_j , и предположим, что $\mathcal{N}_j$ — полные многогранники в $\mathbb{R}^{n-1}$, $j = 0, 1, \dots, N$.

Согласно (2), каждому многограннику $\mathcal{N}_j$ сопоставим функцию μ_j . Функцию $\mu(\xi)$, отвечающую многограннику $\mathcal{N}$, можно представить в виде

$$\mu(\xi) \sim \left(\mu_0^2(\xi') + \sum_{j=1}^N \xi_n^{2m_j} \mu_j^2(\xi') \right)^{1/2}, \quad \xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}). \quad (12)$$

Лемма 1. Пусть $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}_+^n$, $\mathcal{N}_j \subset \mathbb{R}_+^{n-1}$ – полные выпуклые многогранники, а μ_j – функции, отвечающие многогранникам $\mathcal{N}_j$, $j = 0, 1, \dots, N$. Тогда для каждого $1 < p < \infty$ существует постоянная c такая, что при $j = 2, \dots, N$ имеем

$$\mu_0^{1-1/pm_j}(\xi') \mu_j^{1/pm_j}(\xi') \leq c \mu_0^{1-1/pm_1}(\xi') \mu_1^{1/pm_1}(\xi'), \quad \xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}). \quad (13)$$

Доказательство : Неравенство (13) перепишем в виде

$$\mu_0^{1-m_1/m_j} \mu_j^{m_1/m_j} \leq c \mu_1, \quad j = 2, \dots, N. \quad (14)$$

Обозначим через $\mathcal{N}'_j$, $j = 2, \dots, N$ многогранники, отвечающие функциям в левой части (14), через $\{\alpha\}$ – множество вершин многогранника $\mathcal{N}_0$, а через $\{\beta^j\}$ – множество вершин многогранника $\mathcal{N}_j$, $j = 1, \dots, N$. Тогда вершины многогранника $\mathcal{N}'_j$ имеют вид

$$\beta^j \frac{m_1}{m_j} + \alpha \left(1 - \frac{m_1}{m_j} \right), \quad \beta^j \in \mathcal{N}_j, \quad \alpha \in \mathcal{N}_0. \quad (15)$$

Поскольку точки (β^j, m_j) и $(\alpha, 0)$ принадлежат выпуклому многограннику $\mathcal{N}$, то он содержит также отрезок, соединяющий эти точки. Этот отрезок пересекается с гиперплоскостью $\{x : x_n = m_1\}$ в некоторой точке $(\gamma, m_1) \in \mathcal{N}$, где $\gamma \in \mathcal{N}_1$. Тогда для некоторой точки $t \in (0, 1)$ имеем

$$(\gamma, m_1) = (\alpha, 0) + t(\beta^j - \alpha, m_j) = (\alpha + t(\beta^j - \alpha), tm_j).$$

Отсюда получаем $t = m_1/m_j$. Следовательно

$$\gamma = \alpha + t(\beta^j - \alpha) = \alpha \left(1 - \frac{m_1}{m_j} \right) + \beta^j \frac{m_1}{m_j}.$$

Отсюда и из (15) следует, что каждая вершина многогранника $\mathcal{N}'_j$ совпадает с некоторой точкой $\gamma \in \mathcal{N}_1$. Следовательно, $\mathcal{N}'_j \subset \mathcal{N}_1$. Последнее включение эквивалентно (14) и, следовательно, (13). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. В предположениях Леммы 1 имеет место оценка

$$\mu(\xi) \leq c \left(\mu_0(\xi') + |\xi_n|^{m_N} \mu_0(\xi') \left(\frac{\mu_1(\xi')}{\mu_0(\xi')} \right)^{m_N/m_1} \right), \quad (16)$$

где $\mu(\xi)$ – функция, отвечающая многограннику $\mathcal{N}$ (см. (12)).

