ПОДСИСТЕМЫ СИСТЕМЫ ХААРА КАК КВАЗИБАЗИСЫ В ВЕСОВЫХ L^p–ПРОСТРАНСТВАХ

К. С. Казарян, А. Торчинский

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 36, № 4, 2001

В статье доказано, что если подсистема $\{h_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ системы Хаара полна в линейном пространстве S_G всех измеримых, почти всюду конечных функций, заданных на измеримом множестве G, где $|G| > 0$, то существует ограниченная функция m такая, что $\{mh_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ является квазибазисом в каждом из пространств L_G^p, $1 \leq p < \infty$ с одной и той же допустимой системой. Та же проблема для системы $\chi = \{x^{\lambda_i}\}_{i=1}^{\infty}$, $0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots$ дает совершенно другую картину. В статье рассматривается тот же вопрос для системы Уолша–Пэли.

§1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [9] описаны те подмножества отрезка $[0, 1]$, на которых подсистемы системы Хаара полны. Обозначая через S_D линейное пространство всех измеримых, п. в. конечных функций на измеримом множестве D, приведём этот результат.

Теорема, [9]. Пусть $\Phi = \{\phi_n : n = 1, 2, \ldots\}$ – подсистема системы Хаара, и пусть E_n обозначает носитель функции ϕ_n, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда Φ полна в S_D, $|D| > 0$, $D \subset [0, 1]$ тогда и только тогда, когда

$$|D \setminus E| = 0, \quad E = \limsup_n E_n.$$

Те же авторы в [10] доказали, что если система $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ полна в S_D и $|D| > 0$, то существует ограниченная измеримая функция m такая, что система $\{mf_n\}_{n=1}^{\infty}$ полна в L_D^2. Аналогичные доводы используются в [8] для доказательства полноты $\{f_n\}$ в пространстве L_D^p с некоторым весом.

В §3 мы доказываем более сильную версию Теоремы :

Исследование первого автора поддержано DGICYT грантом № PB97-0030.

Основная Теорема. Пусть $\Phi = \{\phi_n : n = 1, 2, \ldots\}$ — подсистема системы Хаара, а E_n – носитель функции ϕ_n. Если

$$E = \limsup\nolimits_n E_n \quad \text{и} \quad |E| > 0, \tag{1}$$

то существует ограниченная измеримая функция M, $0 \le M \le 1$ такая, что система $\{M\phi_n : n = 1, 2, \ldots\}$ является квазибазисом в пространстве L^p_E для любого $1 \le p < \infty$.

Общая схема доказательства этой теоремы следует из [8] и основывается на конкретных свойствах системы Хаара. Для других классических систем иллюстрация аналогичных свойств зависит от наличия критериев полноты для подсистем в смысле сходимости по мере.

Интересно сравнить выше сформулированный результат с тем, что мы имеем для системы $\chi = \{x^{\lambda_i}\}_{i=1}^{\infty}$, $0 \le \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots$, при предположении

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = +\infty. \tag{2}$$

Согласно классической теоремы Мюнца, χ полна в $L^p_{[0,1]}$ для любого p, $1 \le p < \infty$. Следуя общей схеме доказательства Теоремы 2 из [8], мы докажем следующую теорему.

Теорема 1. Пусть $\chi = \{x^{\lambda_i}\}_{i=1}^{\infty}$, $0 \le \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots$ и выполняется (2). Тогда существует возрастающая подпоследовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что система χ является квазибазисом суммирования по подпоследовательностям $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ во всех пространствах $L^p_{[0,1]}$, $1 \le p < \infty$.

Как показано ниже, этот результат не может быть усилен :

Теорема 2. Пусть $\chi = \{x^{\lambda_i}\}_{i=1}^{\infty}$, $0 \le \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots$, и пусть выполнено условие (2). Тогда для любого p, $1 \le p < \infty$, измеримого множества $G \subset [0,1]$, $|G| > 0$, и любой функции $M \in L^p_G$, система $\{M(x)x^{\lambda_i}\}_{i=1}^{\infty}$ не является квазибазисом в L^p_G.

Из результатов работ [3], [4] следует, что данная система $\chi = \{x^{\lambda_i}\}_{i=1}^{\infty}$, $0 \le \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots$ полна в S_G, $G \subset [0,1]$, $|G| > 0$ тогда и только тогда, когда выполняется условие (2).

Задача описания подсистем тригонометрической системы и системы Уолша, которые полны в S_T, где T – тор в первом случае и интервал $[0,1]$ во-втором, остаётся открытой. Тем не менее существуют достаточные условия полноты для подсистем Уолша и тригонометрической системы, которые позволяют доказать аналоги основной Теоремы в этих двух случаях.

Будем говорить, что подсистема $W_\Omega = \{w_k, \ \ k \in \Omega\}$ системы Уолша–Пэли удовлетворяет условию (P), если

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{l : n_i \le l \le m_i\} \quad \text{и} \quad \overline{\lim_{i\to\infty}} (m_i - n_i) = +\infty. \tag{P}$$

В [11] доказано, что из условия (P) следует полнота подсистемы $\tilde{W}_\Omega$ в пространстве $S_{[0,1]}$. Из условия (P) следует аналогичный результат для любой подсистемы $T_\Omega = \{\cos nx, \sin nx\}_{n\in\Omega}$ тригонометрической системы. Полное доказательство последнего утверждения будет приведено в другой публикации. В работе [8] можно найти некоторые другие результаты, см. также [2], [6].

Теорема 3. Пусть $W_\Omega = \{w_k, \ k \in \Omega\}$ – подсистема системы Уолша–Пэли, сохраняющая порядок между элементами, причём Ω удовлетворяет условию (P). Тогда существует ограниченная измеримая функция M, $0 \le M \le 1$ такая, что $\{Mw_k : k \in \Omega\}$ является квазибазисом в пространстве $L^p_{[0,1]}$ при $1 \le p < \infty$.

§2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Функции Хаара можно определить следующим образом : пусть для любого $t \in [0,1]$, $h_1(t) = 1$, а для $k = 0, 1, 2, \dots ; j = 1, 2, \dots, 2^k$

$$h_k^{(j)}(t) = \begin{cases} 2^{k/2}, & \text{если} \quad \frac{2j-2}{2^{k+1}} < t < \frac{2j-1}{2^{k+1}}, \\ -2^{k/2}, & \text{если} \quad \frac{2j-1}{2^{k+1}} < t < \frac{2j}{2^{k+1}}, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

и пусть $h_n = h_k^{(j)}$ для $n = 2^k + j$. Носителем функции Хаара является множество, где она отлична от нуля. Простая функция g называется **d-простой**, если она является линейной комбинацией характеристических функций двоичных интервалов.

