РАЗРЕШИМЫЕ ПЕРЕОПРЕДЕЛЁННЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

А. Г. Хачатрян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 36, № 3, 2001

В работе рассматриваются переопределённые параболические начально-краевые задачи вида

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \quad \mathcal{B}\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x,t)|_{\Gamma_T} = \Phi(x,t), \tag{1}$$

где $Q_T = \Omega \times [0,T]$, $\Gamma_T = S \times [0,T]$, $S = \partial\Omega$, $\mathcal{L}$ и $\mathcal{B}$ – матрицы размеров $M \times m$ и $r \times m$. Их элементы $L_{kj}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$ и $B_{qj}\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$ являются дифференциальными операторами порядков, не превосходящих $s_k + t_j$ и $\sigma_q + t_j$, соответственно. Целые s_k, t_j, σ_q $(k = 1,...,M,\ j = 1,...,m,\ q = 1,...,r)$ удовлетворяют условиям $\max_k s_k = 0$, $t_j > 0$ (если $s_k + t_j < 0$ или $\sigma_q + t_j < 0$, то $L_{kj} = 0$ или $B_{qj} = 0$). Операторы L_{kj} имеют постоянные коэффициенты. Обозначим через L^0_{kj}, B^0_{qj} суммы членов операторов L_{kj}, B_{qj} порядков $s_k + t_j$ и $\sigma_q + t_j$, соответственно, а через $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{B}_0$ - матрицы с элементами L^0_{kj} и B^0_{qj}. Кроме того, введём такие обозначения : α = мультииндекс с компонентами, удовлетворяющими условию $1 \le \alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_n \le M$; l^α, l^α_0 – квадратные матрицы, составленные из строк матриц $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_0$ с номерами α_l ; $L^\alpha = \det l^\alpha$ и $L^\alpha_0 = \det l^\alpha_0$; $\hat{l}^\alpha$ и $\hat{l}^\alpha_0$ – матрицы взаимные для l^α и l^α_0 такие, что $\hat{l}^\alpha l^\alpha = l^\alpha \hat{l}^\alpha = I_m L^\alpha$, $\hat{l}^\alpha_0 l^\alpha_0 = l^\alpha_0 \hat{l}^\alpha_0 = I_m L^\alpha_0$ (I_m – единичная $m \times m$ матрица). Порядок оператора L^α не превосходит $T_\alpha = \sum_{k=1}^m (t_k + s_{\alpha_k})$, а L^α_0 – сумма членов L^α, порядок которых равен T_α.

Условие параболичности 1. При любом $\xi \in R^n \setminus \{0\}$ общие корни полиномов $L^\alpha_0(i\xi, p)$ по переменной p удовлетворяют неравенству

$$\mathrm{Re} p_s \le -\delta\, \xi^{2b}, \quad \xi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_n^2. \tag{2}$$

Условие параболичности 2. Существуют $2b$-однородные полиномы $K^\alpha(i\xi,p)$ степени $T-T_\alpha$ такие, что полином

$$L(i\xi,p)=\sum_\alpha K^\alpha(i\xi,p)\,L_0^\alpha(i\xi,p)$$

также является $2b$-однородным (T-однородным), а его корни при всех $\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ удовлетворяют условиям (2).

Полином $\mathcal{L}(i\xi,p)$ удовлетворяет следующим дополнительным условиям :

$$L^\alpha(i\xi,p)=M(i\xi,p)\,Q^\alpha(i\xi,p)\quad\text{при всех}\quad\alpha,\tag{3}$$

где $M(i\xi,p)$ – полиномы степени $2br$ с главной частью $M_0(i\xi,p)$ и

$$L_0^\alpha(i\xi,p)=M_0(i\xi,p)\,Q_0^\alpha(i\xi,p),$$

причём $Q_0^\alpha(i\xi,p)$ – $2b$-однородные полиномы степени $T_\alpha-2br$ (если $T_\alpha-2br<0$, то $Q^\alpha=L^\alpha=0$), не имеющие общих комплексных корней, а корни $M_0(i\xi,p)$ удовлетворяют условиям (2).

Пусть $x\in S$. ν – единичный вектор внутренней нормали к S в точке x, и $\zeta(x)$ – вектор, лежащий в касательной плоскости к S в той же точке. Тогда $M_0(i(\zeta+\tau\nu),p)$ как полином по τ, при любом ζ имеет $b\,r$ корней τ_s^+ с положительной мнимой частью, и $b\,r$ – с отрицательной мнимой частью, если $\mathrm{Re}p>-\delta\,\xi^{2b}$ (см. [1]). Пусть

$$M^+(x,\zeta,\tau)=\prod_{s=1}^{br}(\tau-\tau_s^+(x,\zeta,p)).$$

Условие независимости : Строки матрицы

$$C(x,t,i(\zeta+\tau\nu),p)=B_0(x,t,i(\zeta+\tau\nu),p)\,\hat{\mathcal{L}}_0(i(\zeta+\tau\nu),p)$$

линейно независимы по модулю полинома M^+, если $\mathrm{Re}p>-\delta\,\xi^{2b}$.

Обозначим через $\hat{\mathcal{L}}_0^\alpha$ матрицу порядка $m\times M$, α_i-й столбец которой совпадает с i-м столбцом матрицы $\hat{l}^\alpha$, а остальные столбцы нулевые, так что $\hat{\mathcal{L}}^\alpha\,\mathcal{L}=L^\alpha\,I_m$. Рассмотрим квадратную матрицу $\hat{\mathcal{L}}^\alpha\,\mathcal{L}$. Её столбцы с номерами $k\neq\alpha_i$ – нулевые, а элемент α_i-ой строки и α_j-го столбца равен $\delta_{ij}L^\alpha$, а элемент k-ой строки ($k\neq\alpha_j$) и α_j-го столбца является определителем матрицы, получаемой из l^α заменой её j-ой строки на k-ю строку матрицы $\mathcal{L}$. Он совпадает, с точностью до знака, с одним из L^β и, следовательно

$$\hat{\mathcal{L}}^\alpha\,\mathcal{L}=\mathcal{R}^\alpha\,M,\tag{4}$$

где $\mathcal{R}^\alpha$ – матрица размера $M \times M$, элементами которой являются $\pm Q^\beta$ или нули. Умножая (4) справа на $\mathcal{L}$, используя (3), получаем

$$\mathcal{R}^\alpha\, M\, \mathcal{L} = \mathcal{L}\, \hat{\mathcal{L}}^\alpha\, \mathcal{L} = M\, Q^\alpha\, \mathcal{L}.$$

Сокращая на полином M имеем $\mathcal{R}^\alpha\, \mathcal{L} = Q^\alpha\, \mathcal{L}$. Перепишем задачу (1) в виде $A\, u = h$, где

$$A\, u = \begin{pmatrix} \mathcal{L}\, u \\ \mathcal{B}\, u|_{\Gamma_T} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad h = \begin{pmatrix} f \\ \Phi \end{pmatrix}.$$

В качестве области определения оператора A возьмём пространство

$$V_l = \dot{\mathrm{C}}^{l+t_1,(l+t_1)/2b}_{x,t}(Q_T) \times \dots\dots \times \dot{\mathrm{C}}^{l+t_m,(l+t_m)/2b}_{x,t}(Q_T),$$

где $\dot{\mathrm{C}}^{l,l/2b}_{x,t}$ – пространство Гёльдера для любого нецелого $l > 0$ (см. [1]). Если коэффициенты оператора B_{qj} достаточно гладкие, то как показано в [3], A является ограниченным оператором из V_l в

$$H_l = \dot{\mathrm{C}}^{l-s_1,(l-s_1)/2b}_{x,t}(Q_T) \times \dots\dots \times \dot{\mathrm{C}}^{l-s_M,(l-s_M)/2b}_{x,t}(Q_T) \times$$
$$\times\, \dot{\mathrm{C}}^{l-\sigma_1,(l-\sigma_1)/2b}_{x,t}(\Gamma_T) \times \dots\dots \times \dot{\mathrm{C}}^{l-\sigma_r,(l-\sigma_r)/2b}_{x,t}(\Gamma_T),$$

где $l > \max_q(0, \sigma\, q)$.

Теорема. Если $S \in C^{l+\max_j t_j}$ и коэффициенты оператора B_{gj} принадлежат классу $C^{l-\sigma_q,(l-\sigma_q)/2b}_{x,t}(\Gamma_T)$, то Im A имеет конечную коразмерность в пространстве H_l.

Доказательство : построением правого регуляризатора для A. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_0\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u = f(x,t), \\ &\mathcal{B}_0\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u\Big|_{x_n=0} = \Phi(x',t), \quad (x,t) \in \widetilde{D}_{n+1}, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\widetilde{D}_{n+1}$ – полупространство $x_n > 0$ в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Предположим, что матрицы $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{B}_0$, состоящие только из старших членов $\mathcal{L}$ и $\mathcal{B}$, удовлетворяют всем перечисленным условиям, в том числе и $\mathcal{L}_0\, \hat{\mathcal{L}}^\alpha_0 = \mathcal{B}_0\, L_0$. Покажем, что задача разрешима для любых бесконечно дифференцируемых f и Φ, если f удовлетворяет условиям согласования

$$\mathcal{R}^\alpha_0\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) f(x,t) = \mathcal{Q}^\alpha_0\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) f(x,t). \tag{6}$$

Сначала построим частное решение уравнения $\mathcal{L}_0\,\nu = f$. Для этого нам необходимо одно интегральное представление, полученное в [2]. Пусть $Q_j(\xi)$ $(j = 1, ..., N)$ – набор $l = (l_1, l_2, ..., l_n)$ однородных многочленов (т.е. $Q_j(\xi) = \sum\limits_{|\alpha:l|} c_\alpha \xi^\alpha$, $|\alpha : l| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i / l_i$) с постоянными комплексными коэффициентами.

Предположим, что $Q_j(\xi)$ не имеют общего комплексного корня, отличного от $\xi = 0$. Тогда справедливо представление

$$f(x) = f_{h^\lambda}(x) + \int_0^h \sum_{j=1}^{n} \nu^{-|\lambda|}\, d\nu \int_{\mathbb{R}^n} Q_j\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x+y)\, T_j(y : \nu^\lambda)\, dy, \tag{7}$$

где

$$f_{h^\lambda}(x) = \frac{1}{h^{|\lambda|}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x+y)\, K(y : \nu^\lambda)\, dy$$

и

$$\begin{aligned} &\sup pK = S(K) \subset \\ &\subset \left\{ x : \frac{x_i}{\alpha_i} > 0,\ 1 < \left(\frac{x_i}{\alpha_i}\right)^{1/\lambda_i} < 1 + b,\ \alpha_i \neq 0,\ i = 1, 2, ..., n,\ \alpha_n > 0, b > 0 \right\}, \end{aligned}$$

причём $\sup pT_j \subset S(K)$, $(j = 1, ..., N)$ и носителем представления (13) является сдвинутый рог $x + V(l)$, $l = 1/\lambda$, $(l_i = 1/\lambda_i,\ i = 1, 2, ..., n)$, где

$$\begin{aligned} V_h(l) = \bigcup_{0<\nu\leq h} \Bigg\{ x : \frac{x_i}{\alpha_i} > 0,\ \nu < \left(\frac{x_i}{\alpha_i}\right)^{1/\lambda_i} \leq (1+b)\nu,\ i = 1, ..., n,\ b > 0, \\ \alpha_i \neq 0,\ i = 1, ..., n-1,\ \alpha_n > 0 \Bigg\}. \end{aligned}$$

Так как $\widetilde{D}_{n+1}$ удовлетворяет условию бесконечного рога с $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = T_\alpha - 2br$, $\lambda_{n+1} = (T_\alpha - 2br)/2b$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, \lambda_{n+1})$, то для бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в $\widetilde{D}_{n+1}$ представление (13) принимает вид

$$f(x,t) = \int_0^{+\infty} \sum_\alpha \nu^{-|\lambda|}\, d\nu \int_{\widetilde{D}_{n+1}} Q_0^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) f(x+y, t+\tau)\, T_\alpha((y,\tau) : \nu^\lambda)\, dy\, d\tau.$$

Пусть вектор V^α является решением параболического уравнения

$$\mathcal{L}_0\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) V^\alpha(x,t) = T_\alpha f(x,t),$$

где

$$T_\alpha f(x,t) = \int_0^{+\infty} \nu^{-|\lambda|}\, d\nu \int_{\widetilde{D}_{n+1}} f(x+y, t+\tau)\, T_\alpha((y,\tau) : \nu^\lambda)\, dy\, d\tau.$$

Легко проверить, что функция

$$\nu(x,t) = \sum_{\alpha} \mathcal{L}_0^{\alpha} \left(\widehat{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}} \right) V^{\alpha}(x,t)$$

удовлетворяет системе $\mathcal{L}_0 \nu = f$. Рассмотрим теперь следующую задачу :

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_0 \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right) w(x,t) = 0, \\ &\mathcal{B}_0 \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right) w(x,t) \Big|_{x_n=0} = \varphi(x,t), \end{aligned} \tag{8}$$

где $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n_T)$. Задача (8) имеет решение вида

$$w(x,t) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int_{-\infty}^{t} G(x'-y', x_n, y_n, t-\tau)\, \varphi(y',\tau)\, d\tau,$$

где $G_{jq}(x'-y', x_n, t-\tau) = F^{-1}\widetilde{G}_{jq}$ и

$$\widetilde{G}_{jq} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{m} \sum_{\alpha} \int_{\gamma+} \frac{L^{\alpha}_{ki}(i\xi, i\tau, p)\, N^{\alpha}_{kq}(\xi,\tau)\, e^{i\tau x_n}}{M^{+}(\xi,p,\tau)}\, d\tau,$$

$N^{\alpha}_{kq}(\xi,\tau)$ суть полиномы относительно τ, обладающие свойством

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{m} \sum_{\alpha} \int_{\gamma+} \frac{\alpha^{\alpha}_{sk}(\xi,\tau,p)\, N^{\alpha}_{kq}(\xi,\tau,p)}{M^{+}(\xi,p,\tau)}\, d\tau = \delta_{s,q}, \quad s,q = 1,\dots,r,$$

а α^{α}_{sk} – элементы матрицы $\mathcal{B}_0\, \hat{\mathcal{L}}^{\alpha}$. Разделив α^{α}_{sk} на $M^{+}(\xi,\tau,p)$ и разложив остатки α^{α}_{sk} по степеням τ, получаем

$$\widetilde{\alpha}^{\alpha}_{sk}(\xi,p,\tau) = \sum_{t=1}^{r} \alpha^{t\,\alpha}_{sk}(\xi,p)\, \tau^{t-1}.$$

Из условия независимости следует, что матрица $\alpha^{t\,\alpha}_{sk}$ имеет правую обратную с элементами $\alpha^{ks}_{\alpha\,t}$. Следовательно

$$N^{\alpha}_{kq}(\xi,\tau,p) = \sum_{s=1}^{r} \alpha^{kq}_{\alpha\,t}(\xi,p)\, M^{+}_{r-t}(\xi,\tau,p),$$

где $M^{+}_{r-t}(\xi,\tau,p) = \sum_{s=0}^{r-t} \alpha_s(\xi,p)\, \tau^{t-s}$, $\alpha_s(\xi,p)$ – коэффициенты матрицы M^{+} в разложении по степеням τ.

Используя аргументы работы [1], можно проверить, что $w(x,t)$ является решением (8). Следовательно, $u(x,t) = v(x,t) + G(\varphi - \mathcal{B}\nu|_{x_n=0})$ удовлетворяет (5).

Теперь покажем существование правого регуляризатора. Пусть при каждом $\lambda \in (0,1)$ в области Ω задано разбиение единицы $\sum_k \varphi_k^{(\lambda)}(x) = 1$. Предположим, что $\varphi_k^{(\lambda)} \in C^\infty(\Omega)$ и функции $\eta_k^{(\lambda)}(x) \in C^\infty(\Omega)$ такие, что $\eta_k^{(\lambda)}(x)\,\varphi_k^{(\lambda)}(x) = \varphi_k^{(\lambda)}(x)$, $\operatorname{supp}\eta_k^{(\lambda)}(x) \subset \Omega_k^{(\lambda)}$, $\bigcup \Omega_k^{(\lambda)} = \Omega$, $\operatorname{diam}\Omega_k^{(\lambda)} \leq c\,\lambda$. Пусть $T_k^{(\lambda)}$ – отображения, введённые при построении левого обратчого (см. [3]). Множество номеров $\Omega_k^{(\lambda)}$, обладающих свойством $S \cap \partial\Omega_k^{(\lambda)} = S_k^{(\lambda)} \neq \emptyset$, обозначим через $\mathcal{N}$, а остальные множества через $\mathcal{M}$.

Пусть $f \in C^\infty(Q_T)$ удовлетворяет (6) и $\Phi_q \in C^{l-\sigma_q}(\Gamma_T)$, $f_k = f\,\eta_k^{(\lambda)}$, $\Phi_k = \Phi\,\eta_k^{(\lambda)}$ при $k \in \mathcal{M}$, тогда $\Phi_k = 0$. При $k \in \mathcal{M}$ определим вектор

$$w_k(x,t) = \sum_\alpha \hat{\mathcal{L}}^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) V_k^\alpha(x,t),$$

где $V_k^\alpha(x,t)$ – решение уравнения

$$L_0\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) V_k^\alpha(x,t) = g_k^\alpha(x,t)\,\eta_k^{(\lambda)}(x),$$

$$g_k^\alpha(x,t) = \int_0^\infty \nu^{-|\lambda|}\,d\nu \int_{V_\infty(l)} f_k(x+y, t+\tau)\,T_\alpha((y,\tau):\nu^\lambda)\,dy\,d\tau.$$

Так как $\operatorname{supp} T_\alpha \subset V_h(l)$ и при достаточно малых λ функции f_k могут быть гладко продолжены на бесконечный рог, то интегрирование можно проводить по $V_\infty(l)$.

Легко показать, что

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) w(x,t) = \sum_\alpha \mathcal{R}^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\left[L\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) - L_0\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\right] V_k^\alpha(x,t) +$$
$$+ \sum_\alpha \eta_k^{(\lambda)}\left[\mathcal{R}^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) - I_m\,Q_0^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\right] g_k^\alpha +$$
$$+ \sum_\alpha \eta_k^{(\lambda)}\left[\mathcal{R}^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) - I_m\,Q_0^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\right] g_k^\alpha + f_k(x,t),$$

где $\lfloor\mathcal{R}^\alpha, \eta_k^{(\lambda)}\rfloor g_k^\alpha = \mathcal{R}^\alpha(\eta_k^{(\lambda)} g_k^\alpha) - \eta_k^{(\lambda)}\mathcal{R}^\alpha g_k^\alpha$, that is $\varphi_k^{(\lambda)}\lfloor\mathcal{R}^\alpha, \eta_k^{(\lambda)}\rfloor g_k^\alpha = 0$.

При $k \in \mathcal{N}$ определим вектор $\nu^k(z,t)$ как решение задачи

$$\mathcal{L}_0\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t}\right) \nu^k(z,t) = 0,$$
$$\mathcal{B}_0\left(\xi^k, 0, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t}\right) \nu^k(z,t)\Big|_{z_n=0} = \varphi^k(z',t),$$

где

$$\varphi^k(z',t) = T_k^{(\lambda)} \circ \left[\Phi_k(x,t) - \eta_k^{(\lambda)}(x)\,\mathcal{B}\left(x, t, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t}\right) W_k(x,t)\Big|_{s_k^\lambda}\right].$$

Положим $w_k'(x,t) = (T_k^\lambda)^{-1} \circ \nu^k(z,t)$. Далее, пусть

$$R_k(h\,\eta_m^{(\lambda)}) = \begin{cases} w_k(x,t), & k \in \mathcal{M}, \\ w_k'(x,t) + w_k(x,t), & k \in \mathcal{N}. \end{cases}$$

Следовательно, имеем

$$R\,h = \sum_k \varphi_k^{(\lambda)}\, R_k(h\,\Psi_k^{(\lambda)}).$$

При помощи рассуждений как и для обычных параболических краевых задач (см. [1]), получим $A\,R\,h = h + T\,h$. Выбирая λ достаточно малым, можно добиться того, что

$$\|T\,h\|_{H_l}^{Q_T} \leq \frac{1}{2}\,\|h\|_{H_l}^{Q_T}.$$

Доказательство завершено.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Солонников, "О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида", Труды Мат. инст-та АН СССР, том 83, стр. 1 — 183, 1965.
2. В. А. Солонников, "Исследование переопределённых эллиптических краевых задач в дробных пространствах К. К. Головкина", Труды Мат. инст-та АН СССР, том 127, стр. 93 — 114, 1975.
3. А. Г. Хачатрян, "Переопределённые параболические краевые задачи", Зап. Науч. сем. ЛОМИ АН СССР, том 69, стр. 240 — 272, 1977.
4. О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, Интегральные Представления Функций и Теоремы Вложения, Москва, Наука, 1975.
5. П. И. Дудников, С. Н. Самборский, "Линейные переопределённые системы уравнений с частными производными, граничные и начально-граничные задачи для них", Итоги науки и техники, ВИНИТИ, Сов. проблемы математики, том 65, стр. 5 - 94, 1995.

13 марта 2001

Ереванский государственный университет