Доказательство : Сначала докажем неравенство

$$\mu_0(\xi') + |\xi_n|^{m_1} \mu_1(\xi') + |\xi_n|^{m_N} \mu_N(\xi') \leq c \left(\mu_0(\xi') + |\xi_n|^{m_N} \mu_0^{1-m_N/m_1}(\xi') \mu_1^{m_N/m_1}(\xi') \right). \quad (17)$$

Первое слагаемое в левой части (17) очевидно оценивается. Третье слагаемое можно оценить с помощью Леммы 1, поскольку в силу (14) $\mu_N \leq c \mu_0^{1-m_N/m_1} \mu_1^{m_N/m_1}$. Следовательно, для доказательства (17) осталось оценить второе слагаемое в левой части, т.е. доказать, что

$$|\xi_n|^{m_1} \mu_1(\xi') \mu_0^{m_N/m_1}(\xi') \leq c \left(\mu_0^{1+m_N/m_1}(\xi') + |\xi_n|^{m_N} \mu_0(\xi') \mu_1^{m_N/m_1}(\xi') \right). \quad (18)$$

В обозначениях Леммы 1 вершины многогранника, отвечающего функции в левой части (18), имеют вид

$$\left(\beta + \alpha \frac{m_N}{m_1}, m_1 \right), \quad \beta \in \mathcal{N}_1, \quad \alpha \in \mathcal{N}_0. \quad (19)$$

Рассмотрим точки

$$\left(\alpha \left(1 + \frac{m_N}{m_1} \right), 0 \right), \quad \left(\alpha + \beta \frac{m_N}{m_1}, m_N \right). \quad (20)$$

Поскольку

$$\left(\alpha \left(1 + \frac{m_N}{m_1} \right), 0 \right) \left(1 - \frac{m_1}{m_N} \right) + \left(\alpha + \beta \frac{m_N}{m_1}, m_N \right) \frac{m_1}{m_N} = \left(\beta + \alpha \frac{m_N}{m_1}, m_1 \right),$$

то ясно, что отрезок, соединяющий точки из (20), содержит точки из (19). Учитывая, что точки вида (20) содержатся в многограннике, отвечающем функции в левой части (18), заключаем, что выполняется оценка (18). Оценка (17) доказана. Таким образом, Лемма 2 доказана при $N = 2$.

Сведем теперь общий случай к случаю $N = 2$. Отметим, что в силу (17)

$$\mu_0(\xi') + \sum_{j=1}^N |\xi_n|^{m_j} \mu_j(\xi') \leq c \sum_{j=1}^N \left(\mu_0(\xi') + |\xi_n|^{m_N} \mu_0^{1-m_N/m_j}(\xi') \mu_j^{m_N/m_j}(\xi') \right). \quad (21)$$

По Лемме 1 имеем (см. (14))

$$\mu_0^{1-m_N/m_j} \mu_j^{m_N/m_j} \leq c \mu_0^{1-m_N/m_1} \mu_1^{m_N/m_1}. \quad (22)$$

Из (21) и (22) получаем (16). Лемма 2 доказана.

§4. ТЕОРЕМА О СЛЕДАХ

Рассмотрим следующий оператор следа :

$$(T_r f)(\xi') = f(\xi', 0), \quad \xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}), \quad f \in S(\mathbb{R}^n).$$

Пусть $\mathcal{N}$ – полный выпуклый многогранник, отвечающий функции $\mu(\xi)$ (см. (12)). Обозначим через $\mathcal{N}^*$ часть многогранника $\mathcal{N}$, лежащую между гиперплоскостями $\{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$ и $\{x \in \mathbb{R}^n : x_n = m_1\}$. Многограннику $\mathcal{N}^*$ сопоставим функцию

$$\mu^*(\xi) = (\mu_0^2(\xi') + \xi_n^{2m_1} \mu_1^2(\xi'))^{1/2}, \quad \xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}). \quad (23)$$

Теорема 3. Пусть $\mathcal{N}$ и $\mathcal{N}^*$ – полные выпуклые многогранники с функциями μ и μ^* , определенными в (12) и (23), соответственно. Пусть далее $1 < p < \infty$ и m_1, m_N – натуральные числа. Тогда оператор следа есть ретракция

$$H_p^1(\mu, \mathbb{R}^n) \quad \text{на} \quad J \equiv I_{\mu_0^{1-1/pm_1} \mu_1^{1/pm_1}} \left(B_{p,p}^0 \left(\frac{\mu_0}{\mu_1}, \mathbb{R}^{n-1} \right) \right).$$

Доказательство : Рассмотрим функцию (см. Лемму 2)

$$\mu^{**}(\xi) = \left(\mu_0^2(\xi') + \xi_n^{2m_N} \mu_0^{2(1-m_N/m_1)}(\xi') \mu_1^{2m_N/m_1}(\xi') \right)^{1/2}. \quad (24)$$