Система Уолша–Пэли $\{w_n(t)\}$ определяется с помощью функций Радемахера :

$$r_k(t) = \operatorname{sgn} \sin 2^k \pi t, \quad t \in [0,1], \quad k \in \mathcal{N},$$

где $\mathcal{N}$ – множество натуральных чисел. Любое $n \in \mathcal{N}$ представляется в виде

$$n = \sum_{k=1}^{m+1} \delta_k \cdot 2^{k-1}, \quad \delta_k = 0 \text{ или } 1, \quad \delta_{m+1} = 1,$$

где m – наибольшее неотрицательное целое, для которого $2^m \leq n$. Положим

$$w_n(t) = \prod_{k=1}^{m+1} [r_k(t)]^{\delta_k}, \quad w_0(t) \equiv 1.$$

Для заданного банахова пространства B через B^* будем обозначать его сопряжённое пространство. Система $X = \{x_n : n = 1, 2, \ldots\}$ элементов пространства B **полна в** B, если замыкание множества всех конечных линейных комбинаций элементов из X совпадает с B. Система $X = \{x_n : n = 1, 2, \ldots\}$ является **базисом Шаудера** для B, если для любого $x \in B$ существует единственный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)x_n$, сходящийся к x по норме пространства B. Существование базиса Шаудера эквивалентно следующему условию [1] : X полна в B, существует **сопряженная система**

$$X^* = \{x_n^* : n = 1, 2, \ldots\} \subset B^*$$

такая, что

$$x_i^*(x_j) = \delta_{ij}, \quad i \in \mathcal{N}, \quad j \in \mathcal{N},$$

и для всех $x \in B$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n^*(x)x_n$ сходится к x по норме пространства B. Опуская условие единственности коэффициентов, приходим к определению квазибазиса. Точнее, система $X = \{x_n : n = 1, 2, \ldots\}$ является **квазибазисом** для B тогда и только когда, когда существует система $\{y_n^* : n = 1, 2, \ldots\} \subset B^*$ такая, что для всех $x \in B$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n^*(x)x_n$ сходится к x по норме пространства B. Такое обобщение базиса Шаудера было дано в [5], см. также [12], стр. 278, 766. Будем говорить, что система $X = \{x_n : n = 1, 2, \ldots\}$ является **квазибазисом суммирования по последовательностям** для B, если существует подпоследовательность натуральных чисел $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ и система $\{y_n^* : n = 1, 2, \ldots\} \subset B^*$ такие, что для всех $x \in B$ последовательность $\sum\limits_{n=1}^{m_k} y_n^*(x)x_n$ сходится к x по норме пространства B при $k \to \infty$. Система $\{y_n^* : n = 1, 2, \ldots\} \subset B^*$ называется допустимой системой.

Пространство S_E всех измеримых, п. в. конечных функций, определённых на измеримом множестве E, $|E| > 0$, будет линейным метрическим пространством, если определить расстояние $\rho(f, g)$ между двумя элементами $f, g \in S_E$ по формуле

$$\rho(f, g) = \int_E \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|}\, dx.$$

Как и в случае банахова пространства, можно определить понятие полноты системы в S_E (см. [7] для результатов, касающихся полноты ортогональных систем).

Наконец, через χ_G обозначим характеристическую функцию измеримого множества G :

$$\chi_G(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in G, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

В нижеследующих леммах $\Phi = \{\phi_n : n = 1, 2, \ldots\}$ есть подсистема системы Хаара, удовлетворяющая условию (1), $1 < p < \infty$ и

$$g = \sum_{i=1}^{2^n} \gamma_i \chi_{\Delta_n^i}, \quad \Delta_n^i = \left(\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right), \quad i = 1, \ldots, 2^n.$$

Лемма 1. Для произвольных $\varepsilon > 0$ и натурального числа m, существуют конечная сумма G двоичных интервалов и Φ–многочлен $P = \sum_{k=m}^{l} b_k \phi_k$ такие, что

$$|G| < \varepsilon; \quad \{x : P(x) \neq 0\} \subset \{x : g(x) \neq 0\},$$

$$g(x) = P(x) \quad \text{для} \quad x \in D \cap E, \quad \text{где} \quad D = [0, 1] \setminus G,$$

и для всех $1 \leq r \leq p$

$$\sup \left\{ \left\| \sum_{k=m}^{s} b_k \phi_k \right\|_{L^r_{D \cap E}} : m \leq s \leq l \right\} < \varepsilon + \|g\|_{L^r_{D \cap E}}. \tag{3}$$

Доказательство : Пусть $\{\nu_n\}$ – убывающая последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu_n < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} 2^{np} \nu_n\right)^{1/p} \|g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Построим P как конечную сумму Φ-многочленов f_j с непересекающимися носителями, и начнём с f_1. Пусть $N \in \mathcal{N}$ – такое, что $2^{-N} < \varepsilon/2$, и пусть $\nu \in \mathcal{N}$ удовлетворяет условию

$$2^N \cdot \|g\|_{L^p_{\Delta_\nu^i}} < \varepsilon \quad \text{и} \quad \nu > \max(n, N) \quad \text{для каждого } i \ (1 \leq i \leq 2^\nu). \tag{5}$$

Разобьём отрезок $[0, 1]$ на 2^ν двоичных интервалов длины $2^{-\nu}$. Из условия (5) получаем, что каждое Δ_n^i $(1 \leq i \leq 2^n)$ будет разбито на $2^{\nu-n}$ интервалов. Положим

$$g(x) = \sum_{i=1}^{2^\nu} g_i(x), \quad g_i(x) = \chi_{\Delta_\nu^i}(x) \cdot g(x). \tag{6}$$

Построим Ф-многочлен f_1^1 как первое приближение к g_1 на множестве $E \cap \Delta_\nu^1$. Можно предположить, что $|E \cap \Delta_\nu^1| > 0$, в противном случае переходим к построению приближения для g_2. Пусть ϕ_{m_i} $(m_i \geq m,\ 1 \leq i \leq k_0)$ – некоторые функции из подсистемы Ф с непересекающимися носителями $\Delta_{m_1}, \ldots, \Delta_{m_{k_0}}$, $\Delta_{m_i} \subset \Delta_\nu^1$ $(1 \leq i \leq k_0)$ такими, что

$$|B_0| \equiv \left| E \cap \Delta_\nu^1 - \bigcup_{i=1}^{k_0} \Delta_{m_i} \right| < \nu_1 |E \cap \Delta_\nu^1|.$$

Положим

$$f_1^1(x) = \gamma_1 \sum_{i=1}^{k_0} a_i \phi_{m_i}, \quad a_i = \|\phi_{m_i}\|_\infty^{-1}.$$

Таким образом, f_1^1 является ступенчатой функцией, принимающей значения γ_1 и $-\gamma_1$ на множествах B_{11} и B_{12}, соответственно, и по крайней мере для одного $s = 1, 2$ имеем

$$\left| E \cap B_{1s} \cap \bigcup_{i=1}^{k_0} \Delta_{m_i} \right| > \frac{1}{2}(1 - \nu_1)|E \cap \Delta_\nu^1|. \tag{7}$$

Мы можем предположить, что (7) выполняется для $s = 1$, в противном случае мы можем изменить знаки коэффициентов a_i $(1 \leq i \leq k_0)$. Отметим, что B_{11} и B_{12} суть суммы некоторых двоичных интервалов.

Теперь построим функцию f_2^1, которая равна нулю на B_{11} и такая, что $f_1^1 + f_2^1$ принимает значение γ_1 на множестве, пересечение которого с $E \cap \Delta_\nu^1$ имеет меру, приблизительно равную $\frac{3}{4}|E \cap \Delta_\nu^1|$. Возьмём функции ϕ_{m_l} $(k_0 + 1 \leq l \leq k_1)$ из подсистемы Ф системы Хаара с непересекающимися носителями $\Delta_{m_{k_0+1}}, \ldots, \Delta_{m_{k_1}}$ $(m_{k_0} < m_{k_0+1} < \cdots < m_{k_1})$ такими, что $\{\Delta_{m_{k_0+1}}, \ldots, \Delta_{m_{k_1}}\}$ лежат в B_{12} и

$$\left| E \cap B_{12} - \bigcup_{i=k_0+1}^{k_1} \Delta_{m_i} \right| < \nu_2 |E \cap B_{12}|.$$

Положим

$$f_2^1 = \gamma_1 \sum_{i=k_0+1}^{k_1} a_i \phi_{m_i},$$

где $a_i = 2\|\phi_{m_i}\|_\infty^{-1}$ при $k_0 < i \leq k_1$. Изменяя (если необходимо) знаки коэффициентов, получаем

$$\left| E \cap B_{12} \cap \bigcup_{k_0+1}^{k_1} \Delta_{m_l} \right| > \frac{1}{2}(1 - \nu_2)|E \cap B_{12}|.$$

Очевидно, f_2^1 является ступенчатой функцией, принимающей значения $2\gamma_1$ и $-2\gamma_1$ на открытых множествах B_{21} и B_{22}, соответственно. Сумма $f_1^1 + f_2^1$

принимает значение γ_1 на $B_{11} \cup B_{21}$, так как B_{21} и B_{22} суть подмножества множества B_{12}. Кроме того

$$|E \cap (B_{11} \cup B_{21})| = |E \cap B_{11}| + |E \cap B_{21}| \geq$$
$$\geq \frac{1}{2}(1-\nu_1)|E \cap \Delta_\nu^1| + \frac{1}{4}(1-\nu_1)(1-\nu_2)|E \cap \Delta_\nu^1| =$$
$$= \frac{1}{4}(1-\nu_1)(3-\nu_2)|E \cap \Delta_\nu^1| > \left[\frac{3}{4} - (\nu_1+\nu_2)\right] |\Delta_\nu^1|.$$

После N шагов, где N было определено в (3), получаем функции f_i^1 $(1 \leq i \leq N)$. Пусть

$$f_1 = \sum_{i=1}^{N} f_i^1 = \gamma_1 \cdot \sum_{i=1}^{k_{N-1}} a_i \phi_{m_i} \tag{8}$$

и

$$D_1 = \left\{ x \in E : \sum_{i=1}^{N} f_i^1(x) = \gamma_1 \right\}. \tag{9}$$

Ясно, что

$$|D_1| = \left| E \cap \bigcup_{i=1}^{N} B_{i1} \right| > \left[(1-2^{-N}) - \sum_{i=1}^{N} \nu_i \right] |E \cap \Delta_\nu^1| > |E \cap \Delta_\nu^1|(1-\epsilon),$$

и f_1 равна нулю вне интервала Δ_ν^1. Кроме значения γ_1 единственно возможными значениями частичных сумм Φ−многочлена f_1 являются 0 и $-\gamma_1 2^{k-1}$ $(1 \leq k \leq N)$. Кроме того, частичная сумма функции f_1 может равняться $-\gamma_1 2^{k-1}$ на множествах с мерой, меньшей чем $\nu_{k+1}|\Delta_{11}|$ $(1 \leq k \leq N-1)$, и $-\gamma_1 2^{N-1}$ – на множестве с мерой, меньшей чем $2^{-N}|\Delta_\nu^1|$. Таким образом, если положить

$$G_1 = B_0 \cup \bigcup_{i=1}^{N-1} (B_{i2} \setminus B_{i+11}) \cup B_{2N},$$

то можно легко показать, что

$$D_1 = (E \cap \Delta_\nu^1) \setminus G_1, \quad |G_1| < \left(\sum_{i=1}^{N} \nu_i \right) |\Delta_\nu^1| + \frac{\varepsilon}{2} |\Delta_\nu^1| < \epsilon |\Delta_\nu^1|. \tag{10}$$

Из замечания о значениях частичных сумм функции f_1 и (4), (5) получаем

$$\sup_{1<s\leq k_{N-1}} \left\| \sum_{i=1}^{s} \gamma_1 a_i \phi_{m_i} \right\|_{L^p_{\Delta_\nu^1}} \leq$$

$$\leq |\gamma_1| \left\{ |\Delta_\nu^1| + \sum_{j=1}^{N-1} 2^{p(j-1)} \nu_{j+1} |\Delta_\nu^1| + 2^{p(N-1)} 2^{-N} |\Delta_\nu^1| \right\}^{1/p} \leq$$

$$\leq 2^{N/p'}\|g_1\|_{L^p_{\Delta^1_\nu}} < \varepsilon, \quad p' = \frac{p}{p-1}. \tag{11}$$

В конструкции Ф-многочлена функции f_1 было использовано только условие (1), которое остаётся справедливым и после снятия из подсистемы Ф конечного числа элементов. Таким образом, получаем, что для каждой функции g_j $(1 \leq j \leq 2^\nu)$ можно найти Ф-многочлен

$$f_j = \sum_{i=\mu_{j-1}+1}^{\mu_j} a_i \phi_{m_i}, \quad m = \mu_0 < \mu_1 < \cdots < \mu_{2^\nu}$$

такой, что

$$(a) \qquad f_j(x) = g_j(x), \quad x \in D_j = \left(E \cap \Delta^j_\nu\right) \setminus G_j, \quad |G_j| < \varepsilon|\Delta^j_\nu|.$$

Кроме того, $D_j \subset \Delta_{1j}$ $(1 \leq j \leq 2^\nu)$ суть суммы двоичных интервалов, а f_j обращается в нуль вне Δ^j_ν, причём

$$(b) \qquad \sup_{\mu_{j-1} < s \leq \mu_j} \left\| \sum_{i=\mu_{j-1}+1}^{s} a_i \phi_{m_i} \right\|_{L^p_{\Delta^j_\nu}} < \varepsilon.$$

Пусть

$$G = \bigcup_{j=1}^{2^\nu} G_j, \quad P = \sum_{j=1}^{2^\nu} f_j = \sum_{i=\mu_0+1}^{\mu_{2^\nu}} b_i \phi_{m_i} = \sum_{k=m}^{l} b_k \phi_k.$$

Тогда, в силу (a) и (b), $P(x) = g(x)$ для $x \in E \setminus G$, $|G| < \varepsilon$. Для любых $s, m \leq s \leq l$, можно найти j, $1 \leq j \leq 2^\nu$, такое, что $\mu_{j-1} \leq s < \mu_j$. Таким образом, имеем

$$\sum_{k=m}^{s} b_k \phi_k = \sum_{k=1}^{j-1} f_k + \sum_{i=\mu_{j-1}+1}^{s} a_i \phi_{m_i},$$

и согласно (a) и (b) непосредственно получаем оценку (3). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. **Для заданного**

$$K(x) = \sum_{j=1}^{2^n} \omega_j \chi_{\Delta^j_k}, \quad \omega_j \neq 0, \quad j = 1, \ldots, 2^k,$$

каждому положительному числу ε **и натуральному числу** m, **соответствуют конечная сумма** G **двоичных интервалов и Ф–многочлен** $P = \sum_{k=m}^{l} b_k \phi_k$ **такие, что** $|G| < \varepsilon$, $\{x : P(x) \neq 0\} \subset \{x : g(x) \neq 0\}$, $g(x) = K(x)P(x)$ **для** $x \in D \cap E$, **где** $D = [0,1] \setminus G$, **и для всех** $1 \leq r \leq p$ **имеем**

$$\sup\left\{ \left\| K \sum_{k=m}^{s} b_k f_k \right\|_{L^r_{D\cap E}} : m \leq s \leq l \right\} < \varepsilon + \|g\|_{L^r_{D\cap E}}.$$

Доказательство : Не умаляя общности можно предположить, что $n \geq k$. Применим Лемму 1 к функциям $[K]^{-1} g \chi_{\Delta_k^j}$, $1 \leq j \leq 2^k$. При подходящем выборе ε и чисел m, построенные многочлены не будут иметь общих элементов. Носители функций Хаара этих многочленов будут лежать соответственно в $\chi_{\Delta_k^j}$, $1 \leq j \leq 2^k$. Следовательно, умножение этих многочленов на K действует как умножение коэффициентов соответствующих многочленов на ω_j. Следовательно, сумма построенных многочленов, умноженная на K, доставляет требуемый многочлен. Лемма 2 доказана.

Доказательство Основной теоремы : Выберем $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\delta_n \downarrow 0$ при $n \to \infty$ так, чтобы

$$\|h_i\|_{L_G^{n+1}} < \frac{d_n}{3}, \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{где} \quad |G| < \delta_n, \quad d_n = 2^{-n-2}, \quad n \in \mathcal{N}. \tag{12}$$

Построим двойную последовательность $\{P_k^{(j)}\}_{k=1, j=k}^{\infty \ \ \infty}$ Ф-многочленов

$$P_k^{(j)} = \sum_{\mu_{k-1}(j)+1}^{\mu_k(j)} a_i \phi_i$$

с $0 \leq \mu_0(1) < \mu_1(1) = \mu_0(2) < \mu_1(2) < \cdots < \mu_0(j) < \mu_1(j) < \cdots < \mu_j(j) = \mu_0(j+1) < \dots$ и измеримую функцию $0 \leq M(x) \leq 1$, удовлетворяющую следующим условиям :

$$(\alpha) \qquad \left\| h_k - M \sum_{j=k}^{n} P_k^{(j)} \right\|_{L_E^{n+1}} \leq 2d_n, \quad k, n \in \mathcal{N}, \quad k \leq n,$$

$$(\beta) \qquad \sup_s \left\{ \left\| M \sum_{i=\mu_{k-1}(n)+1}^{s} a_i \phi_i \right\|_{L_E^n} : s \leq \mu_k(n) \right\} \leq d_n, \quad k < n,$$

$$(\gamma) \qquad \sup_s \left\{ \left\| M \sum_{i=\mu_{n-1}(n)+1}^{s} a_i \phi_i \right\|_{L_E^{n+1}} : s \leq \mu_n(n) \right\} \leq d_n + \|h_n\|_{L_E^{n+1}}.$$

Требуемая функция $M(x)$ является бесконечным произведением некоторых положительных функций $M_i(x)$.

Применим Лемму 1 при $p = 2$, $g = h_1$, $\varepsilon = \varepsilon_1 = 1/2 \min\{d_1, \delta_1\}$ и $m = 1$. Тогда можно найти множество $G_1^{(1)}$, $|G_1^{(1)}| < \varepsilon_1$ и Ф-многочлен

$$P_1^{(1)} = \sum_{i=\mu_0(1)+1}^{\mu_1(1)} a_i \phi_i \tag{13}$$

такие, что

$$P_1^{(1)}(x) = h_1(x) \quad \text{для} \quad x \in D_1^{(1)} = E \setminus G_1^{(1)} \tag{14}$$

и

$$\sup_s \left\{ \left\| \sum_{i=\mu_0(1)+1}^{s} a_i\phi_i \right\|_{L^2_{D_1^{(1)}}} : s \le \mu_1(1) \right\} \le \varepsilon_1 + \|h_1\|_{L^2_{D_1^{(1)}}}. \tag{15}$$

Поэтому для

$$M_1(x) = \begin{cases} c_1 & \text{если} \quad x \in G_1^{(1)}, \\ 1 & \text{в противном случае,} \end{cases} \qquad c_1 = \frac{\varepsilon_1}{3}\left(\varepsilon_1 + \|h_1\|_{L^2_E}\right)^{-1}, \tag{16}$$

в силу (14) - (16) и (12) имеем

$$\left\| h_1 - M_1 P_1^{(1)} \right\|_{L^2_E} = \left\| h_1 - M_1 P_1^{(1)} \right\|_{L^2_{G_1^{(1)} \cap E}} \le \|h_1\|_{L^2_{G_1^{(1)}\cap E}} + \left\| M_1 P_1^{(1)} \right\|_{L^2_{G_1^{(1)}}} \le$$

$$\le \frac{1}{3}d_1 + \frac{\varepsilon_1}{3} < \frac{1}{2}d_1.$$

Чтобы найти M_2, дважды применим Лемму 2. Сначала возьмем $p = 3$, $K = M_1$, $g = \left[h_1 - M_1 P_1^{(1)}\right]$, $\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon_2$, $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}\min\{d_2, \delta_2,\}$, $m = \mu_1(1) + 1$, и найдем множество $G_1^{(2)}$, $|G_1^{(2)}| < \varepsilon_2$ и Ф-многочлен

$$P_1^{(2)} = \sum_{i=\mu_0(2)+1}^{\mu_1(2)} a_i\phi_{m_i}$$

такие, что

$$M_1(x)P_1^{(2)}(x) = \left[h_1(x) - M_1(x)P_1^{(2)}(x)\right], \quad \text{для} \quad x \in D_1^{(2)} = E \setminus G_1^{(2)} \tag{17}$$

и

$$\sup_s \left\{ \left\| M_1(x) \sum_{i=\mu_0(2)+1}^{s} a_i\phi_i \right\|_{L^2_{D_1^{(2)}}} : s \le \mu_1(2) \right\} \le \varepsilon_2 + \left\| h_1 - M_1 P_1^{(1)} \right\|_{L^2_{D_1^{(2)}}} <$$

$$< \varepsilon_2 + d_1 < \frac{1}{3}d_2 + \frac{1}{2}d_1.$$

Тогда, применяя Лемму 2 с $p = 3$, $K = M_1$, $g = h_2$, $\varepsilon = 1/2\varepsilon_2$, где $m = \mu_1(2) + 1$, можно найти множество $G_2^{(2)}$, $|G_2^{(2)}| < \varepsilon_2$ и Ф-многочлен

$$P_2^{(2)} = \sum_{i=\mu_1(2)+1}^{\mu_2(2)} a_i\phi_i,$$

такой, что $M_1(x)P_2^{(2)}(x) = h_2(x)$ для $x \in D_2^{(2)} = E \setminus G_2^{(2)}$, и

$$\sup_s \left\{ \left\| M_1 \sum_{i=\mu_1(2)+1}^{s} a_i\phi_i \right\|_{L^s_{D_2^{(2)}}} : s \le \mu_2(2) \right\} \le \frac{1}{2}\varepsilon_2 + \|h_2\|_{L^s_{D_2^{(2)}}}.$$

Положим

$$D_2 = D_1^{(2)} \cap D_2^{(2)}, \quad G_2 = E \cap \left(G_1^{(2)} \cup G_2^{(2)}\right) = E \setminus D_2 \tag{18}$$

и

$$M_2(x) = \begin{cases} c_2, & \text{если} \quad x \in G_2, \\ 1, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $c_2 > 0$ выбрано так, чтобы

$$\left\| h_1 - M_1M_2(P_1^{(1)} + P_1^{(2)}) \right\|_{L^s_E} = \left\| h_1 - M_1M_2(P_1^{(1)} + P_1^{(2)}) \right\|_{L^s(G_2)} \le$$
$$\le \|h_1\|_{L^s(G_2)} + c_2 \left(\left\| P_1^{(1)} \right\|_{L^s(G_2)} + \left\| P_1^{(2)} \right\|_{L^s(G_2)} \right) \le d_2,$$

и для $\mu_2(0) < s \le \mu_2(1)$

$$\left\| M_1M_2 \sum_{i=\mu_2(0)+1}^{s} a_i\phi_{m_i(2)} \right\|_{L^2_E} = \left\| M_1 \sum_{i=\mu_2(0)+1}^{s} a_i\phi_{m_i(2)} \right\|_{L^2(D_2)} +$$
$$+ \left\| M_1M_2 \sum_{i=\mu_2(0)+1}^{s} a_i\phi_{m_i} \right\|_{L^2(G_2)} \le \frac{1}{3}d_2 + \frac{1}{2}d_1 + \frac{1}{3}\varepsilon_2 < \frac{1}{2}(d_2 + d_1).$$

Если $c_2 > 0$ достаточно мало, то справедливы неравенства

$$\left\| h_2 - M_1M_2P_2^{(2)} \right\|_{L^s_E} < \frac{1}{2}d_2,$$

$$\left\| h_1 - M_1M_2P_1^{(1)} \right\|_{L^2_E} \le \|h_1 - M_1P_{11}\|_{L^2_{D_2}} + \|h_1\|_{L^2_{G_2}} + c_2 \left\| M_1P_1^{(1)} \right\|_{L^2_{G_2}} <$$
$$< \frac{1}{2}d_1 + \frac{1}{3}d_2 + \frac{1}{6}d_2 \le \frac{1}{2}(d_1 + d_2),$$

и для $\mu_2(1) < s \le \mu_2(2)$

$$\left\| M_1M_2 \sum_{i=\mu_2(1)+1}^{s} a_i\phi_{m_i} \right\|_{L^s_E} \le \frac{1}{2}d_2 + \|h_2\|_{L^s_E}.$$

Предположим, что мы окончили первые l шагов нашего построения, т.е. для каждой пары k, n с $1 \le n \le l$ и $1 \le k \le n$, имеем

$$\left\| h_k - \left(\prod_{i=1}^{l} M_i\right) \sum_{j=k}^{n} P_k^{(j)} \right\|_{L^{n+1}_E} < \sum_{j=n}^{l} d_j, \tag{19}$$

$$\sup_s\left\{\left\|\left(\prod_{i=1}^{l}M_i\right)\sum_{i=\mu_{k-1}(n)+1}^{s}a_i\phi_i\right\|_{L_E^n}: s\le\mu_k(n)\right\}\le\frac{1}{2}\sum_{j=n}^{l}d_j,\quad n>k,\qquad(20)$$

и

$$\sup_s\left\{\left\|\left(\prod_{i=1}^{l}M_i\right)\sum_{i=\mu_{n-1}(n)+1}^{s}a_i\phi_i\right\|_{L_E^{n+1}}: s\le\mu_k(n)\right\}\le\|h_n\|_{L_E^{n+1}}+\frac{1}{2}\sum_{j=n}^{l}d_j.\qquad(21)$$

Очевидно, $M(l)=\prod_{i=1}^{l}M_i$ можно представить в виде произведения d-простых функций и характеристической функции множества E. Тогда на $(l+1)$-ом шаге мы применяем Лемму 2 $(l+1)$ раз, полагая

$$p=l+2,\quad K=M(l),\quad \varepsilon=\frac{1}{l+1}\varepsilon_{l+1},\quad \varepsilon_{l+1}=\min\{d_{l+1},\delta_{l+1}\},$$

и изменив функцию g и число m подходящим образом. Используя Лемму 2 k—ый раз $(k=1,\dots,l)$, получим

$$g=H_k=\left[h_k-\left(\prod_{i=1}^{l}M_i\right)\left(\sum_{j=k}^{l}P_k^{(j)}\right)\right],$$

а для $k=l+1$ возьмем $g=H_{l+1}=h_{l+1}$. Положим $m=\mu_{k-1}(l+1)+1$. Таким образом, можно найти множества $G_k^{(l+1)}$, $|G_k^{(l+1)}|<\varepsilon_{l+1}$, $1\le k\le l+1$ и Ф-многочлены

$$P_k^{(l+1)}=\sum_{i=\mu_{k-1}(l+1)+1}^{\mu_k(l+1)}a_i\phi_i$$

с $\mu_l(l)=\mu_0(l+1)<\mu_1(l+1)<\dots<\mu_{l+1}(l+1)$, удовлетворяющие следующим условиям : если $1\le k\le l$, для $x\in D_k^{(l+1)}=E\setminus G_k^{(l+1)}$ имеем

$$M(l)(x)P_k^{(l+1)}(x)=\left[h_k(x)-\prod_{i=1}^{l}M_i(x)\sum_{j=k}^{l}P_k^{(j)}(x)\right],$$

$$M(l)(x)P_{l+1}^{(l+1)}(x)=h_{l+1}(x)\quad\text{для}\quad x\in D_{l+1}^{(l+1)}=E\setminus G_{l+1}^{(l+1)}.\qquad(22)$$

Кроме того, для любого $1\le k\le l$

$$\sup_s\left\{\left\|\prod_{i=1}^{l}M_i\sum_{i=\mu_{k-1}(l)+1}^{s}a_i\phi_i\right\|_{L^{l+1}_{D_k^{(l+1)}}}: s\le\mu_k(l)\right\}\le\varepsilon_{l+1}+\|H_k\|_{L_E^{l+1}}<$$

$$<\frac{1}{2}d_{l+1}+\sum_{j=k}^{l}d_j.$$

При $k = l+1$, имеем

$$\sup_s \left\{ \left\| \prod_{i=1}^{l} M_i \sum_{i=\mu_l(l)+1}^{s} a_i\phi_i \right\|_{L^{l+2}_{D_k^{(l+1)}}} : s \le \mu_{l+1}(l) \right\} \le \varepsilon_{l+1} + \|h_{l+1}\|_{L_E^{l+2}}. \tag{23}$$

Теперь положим

$$D_{l+1} = \bigcap_{k=1}^{l+1} D_k^{(l+1)}, \quad G_{l+1} = \bigcup_{k=1}^{l+1} G_k^{(l+1)} \tag{24}$$

и

$$M_{l+1}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \in D_{l+1}, \\ c_{l+1}, & \text{если} \quad x \in G_{l+1}, \end{cases} \tag{25}$$

где

$$c_{l+1} = \frac{\varepsilon_{l+1}}{3} \left(1 + \sum_{\nu=1}^{l+1} \sum_{k=1}^{l} \sup_s \left\{ \left\| M(\nu) \sum_{i=\mu_\nu(k-1)+1}^{s} a_i\phi_{m_i} \right\|_{L_E^{k+1}} : s \le \mu_\nu(k) \right\} \right)^{-1}.$$

Из (22) – (25) следует, что

$$\left\| h_k - \prod_{i=1}^{l+1} M_i \sum_{j=k}^{l+1} P_k^{(j)} \right\|_{L_E^{l+2}} = \left\| h_k - \left(\prod_{i=1}^{l+1} M_i \right) \sum_{i=k}^{l+1} P_k^{(j)} \right\|_{L^{l+2}_{E\cap G_{l+1}}} \le$$

$$\le \frac{d_{l+1}}{3} + \frac{d_{l+1}}{3} < d_{l+1}. \tag{26}$$

Аналогично, для $k < l+1$ имеем

$$\sup_{s \le \mu_k(l+1)} \left\| \prod_{i=1}^{l+1} M_i \sum_{i=\mu_{k-1}(l+1)+1}^{s} a_i\phi_i \right\|_{L^{l+1}_{D_k^{(l+1)}}} \le \|H_k\|_{L_E^{l+1}} + \frac{\varepsilon_{l+1}}{3} \le$$

$$\le \frac{1}{3}(\varepsilon_l + \varepsilon_{l+1}) < \frac{1}{3}(d_l + d_{l+1}), \tag{27}$$

и

$$\sup_s \left\{ \left\| \prod_{i=1}^{l+1} M_i \sum_{i=\mu_l(l+1)+1}^{s} a_i\phi_i \right\|_{L^{l+2}_{D_k^{(l+1)}}} : s \le \mu_{l+1}(l+1) \right\} \le \|h_{l+1}\|_{L_E^{l+2}} + \frac{\varepsilon_{l+1}}{3}.$$

Для $n \le l+1$ и $k \le n$ имеем

$$\left\| h_k - \prod_{i=1}^{l+1} M_i \sum_{j=k}^{n} P_k^{(j)} \right\|_{L_E^n} \le \left\| h_k - \left(\prod_{i=1}^{l} M_i \right) \sum_{i=k}^{n} P_k^j \right\|_{L^n_{D_{l+1}}} + \|h_k\|_{L^n_{E\cap G_{l+1}}} +$$

$$+\left\|\left(\prod_{i=1}^{l+1} M_i\right)\sum_{j=k}^{n} P_k^{(j)}\right\|_{L^n_{E\cap G_{l+1}}} \le \sum_{j=m}^{l} d_j + \frac{d_{l+1}}{3} + \frac{d_{l+1}}{3} \le \sum_{j=m}^{l+1} d_j. \quad (28)$$

Аналогично получим, что (20) и (21) выполняются, если заменить l на $l+1$. Мы построили последовательность функций $\{M_i\}_{i=1}^{\infty}$, которые могут быть представлены как произведение d-простой функции и характеристической функции множества E. Ясно, что $0 < M_i(x) \le 1$ и

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\{x : M_i(x) \neq 1\}| \le \sum_{i=1}^{\infty} |G_i| \le \sum_{i=1}^{\infty} d_i = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i-2} = \frac{1}{4}. \quad (29)$$

Последовательность частичных произведений $\prod_{i=1}^{l} M_i$ образует невозрастающую последовательность положительных функций. Таким образом, предел произведения

$$M(x) = \lim_{l} \prod_{i=1}^{l} M_i(x) \quad (30)$$

существует, измерим и удовлетворяет условию $0 \le M(x) \le 1$. Эта функция удовлетворяет условиям (α), (β) и (γ), которые получаются с помощью предельного перехода из (21), (27), (28).

С $\{M\phi_k\}$ связана система $\Psi = \{\psi_i\}$ с функциями

$$\psi_i = a_i h_k, \quad \text{для} \quad \mu_{k-1}(l) < i \le \mu_k(l), \quad l \ge k. \quad (31)$$

Тогда для функционалов на L^p_E

$$b_i(\cdot) = \int_E (\cdot)\psi_i \, dt, \quad i \in \mathcal{N}, \quad (32)$$

система $\{M\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ будет квазибазисом в L^p_E при каждом $1 \le p < \infty$.

Пусть f – произвольный элемент из $L^p([0,1])$, и пусть $\sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)h_k$ – его разложение по системе Хаара. Докажем, что частичные суммы $S_n(f)$ ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i(f)M\phi_i$ стремятся к f по норме пространства L^p_E. Для этого покажем, что

$$\|S_{\mu_l(m)} - f\|_{L^p_E} \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty. \quad (33)$$

Предположим, что $n \in \mathcal{N}$ есть наименьшее число такое, что $n - 1 \ge p$. Тогда для любого $m \in \mathcal{N}$, $m > n$ и $0 \le l < m$ имеем

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{\mu_l(m)} b_i(f) M\phi_i \right\|_{L^p_E} = \left\| f - \sum_{k=1}^{m-1} c_k \sum_{j=k}^{m-1} M P_k^{(j)} - \sum_{k=1}^{l} c_k M P_k^{(m)} \right\|_{L^p_E} \le$$

$$\leq \left\| f - \sum_{k=1}^{m-1} c_k h_k \right\|_{L^p_E} + \left\| \sum_{k=1}^{l} c_k \left(h_k - \sum_{j=k}^{m} M P_k^{(j)} \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=l+1}^{m-1} c_k \left(h_k - \sum_{j=k}^{m-1} M P_k^{(j)} \right) \right\|_{L^p_E} \leq \left\| f - \sum_{k=1}^{m-1} c_k h_k \right\|_{L^p_E} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{l} |c_k| \left\| h_k - \sum_{j=k}^{m} M P_k^{(j)} \right\|_{L^p} + \sum_{k=l+1}^{m-1} |c_k| \left\| h_k - \sum_{j=k}^{m-1} M P_k^{(j)} \right\|_{L^p_E} \leq$$

$$\leq \left\| f - \sum_{j=1}^{m-1} c_j h_j \right\|_{L^p_E} + 2^{-m} \sum_{k=1}^{m-1} |c_k|.$$

Последнее неравенство следует из (α), поскольку $m - 1 \geq p$.

Отсюда следует, что $\sum\limits_{j=1}^{m-1} c_j h_j$ совпадает с частичной суммой разложения Хаара функции

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{для} \quad x \in E, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Так как система Хаара является базисом в $L^p_{[0,1]}$, то

$$\left\| f - \sum_{j=1}^{m-1} c_j h_j \right\|_{L^p_E} \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Далее

$$|c_j| = |c_j(f)| = \left| \int_E f h_j \, dt \right| \leq \|f\|_{L^p_E} \|h_j\|_{p'}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

и если Δ_j обозначает носитель функции h_j, то $\|h_j\|_{p'} = |\Delta_j|^{(-1/2+1/p')} \leq j^{(1/2+1/p-1)} = j^{1/p-1/2}$. Таким образом

$$2^{-m} \sum_{j=1}^{m-1} |c_j| \leq 2^{-m+1} m^{1/2+1/p} \|f\|_{L^p_E},$$

и (33) доказана. Наконец, полагая

$$\sigma_k^{lm} = \sum_{i=\mu_{l-1}(m)+1}^{k} b_i M \phi_i,$$

из (β), (31) и (32) для $\mu_{l-1}(m) < k < \mu_l(m)$ с $l, m \in \mathcal{N}$, и $l \leq m$, получим

$$\|\sigma_k^{lm}\|_{L^p_E} \leq |c_l| \sup_{\mu_{l-1}(m) < k < \mu_l(m)} \left\| \sum_{i=\mu_{l-1}(m)+1}^{k} a_i M \phi_i \right\|_{L^p_E} \leq$$

$$\leq |c_l| \|h_l\|_{L^p_{[0,1]}} \left(\|h_l\|_{L^p_{[0,1]}}\right)^{-1} \sup_{\mu_{l-1}(m)<k<\mu_l(m)} \left\| \sum_{i=\mu_{l-1}(m)+1}^{k} a_i M\phi_i \right\|_{L^m_E} \leq$$

$$\leq o(1) \cdot m^{1/2} d_m \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Остается оценить σ_k^{lm} для $l = m$. Из условий (γ), (31), (32), учитывая, что носитель функции σ_k^{mm} лежит в Δ_m, получаем

$$\|\sigma_k^{mm}\|_{L^p_E} = |c_m| \left\| \sum_{i=\mu_{m-1}(m)+1}^{k} a_i M\phi_i \right\|_{L^p_E} \leq$$

$$\leq |c_m| \cdot |\Delta_m \cap E|^{(1-p/n)} \left\| \sum_{i=\mu_{l-1}(m)+1}^{k} a_i M\phi_i \right\|_{L^n_E} \leq$$

$$\leq |c_m| \cdot |\Delta_m \cap E|^{(1/p-1/n)} \left(d_m + \|h_m\|_{L^n_{\Delta_m}}\right) \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Основная теорема доказана.

§4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1 И 2

Доказательство Теоремы 1 : По теореме Мюнца существует двойная последовательность $\{Q_{kj}\}_{k,j}^{\infty,\infty}$ многочленов

$$Q_{kj} = \sum_{\mu_{k-1}(j)+1}^{\mu_k(j)} a_i x^{\lambda_i}$$

с $0 = \mu_0(1) < \mu_1(1) = \mu_0(2) < \mu_1(2) < \cdots < \mu_0(j) < \mu_1(j) < \cdots < \mu_j(j) = \mu_0(j+1) < \ldots$ такая, что выполнено следующее условие :

$$(\alpha_1) \qquad \left\| h_k - \sum_{j=k}^{n} Q_{kj} \right\|_{L^n_{[0,1]}} \leq 2^{-n-2} \quad k, n \in \mathcal{N}, \quad k \leq n.$$

Пусть $\{n_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ суть числа $\{\mu_j(k),\ 1 \leq j \leq k\}_{k=1}^{\infty}$, перенумерованные в порядке возрастания. Системе $\{x^{\lambda_i}\}_{i=1}^{\infty}$ соответствует система Ψ, с членами

$$\psi_i = a_i h_k, \quad \text{для} \quad \mu_{k-1}(l) < i \leq \mu_k(l), \quad l \geq k.$$

С функционалами, определёнными на $L^p_{[0,1]}$ по формуле

$$b_i(\cdot) = \int_0^1 (\cdot)\psi_i \, dt, \quad i \in \mathcal{N},$$

система $\{x^{\lambda_n}\}_{k=1}^{\infty}$ является квазибазисом суммирования по последовательности $\{n_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ в $L^p_{[0,1]}$ для каждого $1 \leq p < \infty$. Доказательство аналогично концу доказательства Основной Теоремы, где (33) доказано с использованием свойства (α). Этим завершается доказательство Теоремы 1.

Доказательство Теоремы 2 : Предположим, что $\{M(x)\cdot x^{\lambda_i}\}_{i=1}^{\infty}$ является квазибазисом для L^p_G при некоторых $1 \le p < \infty$, $G \subset [0,1]$ и $M \in L^p_G$. Тогда существует последовательность $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\psi_i \in L^{p'}_G$ такая, что для любого $f \in L^p_G$ имеем

$$\lim_{n\to\infty}\int_G\left|\sum_{i=1}^{n} M(x)\,b_i\,x^{\lambda_i} - f(x)\right|^p dx = 0, \tag{34}$$

где

$$b_i = b_i(f) = \int_G f(t)\psi_i(t)\,dt, \quad i \in \mathcal{N}.$$

Следовательно, для каждого $f \in L^p_G$ ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i x^{\lambda_i}$ сходится в S_G к $[M]^{-1}f$. Осталось показать, что

$$\lim_{n\to\infty} b_i\,x^{\lambda_i} = 0 \quad \text{для любого} \quad x \in G, \quad |(x,1)\cap G| > 0. \tag{35}$$

Если (35) не выполняется, то для некоторого $0 \ne x_0 \in G$ имеем

$$|(x_0,1)\cap G| > 0, \tag{36}$$

и существует возрастающая последовательность чисел i_k, $k \in \mathcal{N}$ такая, что

$$|b_{i_k}x^{\lambda_{i_k}}| > \alpha_0 > 0, \quad k \in \mathcal{N}. \tag{37}$$

Однако, если ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i x^{\lambda_i}$ сходится в S_G, то (36), (37) не имеют места. Следовательно, из сходимости ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i x^{\lambda_i}$ в S_G вытекает (35). Отсюда следует, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i x^{\lambda_i}$ сходится равномерно на интервале $(0,\beta)$, где β – наибольшее число, для которого $|(\beta,1)\cap G| > 0$, что противоречит (34). Теорема 2 доказана.

§5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

Для доказательства Теоремы 3 достаточно повторить доказательство Основной Теоремы, используя вместо Леммы 2 следующую лемму.

Лемма 3. Пусть $W_\Omega = \{w_k, k \in \Omega\}$ – подсистема системы Уолша–Пэли с порядком элементов, унаследованном из последней системы и Ω удовлетворяет Условию (P). Пусть $1 \le p < \infty$ и

$$g = \sum_{i=1}^{2^n} \gamma_i \chi_{\Delta_n^i}, \qquad \text{где} \quad \Delta_n^i = \left(\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right), \quad i = 1,\ldots,2^n.$$

Тогда, любым $\varepsilon > 0$ и $m \in \mathcal{N}$ соответствуют конечная сумма G двоичных интервалов и W_Ω–многочлен $P = \sum_{k=m}^{l} b_k w_k$, где $b_k = 0$ при $k \notin \Omega$ такие, что

$$|G| < \varepsilon, \quad g(x) = P(x) \quad \text{при} \quad x \in D, \quad D = [0,1] \setminus G$$

и

$$\sup \left\{ \left\| \sum_{k=m}^{s} b_k w_k \right\|_{L^p_D} : m \le s \le l \right\} < \varepsilon + \|g\|_{L^p_D}.$$

Доказательство Леммы 3 опирается на следующее утверждение.

Предложение 1. Пусть $W_\Omega = \{w_k, \ k \in \Omega\}$ – подсистема системы Уолша–Пэли с порядком элементов, унаследованном из последней системы, и Ω удовлетворяет Условию (P). Пусть $1 \le p < \infty$, и $i, \nu \in \mathcal{N}$ такие числа, что $m_i - n_i \ge 3 \cdot 2^\nu$. Тогда существует k_0, $n_i \le k_0 < m_i$ такое, что

$$w_{k_0} w_k = w_{l_k}, \quad l_k \in [n_i, m_i], \quad 0 \le k \le 2^\nu - 1, \tag{38}$$

и для многочлена Уолша–Пэли $P(x) = \sum_{k=0}^{2^\nu - 1} a_k w_k(x)$ имеем

$$\|P(1 - w_{k_0})\|_{L^p_{[0,1]}} = 2^{1/p'} \|P\|_{L^p_{[0,1]}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \tag{39}$$

Доказательство : Рассмотрим несколько случаев. Если существует натуральное число $m \ge \nu$ такое, что $n_i \le 2^m < 2^{m+1} \le m_i$, то (38) верно для $k_0 = 2^m$. Если $2^m \le n_i < 2^{m+1} \le m_i$ для некоторого $m \in \mathcal{N}$, то рассмотрим случаи a) $m_i - 2^m \ge 2^\nu$ и b) $m_i - 2^m < 2^\nu$. В случае a) положим $k_0 = 2^m$, а в противном случае $k_0 = 2^m - 2^\nu - 1$. Вообще говоря, всегда можно найти число

$$\nu_i = \sum_{j=\nu-1}^{m-1} \delta_j 2^j, \quad \text{где} \quad \delta_j = 0 \quad \text{или} \quad 1,$$

такое, что $\nu_i \le n_i < \nu_i + 2^{j_0} \le m_i$ и $\nu \le j_0 \le m$. Вновь рассмотрим два случая : $m_i - \nu_i - 2^{j_0} \ge 2^\nu$ и $m_i - \nu_i - 2^{j_0} < 2^\nu$. Соответственно, положим $k_0 = 2^{j_0} + \nu_i$ и $k_0 = 2^{j_0} + \nu_i - 2^\nu$. Непосредственной проверкой (39) доказывается Предложение 1.

Доказательство Леммы 3 : аналогично доказательству Леммы 1. Сосредоточим наше внимание на тех частях, которые различаются. Сначала вместо условия (5) возьмем условие

$$2^{N/p'} \cdot \|g\|_{L^p_{\Delta^i_\nu}} < \frac{\varepsilon}{2C_p}, \quad \nu > \max(n, N), \tag{40}$$

где $C_p > 1$ – базисная постоянная системы Уолша–Пэли (норма в L^p частичных сумм любого W-многочлена меньше или равна C_p раза L^p-норма этого многочлена). Полагая как и в доказательстве Леммы 1

$$g(x) = \sum_{i=1}^{2^\nu} g_i(x), \quad \text{где} \quad g_i(x) = \chi_{\Delta_\nu^i}(x) \cdot g(x),$$

построим W_Ω-многочлен W^1, аппроксимирующий функцию

$$g_1(x) = \sum_{l=0}^{2^{\nu+1}} \int_0^1 g_1(t) w_l(t)\, dt, \quad \text{где} \quad w_l(x) = \sum_{l=0}^{2^{\nu+1}} c_l(g_1) w_l(x)$$

на множестве Δ_ν^1. Для этого воспользуемся Предложением 1. Пусть число $i_1 \in \mathcal{N}$ такое, что $m_{i_1} - n_{i_1} \geq 3 \cdot 2^{\nu+1}$ и $n_{i_1} > 2^{\nu+1}$. Тогда по Предложению 1, можно найти k_1 ($n_{i_1} \leq k_1 < m_{i_1}$ такое, что $w_{k_1}(x) \sum_{l=0}^{2^{\nu+1}} c_l(g_1) w_l(x)$ будет W_Ω-многочленом и

$$\|g_1(1 - w_{k_1})\|_{L^p_{[0,1]}} = 2^{1/p'} \|g_1\|_{L^p_{[0,1]}}.$$

Таким образом, можно найти числа $k_1 < \cdots < k_N$, $k_{j+1}/k_j > 2$ такие, что

$$W^1 = \left(\prod_{j=1}^N (1 - w_{k_j}(x)) - 1 \right) \sum_{l=0}^{2^{\nu+1}} c_l(g_1) w_l(x)$$

будет W_Ω-многочленом и согласно условию (40)

$$\|g_1 - W^1\|_{L^p_{[0,1]}} = \left\| g_1 \prod_{j=1}^N (1 - w_{k_j}) \right\|_{L^p_{[0,1]}} = 2^{N/p'} \|g_1\|_{L^p_{[0,1]}} < \frac{\varepsilon}{2C_p}.$$

Кроме того имеем, что $g_1 \prod_{j=1}^N (1 - w_{k_j}) \neq 0$ на множестве меры $2^{-\nu-N}$. Используя те же самые рассуждения, можно построить W_Ω-многочлены W^i $(2 \leq i \leq 2^\nu)$, которые не имеют общих элементов, причём $\left\|g_i - W^i\right\|_{L^p_{[0,1]}} < \frac{\varepsilon}{2C_p}$ и $g_i - W^i \neq 0$, $2 \leq i \leq 2^\nu$ на множестве меры $2^{-\nu-N}$. Проверкой, что $P = \sum_{i=1}^{2^\nu} W^i$ удовлетворяет условиям Леммы 3, завершается доказательство.

ABSTRACT. The paper proves that if a subsystem $\{h_{n_i}\}_{i=1}^\infty$ of Haar system is complete in S_G = the linear space of all measurable, a.e. finite functions on the measurable set G, where $|G| > 0$, then there exists a bounded function m such that $\{mh_{n_i}\}_{i=1}^\infty$ is a quasibasis in every L^p_G, $1 \leq p < \infty$ with the same admissible system. The same problem for the system $\chi = \{x^{\lambda_i}\}_{i=1}^\infty$, $0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots$ gives a completely different picture. The paper studies the same question for the Walsh-Paley system.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Banach, Theorie des Operations Lineares, Monografje Matematczyne, Warszawa, 1932.
2. Ben-Ami Braun, "On the multiplicative completion of certain basic sequences in L^p, $1 < p < \infty$", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 1176, pp. 499 – 508, 1973.
3. P. Borwein, T. Erdélyi, "Müntz spaces and Remez inequalities", Bull. Amer. Math. Soc., vol. 32, pp. 38 – 42, 1995.
4. P. Borwein, T. Erdélyi, "Generalizations of Müntz's theorem via a Remez-type inequality for Müntz spaces", J. Amer. Math. Soc., vol. 10, pp. 327 – 349, 1997.
5. B. R. Gelbaum, "Notes on Banach spaces and bases", Ann. Acad. Brasil., vol. 30, pp. 29 – 36, 1958.
6. C. Goffman, D. Waterman, "Basis sequences in the space of measurable functions", Proc. Amer. Math. Soc., vol. 11, pp. 211 – 213, 1960.
7. S. Kaczmarz, H. Steinhaus, Theorie der Orthogonalreihen, Monografje Matematyczne, Warsaw – Lwów, 1935.
8. K. S. Kazarian, R. E. Zink, "Some ramifications of a theorem of Boas and Pollard concerning the completion of a set of functions in L^2", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 349, pp. 4367 – 4383, 1997.
9. J. J. Price, R. E. Zink, "On sets of completeness for families of Haar functions", Trans. Amer. Math Soc., vol. 119, pp. 262 – 269, 1965.
10. J. J. Price, R. E. Zink, "On sets of functions that can be multiplicatively completed", Ann. Math., vol. 82, pp. 139 – 145, 1965.
11. J. J. Price, "Walsh series and adjustment of functions on small sets", Illinois J. Math., vol. 13, pp. 131 – 136, 1969.
12. I. Singer, Bases in Banach Spaces, II, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1981.

29 марта 2001

Universidad Autónoma de Madrid,
E-mail : kazaros.kazarian@uam.es

Indiana University Rawles Hall,
E-mail : torchins@indiana.edu