О ТЕОРЕМАХ ЛЕВИ И МАРЦИНКЕВИЧА ДЛЯ РЯДОВ ФУРЬЕ-ХААРА

П. Л. Ульянов

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 36, № 4, 2001

Даны модуль непрерывности $\omega(\delta) \not\equiv 0$, $\delta \in [0, \infty)$, $\omega(-\delta) = \omega(\delta)$ и положительная последовательность $\tau = \{\tau(n)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$. Определим класс $A_{\omega,\tau}(T)$ как множество функций $f \in L(0, 2\pi)$ с конечной "нормой" $\|f\|_{\omega,\tau} = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \omega(c_n(f))\,\tau(n)$. В статье доказываются теоремы типа Леви–Марцинкевича для класса $A_{\omega,\tau}(T)$.

Пусть E – линейное множество функций $f(t)$, определённых на отрезке $[0, 2\pi]$ (или на $[0, 1]$). В случае отрезка $[0, 2\pi]$ функции $f(t)$ предполагаются 2π-периодическими. Будем говорить, что множество E является банаховой алгеброй, если E есть банахово пространство и из $f, g \in E$ следует

$$f \cdot g \in E \quad \text{и} \quad \|f \cdot g\|_E \le \|f\|_E \cdot \|g\|_E.$$

Пусть $T = \{e^{int}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ – тригонометрическая система на $[0, 2\pi]$, а $\varphi = \{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормальная система на $[0, 1]$. Пусть $f \in L(0, 2\pi)$, $\alpha \in (0, 2)$ и

$$A_\alpha = A_\alpha(T) = \{f : \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^\alpha < \infty\}, \quad \text{где} \quad c_n = c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt.$$

В 1932 году Винер доказал в связи тауберовыми теоремами, что если $f \in C(0, 2\pi)$ и $f(t) \ne 0$ при всех $t \in [0, 2\pi]$, то из $f \in A_1(T)$ следует $1/f \in A_1(T)$. Винер также доказал, что класс $A_1(T)$ есть банахова алгебра с нормой

$$\|f\| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|.$$

В 1934 году П. Леви (см. [1], стр. 640) доказал, что если $f \in A_1(T)$, а F аналитична на множестве $f([0, 2\pi])$, то $F(f) \in A_1(T)$. Здесь считаем, что

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 99-01-00062) и научной школы (проект 00-15-96143).

функция f непрерывна на $[0, 2\pi]$, а $f([0, 2\pi])$ обозначает множество всех значений функции $f(t)$, когда t пробегает отрезок $[0, 2\pi]$.

В связи с этим, Леви поставил задачу : какие функции F действуют внутри класса $A_1(T)$.

Нам понадобится определение.

Для заданного число $\beta > 0$ и интервала $I = (a, b)$, будем говорить, что функция F принадлежит классу Жеврея $J_\beta(I)$, если на любом компакте $K \subset (a, b)$

$$|F^{(n)}(t)| \leq B^n\ n^{n\,\beta} \quad \text{при всех} \quad t \in K, \quad n = 1, 2, ..,$$

где $B = B(F, K)$.

Согласно теореме Принсгейма, при $\beta = 1$ класс Жеврея $J_1(I)$ совпадает с классом аналитических функций на $I = (a, b)$. Кроме того, классы $J_\beta(I)$ увеличиваются при возрастании β.

В 1958 году Кацнельсон (см. [2], стр. 92) доказал обратное утверждение к теореме Леви : если F определена на отрезке $[A, B]$ и для всякой функции $f \in A_1(T)$ такой, что $f([0, 2\pi]) \subset [A, B]$, функция $F(f)$ принадлежит $A_1(T)$, то F аналитична на $[A, B]$. Соединение теорем Леви и Кацнельсона влечёт

Теорема A (Леви, Кацнельсон). Лишь аналитические функции F действуют из класса $A_1(T)$ в класс $A_1(T)$, т.е. $F(f) \in A_1(T)$, если $f \in A_1(T)$.

В 1940 году Марцинкевичем [3] было доказано, что если $f \in A_\alpha(T)$ при некотором $\alpha \in (0, 1)$ и $F \in J_{1/\alpha}(a, b)$ на интервале $(a, b) \supset f([0, 2\pi])$, то $F(f) \in A_1(T)$.

Позднее было замечено, что в теореме Марцинкевича функция $F(f)$ принадлежит классу $A_\alpha(T)$.