По Лемме 2 имеем

$$c_1 \mu^*(\xi) \leq \mu^*(\xi) \leq c_2 \mu^{**}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (25)$$

В силу теоремы вложения [1], из (25) вытекает

$$H_p^1(\mu^{**}, \mathbb{R}^n) \subset H_p^1(\mu, \mathbb{R}^n) \subset H_p^1(\mu^*, \mathbb{R}^n). \quad (26)$$

Поскольку пара $\{H_p^1(\lambda), H_p^1(\rho)\}$ квазилинеаризуема для любых функций $\lambda, \rho \in G_+$ (см. [6]), то пары

$$\{H_p^1(\mu_0, \mathbb{R}^{n-1}), H_p^1(\mu_1, \mathbb{R}^{n-1})\}$$

и

$$\{H_p^1(\mu_0, \mathbb{R}^{n-1}), H_p^1(\mu_0^{1-m_N/m_1} \mu_1^{m_N/m_1}, \mathbb{R}^{n-1})\}$$

квазилинеаризуемы. Следовательно, можно применить Теорему 1.8.5 из [4] к пространствам $H_p^1(\mu^*, \mathbb{R}^n)$ и $H_p^1(\mu^{**}, \mathbb{R}^n)$, где μ^* и μ^{**} определяются по (23)

и (24), соответственно. В силу этой теоремы (см. также Лемму 2.9.1 и Теорему 2.9.1 из [4]) заключаем, что оператор следа есть ретракция

$$H_p^1(\mu^*, \mathbb{R}^n) \text{ на } (H_p^1(\mu_0, \mathbb{R}^{n-1}), H_p^1(\mu_1, \mathbb{R}^{n-1}))_{1/(pm_1), p}$$

и

$$H_p^1(\mu^{**}, \mathbb{R}^n) \text{ на } (H_p^1(\mu_0, \mathbb{R}^{n-1}), H_p^1(\mu_0^{1-m_N/m_1}, \mu_1^{m_N/m_1}, \mathbb{R}^{n-1}))_{1/(pm_N), p}.$$

В силу Теорем 1 и 2, вышеприведённые интерполяционные пространства совпадают с пространством J . Теперь утверждение теоремы следует из (26). Теорема 3 доказана.

Замечание. Утверждение Теоремы 3 означает (см. [4], [5]), что оператор следа (после продолжения по непрерывности) есть линейный ограниченный оператор, для которого существует линейный ограниченный оператор продолжения σ такой, что $T_r\sigma = E$. Таким образом, пространство следов пространства $H_p^1(\mu, \mathbb{R}^n)$, порожденного многогранником $\mathcal{N}$, определяется многогранником $\mathcal{N}^*$, являющимся частью $\mathcal{N}$. Остальная часть многогранника $\mathcal{N}$ не влияет на пространство следов.

ABSTRACT. The paper proves a real interpolation formula for a pair of H -spaces of Sobolev–Liouville type, implying a theorem on traces of functions from H -spaces generated by a complete polyhedron. It turns out that the trace space depends only on the part of the generating polyhedron contained between the hyperplanes $\{x : x_n = 0\}$ and $\{x : x_n = m\}$, where m is the n -th coordinate of the vertex closest to $\mathbb{R}^{n-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Р. Волевич, Б. П. Панеях, "Некоторые пространства обобщённых функций и теоремы вложения", УМН, том 20, № 1, стр. 3 – 74, 1965.
2. H. Triebel, "General function spaces, III", Analysis Math., vol. 3, pp. 221 – 249, 1977.
3. С. М. Никольский, Приближение Функций Многих Переменных и Теоремы Вложения, Наука, Москва, 1977.
4. Х. Трибель, Теория Интерполяций. Функциональные пространства. Дифференциальные Операторы, Мир, Москва, 1980.
5. Й. Берг, Й. Лёфстрём, Интерполяционные Пространства. Введение, Мир, Москва, 1988.
6. А. Г. Багдасарян, "Об интерполяционных свойствах некоторых квазилинеаризуемых пар", Мат. Сборник, том 189, № 2, стр. 73 – 80, 1998.
7. П. И. Лизоркин, " (L_p, L_q) -мультипликаторы интегралов Фурье", ДАН СССР, том 152, стр. 808 – 811, 1963.