

ОБОБЩЁННЫЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАЛ

Н. Н. Холщевникова

Известия Национальной Академии Наук Армений. Математика,
том 36, № 4, 2001

Рассматривается обобщенный тригонометрический интеграл, позволяющий считать рядами Фурье тригонометрические ряды, сходящиеся вне некоторых специальных множеств единственности.

Следующие два примера привели к хорошо известным обобщениям интеграла Лебега. Первый пример : функция

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & \text{для } x \neq 0 \\ 0, & \text{для } x = 0 \end{cases}$$

имеет конечную производную $f(x)$ в каждой точке

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & \text{для } x \neq 0 \\ 0, & \text{для } x = 0. \end{cases}$$

Итак, $F(x)$ есть примитивная для $f(x)$ на $[-1, 1]$, но f не суммируема на $[-1, 1]$.
Второй пример : ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$ сходится всюду, но его сумма не суммируема на $[0, 2\pi]$.

Проблема интегрирования функций, имеющих примитивные, решается интегралом Данжуа в узком смысле, или эквивалентным ему интегралом Перрона (см. [1] – [3]).

Второй пример приводит к двум проблемам : интегрировать суммы сходящихся тригонометрических рядов и сделать эти ряды рядами Фурье в смысле этого интеграла. В 1973 году В. А. Скляренко [4] построил тригонометрический ряд, который всюду сходится к конечной интегрируемой по Данжуа-Хинчину функции, но не является рядом Фурье-Данжуа-Хинчина. Сходящиеся всюду тригонометрические ряды являются рядами Фурье в смысле тотализаций Данжуа, P^2

-интеграла Джеймса [5] и ряда других интегралов (см. обзор [3]). Как было показано П. Л. Ульяновым [6] (см. также [7]), ряды по синусам или косинусам с монотонно убывающими коэффициентами A -интегрируемы.

В своей диссертации "Интеграл и тригонометрический ряд", опубликованной в 1915 году, см. [8], Н. Н. Лузин писал "Одной из главнейших целей обобщения понятия интеграла является расширение идеи ряда Фурье... Интегрирование как операция определения коэффициентов тригонометрического ряда по его сумме."

Напомним некоторые определения.

Множество $E \subset [0, 2\pi)$ называется множеством единственности, кратко U -множеством, если из сходимости тригонометрического ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (1)$$

к нулю на $[0, 2\pi) \setminus E$ следует, что все коэффициенты этого ряда равны нулю.

Если E не является U -множеством, оно называется M -множеством (кратным множеством).

Г. Кантор доказал в 1870 году, что конечные множества являются U -множествами и в 1872 году, что всякое счётное множество конечного ранга Кантора-Бендиксона является U -множеством. В. Юнг в 1909 году показал, что всякое счётное множество есть U -множество. Д. Е. Меньшов в 1916 году построил замкнутое M -множество меры нуль и это явилось большим сюрпризом для математиков того времени. В 1922 – 1923 годах А. Райхман и Н. К. Бари независимо открыли классы совершенных U -множеств.

Пусть S – тригонометрический ряд, сходящийся к функции $f(x)$ на множестве $[0, 2\pi) \setminus E$. Если E является M -множеством, то существует много различных тригонометрических рядов, сходящихся к f на $[0, 2\pi) \setminus E$. Таким образом, если мы знаем f только на $[0, 2\pi) \setminus E$, мы не можем восстановить S однозначно. Пусть теперь E есть U -множество. Если два тригонометрических ряда S_1 и S_2 сходятся к $f(x)$ на $[0, 2\pi) \setminus E$, то $S_1 = S_2$. Следовательно, такой тригонометрический ряд однозначно определяется по своей сумме на $[0, 2\pi) \setminus E$. Можем ли мы рассматривать такой тригонометрический ряд как ряд Фурье в каком-либо смысле?

Существует много открытых вопросов в этой области даже в случае, когда f суммируемая функция. В 1911 году Ш. Ж. Валле-Пуссенем (см. [7]) доказана

Теорема (Валле-Пуссен). Если тригонометрический ряд сходится к конечной суммируемой функции f всюду за исключением, быть может, счётного множества E , то этот ряд есть ряд Фурье функции f .