В 1966 году Ривьер и Сагер [4] установили следующий результат : если функция F определена на интервале $I = (a, b)$ и для любой функции $f \in A_s(T)$, $s \in (0, 1]$ такой, что $f([0, 2\pi]) \subset (a, b)$, функция $F(f)$ принадлежит $A_p(T)$ с $p < 2$ (p зависит от f), то $F \in J_{1/s}(I)$.

Для случая $s = 1$ этот результат был рассмотрен Хелсоном, Каханом, Кацнельсоном и Рудиным (см. [2]). Таким образом, из результатов Марцинкевича, Ривьера и Сагера получаем следующую теорему.

Теорема B. Если $\alpha \in (0, 1)$, то лишь функции F из класса Жеврея $J_{1/\alpha}$ действуют из класса $A_\alpha(T)$ в класс $A_\alpha(T)$.

Для заданного модуля непрерывности $\omega(\delta) \not\equiv 0$, $\delta \in [0, \infty)$, $\omega(-\delta) = \omega(\delta)$ и положительной последовательности $\tau = \{\tau(n)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, определим класс $A_{\omega,\tau}(T)$

как множество функций $f \in L(0, 2\pi)$ с конечной "нормой"

$$\|f\|_{\omega,\tau} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \omega(c_n(f))\,\tau(n).$$

Попытаемся установить теоремы типа Леви–Марцинкевича для класса $A_{\omega,\tau}(T)$. Мы не знаем окончательных результатов даже для случая $\tau(n) = 1$ (некоторые сведения можно найти в [2] и [7]).

Рассмотрим теперь ряды по системе Хаара $\chi = \{\chi_m\}_{m=1}^{+\infty}$, где указанные выше вопросы разработаны нами более обстоятельно (см. [5], [6], [8–10]). Для формулировки окончательного результата для системы Хаара нам понадобятся некоторые определения.

Для нетривиального модуля непрерывности $\omega(\delta)$, $\delta \in [0, \infty)$ с условием $\omega(-\delta) = \omega(\delta)$ и положительной последовательности $\tau = \{\tau(m)\}_{m=1}^{\infty}$ определим классы функций

$$A_{\omega,\tau} = A_{\omega,\tau}(\chi) = \{f : f \in L(0,1), A_{\omega,\tau}(f) < \infty\},$$

где

$$A_{\omega,\tau}(f) = \sum_{m=2}^{\infty} \omega(a_m(f))\,\tau(m) \quad \text{и} \quad a_m(f) = \int_0^1 f(t)\,\chi_m(t)\,dt.$$

При $\tau(m) \equiv 1$ положим $A_\omega = A_{\omega,\tau}$ и $A_\alpha = A_{\delta^\alpha}$ с $0 < \alpha \leq 1$, т.е. для случая $\omega(\delta) = \delta^\alpha$, $0 \leq \delta < \infty$ (здесь мы имеем $\sum_{m=2}^{\infty} |a_m(f)|^\alpha < \infty$).

Обычно последовательность $\{\tau(m)\}_{m=1}^{\infty}$ задаётся через функцию $\tau(t)$, определённую на $[1, \infty)$. В дальнейшем нам понадобится функция $F(t)$, заданная на прямой $(-\infty, \infty)$ и принадлежащая классу $\mathrm{Lip}_M 1$, т.е.

$$|F(t_1) - F(t_2)| \leq M|t_1 - t_2| \quad \text{при всех } t_1 \text{ и } t_2 \text{ из } (-\infty, \infty).$$

Для системы Хаара нами была доказана следуюшая теорема (см. [5] и [6]).

Теорема C. Пусть даны число $\alpha \in (0, 1]$ и конечная функция $F(t)$, определённая на $(-\infty, +\infty)$. Тогда необходимым и достаточным условием для $F(f) \in A_\alpha$ при всех $f \in A_\alpha$ является существование числа M, для которого $F \in \mathrm{Lip}_M 1$. Более того, справедлива оценка

$$\sum_{m=2}^{\infty} |a_m(F(f))|^\alpha \leq \gamma_\alpha M^\alpha \sum_{m=2}^{\infty} |a_m(f)|^\alpha \quad \text{при всех} \quad f \in A_\alpha,$$

где

$$\gamma_\alpha = \frac{2^{\alpha/2} + 2^\alpha}{2^\alpha - 1}.$$

Ясно, что условия налагаемые на функцию F не зависят от величины α и, они более общи, чем для тригонометрической системы, где предполагалось, что F или аналитична ($\alpha = 1$), или принадлежит классу Жеврея ($0 < \alpha < 1$).

