ГРУППА ЛОГАРИФМОВ МОДУЛЕЙ ОБРАТИМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Б. Т. Батикян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 36, № 3, 2001

Пусть A – равномерная алгебра непрерывных функций на компактном пространстве X и пусть A^{-1} – мультипликативная топологическая группа обратимых элементов алгебры A. В теории коммутативных банаховых алгебр ряд результатов характеризует алгебру A при некоторых предположениях на множество

$$\log|A^{-1}| = \{\log|f| : f \in A^{-1}\}$$

логарифмов модулей обратимых элементов A, и на пространство $\operatorname{Re} A = \{\operatorname{Re} f : f \in A\}$ вещественных частей элементов A. В частности, получены условия, при которых A совпадает с алгеброй $C(X)$, обеспечивающие наличие аналитической структуры в спектре алгебры A (см., например, [1], [2] и [3], стр. 157).

В настоящей статье изучаются алгебраические свойства множества $\log|A^{-1}|$. Ясно, что $\log|A^{-1}|$ образует аддитивную группу в $C_{\mathbb{R}}(X)$, на которую группа A^{-1} отображается при эпиморфизме $\sigma : f \longrightarrow \log|f|$. Хорошо известно, что множество $e^A = \{e^f : f \in A\}$ экспонент алгебры A являясь связной компонентой единицы в A^{-1}, образует открыто-замкнутую подгруппу группы A^{-1}. Образом $\sigma(e^A)$ подгруппы экспонент является пространство $\operatorname{Re} A$.

Покажем, что некоторые свойства фактор-группы $\log|A^{-1}|/\operatorname{Re} A$ определяются разбиением Шилова компакта X на максимальные множества слабой антисимметрии. Напомним, что подмножество $F \subset X$ называется множеством слабой антисимметрии алгебры A, если любая вещественная функция из A постоянна на F. Совокупность $\mathrm{K}(A)$ всех максимальных по включению множеств слабой антисимметрии образует замкнутое разбиение компакта X. Если $\mathrm{K}(A) = \{X\}$, то алгебра A называется антисимметричной. Если $\mathbf{K}(A)$ содержит только одноточечные множества, то $A = C(X)$. По теореме Шилова [4] всякая непрерывная функция на X, совпадающая на каждом максимальном множестве слабой антисимметрии с некоторой функцией из A, принадлежит A.

Фактор-пространство Y компакта X по разбиению $\mathbf{K}(A)$ всегда хаусдорфово и, значит, компактно. Из теоремы Шилова следует, что образ мономорфизма $\pi^* : C(Y) \to C(X)$, двойственного к фактор-отображению $\pi : X \to Y$, содержится в A. Через $S(A)$ обозначим спектр (пространство максимальных идеалов) алгебры A, а через $\widehat{A}$ – изоморфный образ гельфандовского представления алгебры A в $C(S(A))$. Согласно известной теореме Аренса-Ройдена (см. [3], стр. 125) группа $H^1(S(A), \mathbf{Z})$ одномерных целочисленных когомологий компакта $S(A)$ изоморфна фактор-группе A^{-1}/e^A. Вместе с тем, если алгебра A антисимметрична, то фактор-группа $\log|A^{-1}|/\operatorname{Re} A$ также изоморфна группе $H^1(S(A), \mathbf{Z})$ ([3], стр. 125).

Следующая теорема распространяет последний результат на произвольные, не обязательно антисимметричные, алгебры.

Теорема 1. **Пусть A является равномерной алгеброй на компакте X, и Y – фактор-пространство компакта X по разбиению $\mathbf{K}(A)$. Тогда группа $H^1(Y, \mathbf{Z})$ вкладывается в $H^1(S(A), \mathbf{Z})$, а фактор-группы $H^1(S(A), \mathbf{Z})/H^1(Y, \mathbf{Z})$ и $\log|A^{-1}|/\operatorname{Re} A$ изоморфны.**

Доказательство : Докажем существование точной последовательности

$$0 \to H^1(Y, \mathbf{Z}) \to H^1(S(A), \mathbf{Z}) \to \log|A^{-1}|/\operatorname{Re} A \to 0. \tag{1}$$