В 1923 году И. И. Привалов [9] доказал, что мы можем взять замкнутое множество единственности в качестве исключительного множества E в теореме Валле-Пуссена.

В 1996 году Н. Н. Холщевникова [10] доказала, что в качестве исключительного множества E в теореме Валле-Пуссена можно взять $E_0 \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, где E_0 – замкнутое U -множество, а E_i – специальные замкнутые U -множества, в частности, H -множества или H' -множества, введённые А. Райхманом и И. И. Пятецким-Шапиро.

Вопрос о том, можно ли в теореме Валле-Пуссена в качестве исключительного множества E взять произвольное U -множество (и даже произвольное F_σ -множество) или нет, открыт. Из результатов Р. И. Овсепяна (см. [11]) следует, что условие конечности функции, к которой сходится тригонометрический ряд вне множества E в теореме Валле-Пуссена, существенно.

Напомним теперь определения P и P^2 -интегралов.

Пусть $f(x)$ – функция, определённая на $[a, b]$. Функции $M(x)$ и $m(x)$ называются, соответственно, P -мажорантой и P -минорантой для f на $[a, b]$, если

- 1) $M(x)$ и $m(x)$ непрерывны на $[a, b]$,
- 2) $M(a) = m(a) = 0$,
- 3) $\underline{D}M(x) \geq f(x) \geq \overline{D}m(x)$ почти всюду на $[a, b]$,
- 4) $\underline{D}M(x) \neq -\infty$, $\overline{D}m(x) \neq +\infty$, для всех x из $[a, b]$ за исключением, быть

может, счётного множества E .

Если $\sup_m m(b) = \inf_M M(b) = I$, то f называется интегрируемой по Перрону и $(P) \int_a^b f(x) dx = I$.

Если f интегрируема по Перрону на $[a, b]$, то для всякого $x \in [a, b]$

$$\sup_m m(x) = \inf_M M(x) = (P) \int_a^x f(t) dt = F(x)$$

и $F(x)$ называется P -примитивной для f на $[a, b]$.

Интеграл Перрона шире интеграла Лебега и несобственного интеграла Римана, он восстанавливает функцию по её точной производной. Но сумма всюду сходящегося тригонометрического ряда может быть не интегрируемой по Перрону.

Пусть $f(x)$ определена на $[a, b]$. Для P^2 -интеграла Джеймса функции $M(x)$ и $m(x)$ называются, соответственно, P^2 -мажорантой P^2 -минорантой для f на $[a, b]$, если

- 1) $M(x)$ и $m(x)$ непрерывны на $[a, b]$,
- 2) $M(a) = M(b) = m(a) = m(b) = 0$,
- 3) $\underline{D}^2 M(x) \geq f(x) \geq \overline{D}^2 m(x)$ почти всюду на $[a, b]$,
- 4) $\underline{D}^2 M(x) \neq -\infty$, $\overline{D}^2 m(x) \neq +\infty$ для всех x из $[a, b]$ за исключением, быть может, счётного множества E , на котором $M(x)$ и $m(x)$ гладкие, т.е. для $x \in E$ имеем

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{M(x+h) + M(x-h) - 2M(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(x+h) + m(x-h) - 2m(x)}{h} = 0.$$

Функция f называется P^2 -интегрируемой на (a, x, b) , где $a < x < b$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существуют P^2 -мажоранта и P^2 -миноранта $M(x)$ и $m(x)$ такие, что $0 \leq m(x) - M(x) < \varepsilon$. Если f P^2 -интегрируема на (a, x_0, b) для некоторого $a < x_0 < b$, то f P^2 -интегрируема на (a, x, b) для всякого $a < x < b$, и функция

$$\Phi(x) = \sup_m m(x) = \inf_M M(x)$$

называется неопределённым P^2 -интегралом или P^2 -примитивной для f .

Следующие достаточные условия для множеств единственности получены И. И. Пятецким-Шапиро (см. [7], стр. 813).