Для дальнейшего нам понадобятся некоторые определения.

Конечная положительная функция $\varphi(t)$, определённая на интервале (a, b), называется почти возрастающей с постоянной $C_1 > 0$, если $\varphi(t_1) \leq C_1 \varphi(t_2)$ при любых t_1 и t_2, удовлетворяющих условию $a < t_1 < t_2 < b$. Аналогично, $\varphi(t)$ называется почти убывающей, если существует постоянная $C_2 > 0$ такая, что $\varphi(t_1) \geq C_2 \varphi(t_2)$ при любых t_1 и t_2, удовлетворяющих условию $a < t_1 < t_2 < b$. Аналогичные определения вводятся для отрезков, для прямой и полупрямой.

Будем говорить, что почти возрастающая функция $\varphi(t)$ удовлетворяет Δ_2-условию на $[1, \infty)$, если существует положительная постоянная C_3 такая, что $\varphi(2t) \leq C_3 \varphi(t)$ при всех $t \in [1, \infty)$. Аналогично, будем говорить, что почти убывающая функция $\varphi(t)$ удовлетворяет Δ_2-условию на $[1, \infty)$, если существует положительная постоянная C_4 такая, что $\varphi(t) \leq C_4 \varphi(2t)$ при всех $t \in [1, \infty)$. Ниже всегда C_i ($i = 1, 2, ...$) обозначают положительные постоянные. Если проанализировать наши рассуждения в статьях [8–10], то убедимся, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\omega(\delta)$ – модуль непрерывности, а $\tau(t)$ – почти возрастающая (или почти убывающая) функция, удовлетворяющая Δ_2-условию. Тогда неравенство

$$A_{\omega,\tau}(F(f)) \leq C_{\omega,\tau,F}\, A_{\omega,\tau}(f), \tag{1}$$

выполнено при всех $f \in L(0,1)$ и всех $F \in \mathrm{Lip}_M 1$ для некоторой постоянной $C_{\omega,\tau,F}$, тогда и только тогда, когда неравенство

$$\int_{\alpha_n}^{1} \frac{\omega(\delta\, t)}{t}\, \tau(2^n\, t^2)\, dt \leq C_5\, \tau(2^n)\, \omega(\delta) \tag{2}$$

выполняется для всех $\delta > 0$, $\alpha_n = 2^{-n/2}$ и $n = 1, 2, ...$

С помощью простых рассуждений из неравенства (2) выводится ряд интересных следствий.

Предложение 1. Пусть $\omega(\delta)$ – модуль непрерывности. Необходимым и достаточным условием для выполнения неравенства

$$A_{\omega}(F(f)) \leq C_{\omega,F}\, A_{\omega}(f) \tag{3}$$

при всех $f \in L(0,1)$ и всех $F \in \mathrm{Lip}_M 1$ является следующее условие :

$$\int_0^\delta \frac{\omega(t)}{t}\,dt \le C_6\,\omega(\delta) \quad \text{при всех} \quad 0<\delta<\infty. \tag{4}$$

Доказательство : Положим в Теореме 1 функцию $\tau(t)=1$ при всех $t\ge 1$. Тогда из (1) и (2) получаем, что неравенство (3) выполняется при всех $f\in L(0,1)$ и всех $F\in \mathrm{Lip}_M 1$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{\alpha_n}^1 \frac{\omega(\delta\,t)}{t}\,dt \le C_5\,\omega(\delta) \quad \text{при } \delta>0 \text{ и } n=1,2,... \tag{5}$$

Так как (5) выполнено при всех $n=1,2,...$, то оно эквивалентно (переходя к пределу при $n\to\infty$) следующему неравенству :

$$\int_0^1 \frac{\omega(\delta\,t)}{t}\,dt \le C_5\,\omega(\delta) \quad \text{для всех} \quad \delta>0. \tag{6}$$

Делая замену переменной $\delta\,t=u$, получаем

$$\int_0^\delta \frac{\omega(u)}{u}\,du \le C_5\,\omega(\delta) \quad \text{для всех} \quad \delta>0.$$

Из вышесказанного следует, что неравенство (3) эквивалентно условию (4). Предложение 1 доказано.

Отметим, что условие вида (4) было у Н. К. Бари в 1955 г., для случая $\delta\in(0,\pi]$, а ещё ранее в 1953 г. в наших работах (см. об этом [11] и [12]), но в другой форме.