Обозначим через N и N_1 ядра эпиморфизмов $\sigma : A^{-1} \to \log|A^{-1}|$ и $\sigma : e^A \to \operatorname{Re} A$, соответственно. Всякая функция из N имеет единичный модуль и, будучи обратимым элементом алебры A, обязана быть постоянной на каждом максимальном множестве слабой антисимметрии. Таким образом, можно предположить, что $N \subset C(Y)^{-1}$ и $N_1 \subset e^{C(Y)}$. Так как любая положительная обратимая функция логарифмируема, то $Ne^{C(Y)} = C(Y)^{-1}$, и по теореме Э. Нётер об изоморфизмах получаем

$$N/N_1 = N/(N \cap e^{C(Y)}) \cong Ne^{C(Y)}/e^{C(Y)} = C(Y)^{-1}/e^{C(Y)}.$$

Это означает, что отображение $N/N_1 \to C(Y)^{-1}/e^{C(Y)}$, вызванное эпиморфизмом σ, является изоморфизмом. Таким образом, имеем следующую коммутативную диаграмму :

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r] \arrow[d] & e^A \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d] & \operatorname{Re} A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & A^{-1} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d] & \log|A^{-1}| \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C(Y)^{-1}/e^{C(Y)} \arrow[r, "\pi^*"] \arrow[d] & A^{-1}/e^A \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d] & \log|A^{-1}|/\operatorname{Re} A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

где все столбцы и первые две строки точны. По 3×3-лемме (см. [5], стр. 21) третья строка также точна. По теореме Аренса-Ройдена имеем $C(Y)^{-1}/e^{C(Y)} \cong H^1(Y, \mathbf{Z})$ и $A^{-1}/e^A \cong H^1(S(A), \mathbf{Z})$, откуда следует точность (1). Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Поскольку $\log|A^{-1}|/\operatorname{Re} A$ является группой без кручения, из Теоремы 1 следует, что $H^1(Y, \mathbf{Z})$ есть сервантная подгруппа группы $H^1(S(A), \mathbf{Z})$ (см. [5], стр. 136).

В следующей теореме содержатся условия, при которых группы $\operatorname{Re} A$ и $\log|A^{-1}|$ совпадают. Для любого замкнутого $E \subset X$ обозначим через $\widehat{E}$ спектр равномерной алгебры $\overline{A|E}$. Компакт $\widehat{E}$ содержится в $S(A)$ и называется A-выпуклой оболочкой E.

Теорема 2. *Пусть A – равномерная алгебра на X. Если A-выпуклая оболочка $\widehat{F}$ любого компакта $F \in \mathrm{K}(A)$ связана и $H^1(\widehat{F}, \mathbf{Z}) = 0$, то $\log|A^{-1}| = \operatorname{Re} A$.*

Доказательство : Совокупность $\{\widehat{F} : F \in \mathrm{K}(A)\}$ совпадает с разбиением $\mathrm{K}(\widehat{A})$ спектра $S(A)$ на максимальные множества слабой антисимметрии гельфандовской алгебры $\widehat{A}$ (см. [6]). Пусть $\widehat{Y}$ – фактор-пространство $S(A)$ по разбиению $\mathrm{K}(\widehat{A})$, и пусть $\widehat{\pi} : S(A) \to \widehat{Y}$ – соответствующее фактор-отображение. Согласно условиям теоремы, для любого $y \in \widehat{Y}$ имеем $H^0(\widehat{\pi}^{-1}(y), \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$ и $H^1(\widehat{\pi}^{-1}(y), \mathbf{Z}) = 0$. Тогда по теореме Виеториса-Бегля (см. [7], стр. 445), естественный гомоморфизм $H^1(\widehat{Y}, \mathbf{Z}) \to H^1(S(A), \mathbf{Z})$, соответствующий отображению

$\widehat{\pi}$, является изоморфизмом. Применяя Теорему 1 к равномерной алгебре $\widehat{A}$, получим требуемый результат. Теорема 2 доказана.

Предположим теперь, что компакт X метризуем, а A и B – равномерные алгебры на X такие, что

$$\log|A^{-1}| = \log|B^{-1}|. \tag{2}$$

Если в дополнение к (2), одна из этих алгебр содержит другую, то $A = B$ (см. [8], [9]). Следующая теорема показывает, что из (2) следует совпадение некоторых топологических характеристик спектров A и B.

Напомним, что абелева группа H называется делимой (или инъективной), если $nH = H$ для любого натурального n.

Теорема 3. Пусть A и B – равномерные алгебры на метризуемом компакте X, и пусть Y – фактор-пространство X по разбиению $\mathrm{K}(A)$. Если (2) выполняется и $H^1(\widehat{Y}, \mathrm{Z})$ – делимая группа, то группы когомологий $H^1(S(A), \mathrm{Z})$ и $H^1(S(B), \mathrm{Z})$ изоморфны.

Доказательство : Сначала отметим, что если A – произвольная равномерная алгебра на метризуемом компакте, то согласно лемме из [9] всякий $\mathbb{R}$-модуль, содержащийся в $\log|A^{-1}|$, есть подмодуль $\mathrm{Re}\,A$. В силу этой леммы, равенство (2) влечёт совпадение пространств $\mathrm{Re}\,A$ и $\mathrm{Re}\,B$. Тогда (см. [6]) $\mathrm{K}(A) = \mathrm{K}(B)$. Следовательно, эти разбиения определяют одно и то же фактор-пространство Y. Согласно Теореме 1 получим точные последовательности

$$0 \to H^1(Y, \mathrm{Z}) \to H^1(S(A), \mathrm{Z}) \to G \to 0 \tag{3}$$

и

$$0 \to H^1(Y, \mathrm{Z}) \to H^1(S(B), \mathrm{Z}) \to G \to 0, \tag{4}$$

где $G = \log|A^{-1}|/\mathrm{Re}\,A = \log|B^{-1}|/\mathrm{Re}\,B$.

Поскольку группа $H^1(Y, \mathrm{Z})$ делима, она выделяется прямым слагаемым в группах $H^1(S(A), \mathrm{Z})$ и $H^1(S(B), \mathrm{Z}$ (см. [5], стр. 128). Отсюда и из (3) и (4) следует, что группы $H^1(S(A), \mathrm{Z})$ и $H^1(S(B), \mathrm{Z})$ изоморфны. Теорема 3 доказана.

Следствие. Пусть A и B - равномерные алгебры на метризуемом компакте X. Если алгебра A антисимметрична и имеет место (2), то $H^1(S(A), \mathrm{Z}) \cong H^1(S(B), \mathrm{Z})$.

Замечание 2. Условие (2) в Теореме 3 нельзя заменить более слабым условием $\operatorname{Re} A = \operatorname{Re} B$. Работа [10] содержит примеры антисимметричных алгебр A и B на несвязном объединении двух окружностей таких, что $\operatorname{Re} A = \operatorname{Re} B$ и $H^1(S(A), \mathbf{Z}) = 0$, но $H^1(S(B), \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$. Предположение о метризуемости X также существенно (см. [11]).

Замечание 3. Точные последовательности (3) и (4) показывают, что доказательство Теоремы 3 влечёт следующее утверждение : если компакт X метризуем и имеет место (2), то группы $H^1(S(A), \mathbf{Z})$ и $H^1(S(B), \mathbf{Z})$ являются расширениями группы $H^1(Y, \mathbf{Z})$ с помощью группы G. С этой точки зрения изоморфность групп $H^1(S(A), \mathbf{Z})$ и $H^1(S(B), \mathbf{Z})$ означает, что они являются эквивалентными расширениями и определяют один и тот же элемент группы $Ext(G, H^1(Y, \mathbf{Z}))$.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Bernard, "Espace des parties reélles des éléments d'une algèbre de Banach de fonctions", J. Funct. Anal., vol. 10, pp. 387 — 409, 1972.
2. Е. А. Горин, " Об исследованиях Г. Е. Шилова по теории коммутативных банаховых алгебр и их дальнейшем развитии", УМН, том 33, № 4, стр. 169 — 188, 1978.
3. Т. Гамелин, Равномерные Алгебры, М., Мир, 1973.
4. Г. Е. Шилов, "О кольцах функций с равномерной сходимостью", УМЖ, том 3, № 4, стр. 404 — 411, 1951.
5. Л. Фукс, Бесконечные Абелевы Группы, том 1, М., Мир, 1974.
6. Л. Е. Аренсон, "Алгебры с равномерной сходимостью и восстанавливающие покрытия", Мат. сб., том 79, № 2, стр. 217 — 249, 1969.
7. Э. Спеньер, Алгебраическая Топология, М., Мир, 1971.
8. Б. Т. Батикян, Е. А. Горин, "Об ультраразделяющих алгебрах непрерывных функций", Вестник МГУ, сер. Математика, № 2, стр. 15 — 20, 1976.
9. Б. Т. Батикян, "О логарифмах модулей обратимых элементов банаховых алгебр", Мат. Заметки, том 23, № 3, стр. 373 — 377, 1978.
10. J. P. Rosay, "Sur les algébres uniformes ayant mêmes parties reélles", C. R. Acad. Sci., serie A, vol. 277, pp. 839 — 840, 1973.
11. Е. А. Горин, "Модули обратимых элементов нормированной алгебры", Вестник МГУ, сер. Математика, № 5, стр. 35 — 39, 1965.

17 марта 2001

Институт математики НАН Армении
E-mail : bag@instmath.sci.am