Теорема А (Пятецкий-Шапиро). Пусть для $E \subset [0, 2\pi]$ существует последовательность функций

$$f_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^{(n)} e^{ikx}, \quad (2)$$

удовлетворяющая условиям

$$f_n(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in E; \quad (3)$$

$$\sum_k |a_k^{(n)}| \leq C; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_k^{(n)} = 0, \quad k \neq 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_0^{(n)} = 1; \quad (4)$$

$$\sum_k |k a_k^{(n)}| < \infty, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Тогда E является U -множеством.

Заметим, что если E удовлетворяет условиям этой теоремы, то то же имеет место и для замыкания множества E .

Определение. Если для множества E существует последовательность неотрицательных функций (2) со свойствами (3) - (5), то E называется "достаточным" U -множеством.

Известно, что всякое H -множество и всякое H' -множество являются "достаточными" U -множествами. Через F_σ^{SU} обозначим класс всех множеств, которые являются объединениями счётного числа "достаточных" U -множеств. В частности, объединение счётного числа H -множеств и объединение счётного числа H' -множеств принадлежат F_σ^{SU} . Дадим определение некоторого тригонометрического интеграла.

Определение. Непрерывные функции $M(x)$ и $m(x)$ называются T^2 -мажорантой и T^2 -минорантой для $f(x)$ на $[0, 2\pi]$, если

1) $M(x) = ax^2 + M_1(x)$ и $m(x) = bx^2 + m_1(x)$, где $M_1(x)$ и $m_1(x)$ суть 2π -периодические функции с коэффициентами Фурье порядка $o(1/n^2)$,

2) $M(2\pi) = m(2\pi) = 0$.

3) $\underline{D}^2 M(x) \geq f(x) \geq \overline{D}^2 m(x)$ почти всюду на $[0, 2\pi]$,

4) $\underline{D}^2 M(x) \neq -\infty$ и $\overline{D}^2 m(x) \neq +\infty$ для всех $x \in [0, 2\pi]$ за исключением, быть может, множества $E \in F_\sigma^{SU}$.

Функция $f(x)$ называется T^2 -интегрируемой на $[0, 2\pi]$, если

$$\sup_M M(0) = \inf_m m(0) = I \quad \text{и} \quad (T^2) \int_0^{2\pi} f(x) dx = -\frac{I}{\pi}.$$

Нам необходима Лемма из [10] в следующей форме.

Лемма А. Пусть $F(x)$ — функция вида 1) и $\underline{D}^2 F(x) \geq 0$ для $x \in (a, b) \setminus E$, где $E \in F_\sigma^{SU}$. Тогда $F(x)$ выпукла на (a, b) .

Из Леммы А вытекает

Лемма 1. Пусть $M(x)$ и $m(x)$ суть T^2 -мажоранта и T^2 -миноранта для $f(x)$. Тогда функция $M(x) - m(x)$ неположительна и выпукла на $[-2\pi, 2\pi]$. Если для некоторого $x_0 \in (-2\pi, 2\pi)$ имеем $\sup_M M(x_0) = \inf_m m(x_0)$, то $\sup_M M(x) = \inf_m m(x)$ для всякого $x \in (-2\pi, 2\pi)$.

Доказательство : Для всех $x \in [-2\pi, 2\pi]$ с возможным исключением множества $E \in F_\sigma^{SU}$

$$\underline{D}^2(M(x) - m(x)) \geq \underline{D}^2 M(x) - \overline{D}^2 m(x) \geq 0.$$

По Лемме А функция $M(x) - m(x)$ выпукла, и $m(x) - M(x) \geq 0$ на $[-2\pi, 2\pi]$, поскольку в силу 1) и 2) имеем $M(2\pi) = M(-2\pi) = m(2\pi) = m(-2\pi) = 0$. Лемма 1 доказана.

Определение. Пусть $M(x)$ и $m(x)$ — T^2 -мажоранта и T^2 -миноранта для $f(x)$. Если $F(x) = \sup_M M(x) = \inf_m m(x)$ на $[0, 2\pi]$, то $F(x)$ называется неопределённым T^2 -интегралом или T^2 -примитивной для f .

Из Леммы 1 следует, что если f T^2 -интегрируема, то f имеет T^2 -примитивную.

Следствие Леммы 1. Если $M(0) = m(0)$ для некоторой T^2 -мажоранты и T^2 -миноранты функции $f(x)$, то $f(x)$ T^2 -интегрируема и

$$(T^2) \int_0^{2\pi} f(x) dx = -\frac{M(0)}{\pi}.$$

Ясно, что T^2 -интеграл является линейным функционалом. Если $f(x)$ T^2 -интегрируема и $g(x) = f(x)$ почти всюду на $[0, 2\pi]$, то $g(x)$ тоже T^2 -интегрируема и их T^2 -интегралы совпадают.

Теорема 1. Если $f(x)$ P -интегрируема на $[0, 2\pi]$ и её коэффициенты Фурье-Перрона стремятся к нулю, то $f(x)$ T^2 -интегрируема и

$$(T^2) \int_0^{2\pi} f(x) dx = (P) \int_0^{2\pi} f(x) dx.$$

Доказательство : Предположим сначала, что $(P) \int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$. Пусть $M(x)$ есть P -мажоранта, $m(x)$ есть P -миноранта для f и пусть $F(x)$ — примитивная Перрона для f . Функции $M(x) - m(x)$, $F(x) - m(x)$, $M(x) - F(x)$ суть возрастающие, а $F(x)$ есть ACG^* -функция. Скляренко [13] доказал, что можно считать, что $m(x)$ и $M(x)$ являются ACG^* -функциями. Так как ACG^* -функции обладают N -свойством Лузина, то в силу теоремы Банаха-Зарецкого, $M(x) - F(x)$ и $F(x) - m(x)$ абсолютно непрерывны и следовательно, коэффициенты Фурье функций $M(x) - F(x) - \frac{M(2\pi)}{2\pi}x$ и $F(x) - m(x) + \frac{m(2\pi)}{2\pi}x$ имеют порядок $o(1/n)$. Пусть

$$M_1(x) = \int_0^x (M(t) - \frac{M(2\pi)}{2\pi}x - \frac{\alpha}{2}) dt,$$

$$m_1(x) = \int_0^x (m(t) - \frac{m(2\pi)}{2\pi}x - \frac{\beta}{2}) dt,$$

где

$$\pi \alpha = \int_0^{2\pi} (M(x) - \frac{M(2\pi)}{2\pi}x) dx, \quad \pi \beta = \int_0^{2\pi} (m(x) - \frac{m(2\pi)}{2\pi}x) dx.$$

Функции $M_1(x)$ и $m_1(x)$ имеют коэффициенты Фурье порядка $o(1/n^2)$. Положим $M_2(x) = M_1(x) + \frac{M(2\pi)}{2\pi} \frac{x^2}{2} - \pi M(2\pi)$ и $m_2(x) = m_1(x) + \frac{m(2\pi)}{2\pi} \frac{x^2}{2} - \pi m(2\pi)$. Тогда $M_2(2\pi) = m_2(2\pi) = 0$, при этом

$$\underline{D}^2 M_2(x) \geq \underline{D} M(x) \geq f(x) \geq \overline{D} m(x) \geq \overline{D}^2 m_2(x).$$

Следовательно, $M_2(x)$ и $m_2(x)$ являются T^2 -мажорантой и T^2 -минорантой для $f(x)$, соответственно. Поскольку $M_2(0) = -\pi M(2\pi)$ и $m_2(0) = -\pi m(2\pi)$, $F(2\pi) = 0$, то функция $f(x)$ T^2 -интегрируема и $(T^2) \int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$. Если $(P) \int_0^{2\pi} f(x) dx = \pi a_0$, то $g(x) = f(x) - a_0/2$ относится к рассмотренному случаю. Следовательно, как T^2 -мажоранту и T^2 -миноранту для $f(x)$ можно взять $M_3(x) = M_2(x) + a_0 x^2/4 - a_0 \pi^2$ и $m_3(x) = m_2(x) + a_0 x^2/4 - a_0 \pi^2$, где $M_2(x)$ и $m_2(x)$ суть T^2 -мажоранта и T^2 -миноранта для $g(x)$. Тогда $(T^2) \int_0^{2\pi} f(x) dx = (P) \int_0^{2\pi} f(x) dx = \pi a_0$. Теорема 1 доказана.

Так как P -интеграл шире, чем интеграл Лебега, то всякая суммируемая на $[0, 2\pi]$ функция T^2 -интегрируема.

Теорема 2. Пусть тригонометрический ряд (1) со сходящимися к нулю коэффициентами суммируется методом Римана к конечной функции $f(x)$ для всех x из $[0, 2\pi]$ за исключением, быть может, множества E , где $E \in F_\sigma^{SU}$. Тогда $f(x)$, $f(x)\cos nx$ и $f(x)\sin nx$ T^2 -интегрируемы на $[0, 2\pi]$ и

$$a_n = \frac{1}{\pi} (T^2) \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx, \quad (6)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} (T^2) \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx. \quad (7)$$

Доказательство : Нетрудно видеть, что функция Римана тригонометрического ряда

$$F(x) = \frac{a_0 x^2}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} - a_0 \pi^2,$$

равная нулю в точке 2π , является T^2 -мажорантой, T^2 -минорантой и T^2 -примитивной для $f(x)$. Следовательно

$$a_0 = \frac{1}{\pi} (T^2) \int_0^{2\pi} f(x) dx.$$

Если наш тригонометрический ряд умножить на $\cos nx$ или на $\sin nx$, то мы получим новый тригонометрический ряд, который суммируется методом Римана

к конечной функции $f(x) \cos nx$ или $f(x) \sin nx$ на $[0, 2\pi) \setminus E$. Следовательно, формулы (6) и (7) выполняются. Теорема доказана.

Если множество E в Теореме 2 счетно, то $f(x)$ P^2 - интегрируема и ее P^2 - интеграл по $(-2\pi, 0, 2\pi)$ равен ее T^2 - интегралу. Следующая теорема является следствием Теоремы 2.

Теорема 3. Пусть тригонометрический ряд (1) сходится к конечной функции $f(x)$ для всех x из $[0, 2\pi]$, за исключением, быть может, множества E , где $E \in F_\sigma^{SU}$. Тогда $f(x)$, $f(x) \cos nx$, $f(x) \sin nx$ T^2 - интегрируемы на $[0, 2\pi]$ и формулы (6), (7) выполняются.

ABSTRACT. The paper suggests a concept of generalized trigonometric integral valid for integration of the sums of trigonometric series that converge everywhere beyond certain special sets.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Сакс, Теория Интеграла, Москва, 1949.
2. И. П. Натансон, Теория Функций Вещественной Переменной, Наука, Москва, 1974.
3. И. А. Виноградова, В. А. Скворцов, "Обобщенные интегралы и ряды", Итоги науки. Матем. анализ, ВИНТИ, Москва, 1970.
4. В. А. Скляренко, "Об интегрируемых по Данжуа суммах всюду сходящихся тригонометрических рядов", ДАН СССР, том 225, стр. 533 — 536, 1973.
5. R. D. James, "A generalized integral II", Canad. J. Math., vol. 76, pp. 297 — 306, 1950.
6. П. Л. Ульянов, "Применение A -интегрирования к одному классу тригонометрических рядов", Матем. сборник, том 35, стр. 469 — 490, 1954.
7. Н. К. Бари, Тригонометрические Ряды, Физматгиз, Москва, 1961.
8. Н. Н. Лузин, Собрание Сочинений, том 1, Издат. АН СССР, Москва, 1953.
9. И. И. Привалов, "Обобщение теоремы Paul du Bois-Reymond'a", Мат. сборник, том 31, стр. 229 — 231, 1923.
10. Н. Н. Холщевникова, "К теореме Валле-Пуссена о единственности представления функции тригонометрическим рядом", Матем. сборник, том 187, стр. 143 — 160, 1996.
11. Д. Е. Меньшов, Избранные Труды (Комментарий Талаляна А.А. и Овсепяна Р.И.), Факториал, Москва, 1997.
12. И. И. Пятецкий-Шапиро, дополнение к работе "К проблеме единственности разложения функции в тригонометрический ряд", Учёные записки МГУ. Математика, том 7, № 165, стр. 79 — 97, 1954.
13. В. А. Скляренко, "Об интегрировании по частям в SCP -интеграле Беркилля", Матем. сборник, том 112, стр. 630 — 646, 1980.

21 марта 2001

Московский государственный
технологический университет "Станкин", Россия
E-mail : kholsh@stanmat.mian.su