Предложение 2. Пусть $\tau_\alpha=\tau_\alpha(t)=t^\alpha$, $\alpha>0$. Для любого модуля непрерывности $\omega(\delta)$ неравенство

$$A_{\omega,\tau_\alpha}(F(f)) \le C_{\omega,\tau_\alpha,F}\,A_{\omega,\tau_\alpha}(f) \tag{7}$$

выполняется при всех $f\in L(0,1)$ и $F\in \mathrm{Lip}_M 1$.

Доказательство : В силу Теоремы 1 для выполнения неравенства (7) необходимо и достаточно, чтобы (см. (2))

$$\int_{\alpha_n}^1 \frac{\omega(\delta\,t)}{t}t^{2\alpha}\,dt \le C_5\,\omega(\delta) \quad \text{при всех } \delta>0 \text{ и } n=1,2,.... \tag{8}$$

Переходя к пределу в (8) при $n\to\infty$, получаем

$$\int_0^1 \frac{\omega(\delta\,t)}{t^{1-2\alpha}}\,dt \le C_5\,\omega(\delta) \quad \text{при всех} \quad \delta>0. \tag{9}$$

Так как всякий модуль непрерывности удовлетворяет неравенству $\omega(\delta\,t)\le\omega(\delta)$ при $0\le t\le 1$, то для $\alpha>0$ имеем

$$\int_0^1 \frac{\omega(\delta\,t)}{t^{1-2\alpha}}\,dt \le \omega(\delta)\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-2\alpha}} = \frac{\omega(\delta)}{2\alpha},$$

т.е. неравенство (9) выполнено для любых модулей непрерывности. Предложение 2 доказано.

Предложение 3. Пусть $\omega(\delta)$ – модуль непрерывности и $\tau_\beta = \tau_\beta(t) = (\log 2t)^\beta$, $\beta > 0$. Тогда неравенство

$$A_{\omega,\tau_\beta}(F(f)) \le C_{\omega,\tau_\beta,F}\, A_{\omega,\tau_\beta}(f) \tag{10}$$

выполнено при всех $f \in L(0,1)$ и $F \in \mathrm{Lip}_M 1$ тогда и только тогда, когда справедливо (4). (Здесь и ниже логарифмы берутся по основанию 2).

Доказательство : Необходимость условия (4). В силу Теоремы 1 для выполнения (10) необходимо, чтобы

$$\int_{\alpha_n}^1 \frac{\omega(\delta t)}{t} \log^\beta(2^{n+1}t^2)\, dt \le C_5 \log(2^{n+1})^\beta\, \omega(\delta) \tag{11}$$

при всех $\delta > 0$ и $\alpha_n = 2^{-n/2}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Для произвольного натурального n_0 из (11) имеем

$$\int_{\alpha_{n_0}}^1 \frac{\omega(\delta t)}{t} \left(\frac{\log(2^{n+1}t^2)}{\log 2^{n+1}}\right)^\beta dt \le C_5\, \omega(\delta) \quad \text{при всех } \delta > 0 \text{ и } n \ge n_0. \tag{12}$$

Но на отрезке $[\alpha_{n_0}, 1]$ имеют место оценки

$$1 \ge \left(\frac{\log(2^{n+1}t^2)}{\log 2^{n+1}}\right)^\beta \ge \left(\frac{n+1-n_0}{n+1}\right)^\beta = \left(1 - \frac{n_0}{n+1}\right)^\beta \quad \text{при} \quad n \ge n_0.$$

Следовательно, функции

$$\left(\frac{\log(2^{n+1}t^2)}{\log 2^{n+1}}\right)^\beta$$

сходятся равномерно к 1 на отрезке $[\alpha_{n_0}, 1]$ при $n \to \infty$. Поэтому из (12) следует (при $n \to \infty$)

$$\int_{\alpha_{n_0}}^1 \frac{\omega(\delta t)}{t}\, dt \le C_5\, \omega(\delta) \quad \text{при всех} \quad \delta > 0.$$

Так как n_0 произвольно, то из этого неравенства получаем (6), что влечёт (4).

Достаточность условия (4). Если выполнено (4), то выполнено и неравенство (11), так как

$$\left(\frac{\log(2^{n+1}t^2)}{\log 2^{n+1}}\right)^\beta \le 1 \quad \text{при } \beta > 0 \text{ и } \alpha_n \le t \le 1\ ),$$

т.е. $2 \le 2^{n+1t^2} \le 2^{n+1}$. Но в силу Теоремы 1 условие (11) достаточно для (10), что и требовалось доказать.

Предложение 4. Пусть $\omega(\delta)$ – модуль непрерывности, а $\tau_\gamma = \tau_\gamma(t) = t^{-\gamma}$, $\gamma > 0$. Тогда неравенство

$$A_{\omega,\tau_\gamma}(F(f)) \le C_{\omega,\tau_\gamma,F}\, A_{\omega,\tau_\gamma}(f) \tag{13}$$

выполняется при всех $f \in L(0,1)$ и $F \in \mathrm{Lip}_M 1$ тогда и только тогда, когда

$$\int_0^\delta \frac{\omega(t)}{t^{1+2\gamma}}\, dt \le C_6\, \delta^{-2\gamma}\, \omega(\delta) \quad \text{при всех} \quad \delta > 0. \tag{14}$$

Доказательство : По Теореме 1 для выполнения неравенства (13) необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{\alpha_n}^\delta \frac{\omega(\delta\, t)}{t}\, \frac{1}{2^n\, t^{2\gamma}}\, dt \le C_5\, \frac{1}{2^{n\gamma}}\, \omega(\delta) \quad \text{при всех } \delta > 0 \text{ и } n = 1, 2, \ldots.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\int_0^1 \frac{\omega(\delta\, t)}{t^{1+2\gamma}}\, dt \le C_5\, \omega(\delta) \quad \text{при всех} \quad \delta > 0.$$

Делая в интеграле подстановку $\delta\, t = u$, получаем

$$\int_0^\delta \frac{\omega(u)}{u^{1+2\gamma}}\, du \le C_5\, \delta^{-2\gamma}\, \omega(\delta) \quad \text{при всех} \quad \delta > 0,$$

т.е. (14). Предложение 4 доказано.

Замечание 1. Для $\gamma \ge 1/2$ условие (14) выполняется лишь при $\omega(\delta) \equiv 0$, так как в противном случае всегда $\omega(\delta) \ge C_7\, \delta$ при $0 < \delta \le 1$ $(C_7 > 0)$. Следовательно, в этом случае интеграл в (14) расходится и (14) не выполняется. Поэтому условие (14) имеет содержательный смысл при $0 < \gamma < 1/2$.

Замечание 2. Условие (2) в некоторых случаях можно преобразовать. Например, пусть $\tau(t)$ почти возрастает и удовлетворяет Δ_2-условию. Тогда

$$\tau(2^n\, t^2) \le C_1\, \tau(2^n) \quad \text{при} \quad \alpha_n \le t \le 1, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{15}$$

Если выполнено условие (4), то имеем

$$\int_0^1 \frac{\omega(\delta\, u)}{u}\, du \le C_6\, \omega(\delta) \quad \text{для всех} \quad \delta > 0.$$

Следовательно (см. (15)), получаем

$$\int_{\alpha_n}^1 \frac{\omega(\delta\, u)}{u}\, \tau(2^n\, u^2)\, du \le C_1\, C_6\, \tau(2^n)\, \omega(\delta) \quad \text{при всех } \delta > 0,\ n = 1, 2, \ldots.$$

Поэтому из Теоремы 1 вытекает, что условие

$$\int_{\alpha_n}^1 \frac{\omega(\delta\, u)}{u}\, \tau(2^n\, u^2)\, du \le C_8\, \tau(2^n)\, \omega(\delta) \quad \text{при всех } \delta > 0,\ n = 1, 2, \ldots$$

достаточно для (1). Поэтому, из условия (4) всегда вытекает (1).

Замечание 3. Если функция $\tau(t)$ почти возрастающая и удовлетворяет Δ_2-условию, то её рост не быстрее, чем At^σ для некоторых положительных чисел A и σ, т.е. $\tau(t)$ возрастает не быстрее чем степенная функция. Кроме того, для целых $p \in [1, 2^n]$ и $n \in N$ имеем

$$\frac{1}{C_1 C_3} \le \frac{\tau(2^n + p)}{\tau(2^{n+1})} \le C_1,$$

т.е. в пачке $[2^n + 1, 2^n + 2, ..., 2^{n+1}]$ функция $\tau(m)$ растёт в ограниченных пределах, не зависящих от n.

Тем не менее справедлива следующая теорема (см. [8, [9]).

Теорема 2. Пусть $\omega(\delta)$ – модуль непрерывности, а $\tau(t)$ – почти возрастающая функция на $[0, \infty)$ и

$$\tau(2^{n+1}) \le C_9\, \tau(2^n) \quad \text{при} \quad n = 0, 1, ... \tag{16}$$

Тогда, чтобы выполнялось (1) при всех $f \in L(0, 1)$ и $F \in \mathrm{Lip}_M 1$ необходимо и достаточно выполнение условия (2).

Здесь Δ_2-условие заменено на (16). Отметим, что условие (16) ограничивает изменение $\tau(m)$ только в n-ой пачке $[2^n + 1, 2^n + 2, ..., 2^{n+1}]$, но не ограничивает их рост по разным пачкам.

Заметим, что по системе Хаара даже множество A_1 не является алгеброй, так как существует $f \in A_1$, для которого $f^2 \notin A_1$. В связи с этим, нужны какие-то ограничения. Положим $A_\omega^{(\infty)} = A_\omega \cap L^\infty$. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 3. Пусть $\omega(\delta)$ – модуль непрерывности. Для того, чтобы $A_\omega^{(\infty)}$ была алгеброй и имело место неравенство $A_\omega(f^2) \le C_\omega\, A_\omega(f)$ для $f \in A_\omega^{(\infty)}$, с $\|f\|_\infty = 1$, необходимо и достаточно выполнения условия (4) при $\delta \in (0, 1]$.

Теорема 4. Пусть $\omega(\delta)$ – модуль непрерывности. Тогда, чтобы $A_\omega^{(\infty)}$ была алгеброй и имело место неравенство $A_\omega(f^2) \le C_\omega\, A_\omega(\|f\|_\infty \cdot f)$ для всех $f \in A_\omega^{(\infty)}$ необходимо и достаточно выполнения условия (4) при $0 < \delta < \infty$.

Замечание 4. Автору не известны по рассматриваемой тематике окончательные результаты для различных одномерных или кратных ортогональных систем (тригонометрическая, Уолша, Франклина, Чисельского, всплески и др.).

ABSTRACT. Given a modulus of continuity $\omega(\delta) \not\equiv 0$, $\delta \in [0, \infty)$, $\omega(-\delta) = \omega(\delta)$ and a positive sequence $\tau = \{\tau(n)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, define the class $A_{\omega,\tau}(T)$ as the set of functions $f \in L(0, 2\pi)$ with finite "norm" $\|f\|_{\omega,\tau} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \omega(c_n(f))\,\tau(n)$. The paper attempts to prove Levy–Marcinkiewicz type theorems for the class $A_{\omega,\tau}(T)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. К. Бари, Тригонометрические Ряды, Физматгиз, Москва, 1961.
2. Ж.- П. Кахан, Абсолютно Сходящиеся Ряды Фурье, Мир, Москва, 1976.
3. J. Marcinkiewicz, "Sur la convergence absolue des series de Fourier", Mathematica, Cluj, vol. 16, pp. 66 — 73, 1940.
4. N. M. Riviere, Y. Sagher, "The converse of Wiener-Levy-Marcinkiewicz theorem", Studia Math., vol. 28, pp. 133 — 138, 1966.
5. П. Л. Ульянов, "Абсолютная сходимость рядов Фурье-Хаара от суперпозиций функций", Analysis Math., том 4, № 3, стр. 225 — 236, 1978.
6. П. Л. Ульянов, "Некоторые результаты о рядах по системе Хаара", ДАН СССР, том 262, № 3, стр. 542 — 545, 1982.
7. П. Л. Ульянов, "Об абсолютной сходимости тригонометрических рядов Фурье", Докл. РАН, том 322, № 2, стр. 253 — 258, 1992.
8. П. Л. Ульянов, "О рядах Фурье от суперпозиций функций", Докл. РАН, том 350, № 1, стр. 25 — 28, 1996.
9. П. Л. Ульянов, "О модулях непрерывности и рядах Фурье-Хаара", Докл. РАН, том 355, № 5, стр. 612 — 615, 1997.
10. П. Л. Ульянов, "О свойствах рядов по системе Хаара", Докл. РАН. том 361, № 1, стр. 31 — 34, 1998.
11. Н. К. Бари, С. Б. Стечкин, "Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряжённых функций", Труды Моск. Мат. об-ва, том 5, стр. 483 — 522, 1956.
12. П. Л. Ульянов, "О модулях непрерывности и коэффициентах Фурье", Вестник МГУ, Мат-ка и Механика, № 1, стр. 37 — 52, 1995.

22 марта 2001

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова