

L_2 -ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ПОЛИНОМИАЛЬНО-ПЕРИОДИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ ПО СДВИГАМ

А. Б. Нерсисян, А. В. Погосян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 36, № 3, 2001

В статье рассматривается задача аппроксимации по сдвигам фиксированной периодической функции в структуре L_2 -сходимости. Получены точные формулы для главных членов соответствующих асимптотических разложений приближённой ошибки. В статье предлагаются быстрые алгоритмы, которые особенно эффективны в случае аппроксимации сплайнов чётного порядка и “модифицированных сплайнов” нечётного порядка.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема аппроксимации по сдвигам фиксированной периодической функции изучалась в многочисленных работах (см., например, [1] – [3]). В [4], [5] был разработан общий подход к аппроксимациям, основанный на минимизации определённых функционалов. В частности, были получены оценки для периодических биортогональных разложений и интерполяций по сдвигам на конечном отрезке.

В случае, когда аппроксимируемая функция, определённая на конечном отрезке, не обладает гладким периодическим продолжением, возникает проблема ускорения сходимости. При тригонометрической аппроксимации (соответствующей сдвигам ядра Дирихле) ускорение было достигнуто методом, восходящим к А. Н. Крылову, основанным на применении полиномов Бернулли (см. [6] – [8] и пункт 1.3). В настоящей статье рассматривается L_2 -сходимость полиномиально-периодических аппроксимаций достаточно гладких на $[-1, 1]$ функций по сдвигам фиксированных периодических функций и получены точные формулы для главного члена соответствующих асимптотических разложений. Изучаемый подход

Исследования, представленные в данной работе, выполнены при поддержке гранта NFSAT- CRDF # CS 037-01 (BGP 7420).

особенно эффективен для аппроксимации по сдвигам сплайнов чётного порядка и "модифицированных сплайнов" нечётного порядка.

§1. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Наше исследование основано на работах [4] – [8]. В этом параграфе приводятся некоторые результаты из этих работ, используемые в дальнейшем.

1.1. Результаты из [4] и [5]. Рассмотрим в пространстве $L_2(-1, 1)$ с нормой $\|\cdot\|$ ортонормальную систему $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi n x}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Пусть Z – множество целых чисел, и последовательность $\{\theta_n\}$, $\theta_n \in \mathbb{C}$ такая, что ряды

$$\omega_n^2 = \sum_{s \in Z} |\theta_{n+s(2N+1)}|^2 \neq 0, \quad N \geq 1, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \pm N$$

сходятся. Тогда конечная система

$$\{\varphi_n\} = \{\varphi_n^N\}, \quad \varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}} \sum_{s \in Z} \theta_{n+s(2N+1)} e^{i\pi(n+s(2N+1))x}, \quad (1)$$

$n = 0, \pm 1, \dots, \pm N$, будет ортонормальной в $L_2(-1, 1)$. Рассмотрим соответствующее ортогональное разложение функции $f \in L_2(-1, 1)$:

$$S_N(f) = \sum_{n=-N}^N (f, \varphi_n) \varphi_n. \quad (2)$$

Лемма 1. Пусть $f \in L_2(-1, 1)$ и $f_n = \frac{1}{2}(f, e^{i\pi n x})$ – её коэффициенты Фурье. Имеет место следующая оценка

$$\|f - S_N(f)\| \leq 4 \left(\sum_{|n| > N} |f_n|^2 \right)^{1/2} + 2 \left(\sum_{n=-N}^N |f_n|^2 \left(1 - \frac{|\theta_n|^2}{\omega_n^2} \right) \right)^{1/2}. \quad (3)$$

Следующий результат является непосредственным следствием оценки (3).

Теорема А. Условие

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|\theta_n|^2}{\omega_n^2} = 1, \quad n = \text{const}$$

является необходимым и достаточным для $\|\cdot\|$ -сходимости $S_N(f) \rightarrow f$ ($N \rightarrow \infty$) для любого $f \in L_2(-1, 1)$.

Оценка (3) характеризует быстроту сходимости $S_N(f) \rightarrow f$ в терминах коэффициентов Фурье $\{f_n\}$. Разложение (2) можно представить по сдвигам периодической функции $b(x) = \sum_{n \in Z} \theta_n e^{i\pi n x}$. Следующие формулы эффективно реализуются применением компьютерного интегрирования и алгоритма быстрого преобразования Фурье (FFT):

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\omega_n(2N+1)} \sum_{s=-N}^N e^{\frac{2i\pi n s}{2N+1}} b\left(x - \frac{2s}{2N+1}\right),$$

$$S_N(f) = \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{s=-N}^N c_s b\left(x - \frac{2s}{2N+1}\right),$$

где

$$c_s = \sum_{r=-N}^N \mu_{s-r} \tilde{f}_r, \quad \mu_k = \sum_{n=-N}^N e^{\frac{2i\pi nk}{2N+1}} / \omega_n^2, \quad \tilde{f}_s = \int_{-1}^1 f(t) b\left(t - \frac{2s}{2N+1}\right) dt.$$

Пусть теперь последовательность $\{\theta_n\} = \left\{ \theta\left(\frac{n}{2N+1}\right) \right\}$ представляется преобразованием Фурье

$$\theta(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} \rho(x) dx. \quad (4)$$

Предполагая, что $\rho(x) \in L_2 \cap C_{loc}$ и $\sum_k |\rho((2N+1)x + 2k)| < \infty$, функцию $b(x)$ можно представить посредством сдвигов функции $\rho(x)$:

$$b(x) = (N+1/2) \sum_{r \in \mathbb{Z}} \rho((2N+1)x - 2r).$$

1.2. Полиномы Бернулли и аппроксимация функций одной переменной ([6] – [8]). Положим $A_k = f^{(k)}(1) - f^{(k)}(-1)$, $f_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) e^{-i\pi n x} dx$. Общеизвестен следующий результат.

Лемма 2. Для любой функции $f(x) \in C^{q+1}[-1, 1]$, $q \geq -1$

$$f_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \sum_{k=0}^q \frac{A_k}{(i\pi n)^{k+1}} + \frac{1}{2(i\pi n)^{q+1}} \int_{-1}^1 f^{(q+1)}(t) e^{-i\pi n t} dt, \quad n \neq 0. \quad (5)$$

Используя Лемму 2, функцию f можно представить в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^q A_k B_k(x) + F(x), \quad (6)$$

где $F(x)$ – некоторая 2-периодическая и q раз дифференцируемая функция.

Полиномы Бернулли $B_k(x)$ имеют коэффициенты Фурье вида

$$B_{k,n} = \begin{cases} \frac{(-1)^{n+1}}{2(i\pi n)^{k+1}}, & \text{при } n \neq 0 \\ 0, & \text{при } n = 0, \end{cases}$$

и определяются рекуррентным соотношением

$$B_0(x) = \frac{x}{2}, \quad B_k(x) = \int B_{k-1}(x) dx, \quad x \in [-1, 1], \quad k = 1, 2, \dots,$$

где константа интегрирования вычисляется из условия

$$\int_{-1}^1 B_k(t) dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Из (6) следует, что коэффициенты Фурье функции $F(x)$ определяются по формулам

$$F_n = f_n - \sum_{k=0}^q A_k B_{k,n}, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \pm N. \quad (7)$$

Следующая формула называется полиномиально-периодической аппроксимацией :

$$f(x) \simeq f_N(x) = \sum_{n=-N}^N F_n e^{i\pi n x} + \sum_{k=0}^q A_k B_k(x). \quad (8)$$

Если $f \in C^{q+2}[-1, 1]$, то $F_n = O(n^{-q-2})$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому можно рассчитывать на быструю сходимость f_N к f при $N \rightarrow \infty$. Для определения чисел A_k ($k = 0, \dots, q$) воспользуемся соотношением (7). Заменяя (7) следующей системой с неособой матрицей Вандермонда

$$f_{n_i} = \sum_{k=0}^q \bar{A}_k B_{k,n_i}, \quad s = 1, \dots, q+1, \quad n_i \neq n_j \quad (i \neq j), \quad (9)$$

$$\text{const } N \leq |n_s| \leq N, \quad N \rightarrow \infty,$$

получим ошибку порядка $O(N^{-q-2})$, $N \rightarrow \infty$. Решение системы (9) изучено в [7], [8], где показано, что ошибка $|A_k - \bar{A}_k|$ имеет порядок $O(N^{-q+k-1})$ при $N \rightarrow \infty$.

1.3. Полиномиально-периодическая аппроксимация. В применении к разложению по сдвигам некоторой функции этот метод можно описать следующим образом. Пусть $f \in C^{q+1}[-1, 1]$. Рассмотрим следующую аппроксимационную формулу, соответствующую разложению (6), и называемую полиномиально-периодической аппроксимацией :

$$S_N^q(f) = S_N \left(f(x) - \sum_{k=0}^q A_k B_k(x) \right) + \sum_{k=0}^q A_k B_k(x). \quad (10)$$

Отметим, что при следующем выборе

$$\theta_n = \begin{cases} 1, & \text{при } |n| \leq N, \\ 0, & \text{при } |n| > N, \end{cases} \quad (11)$$

(10) совпадает с (8). В этом случае $\{\varphi_n(x)\}_{n=-N}^N$ совпадает с урезанной системой Фурье $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi n x} \right\}_{n=-N}^N$ (см. Пример 1 ниже).

Нас интересуют асимптотические L_2 -оценки ошибки $S_N^q(f) - f$ при $N \rightarrow \infty$. При этом, наш анализ не касается вопроса приближённого определения скачков $\{A_k\}$ посредством (f, φ_n) в общем случае (см. 1.1).

§2. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ L_2 -ОЦЕНКИ

Пусть $f(x)$ – функция, определённая на $[a, b]$, и пусть $\omega(\delta, f)$ – её модуль непрерывности

$$\omega(\delta, f) = \sup |f(x_1) - f(x_2)|, \quad x_1, x_2 \in [a, b], \quad |x_1 - x_2| \leq \delta.$$

Пусть $\theta_n = \theta\left(\frac{n}{2N+1}\right)$. Ясно, что $\omega_n = \omega\left(\frac{n}{2N+1}\right)$. Предполагая, что $\omega(x) \neq 0$ при $x \in [-1/2, 1/2]$, положим

$$\Phi(x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^s \overline{\theta(x+s)}}{(x+s)^{q+2}}, \quad \tilde{\Phi}(x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}}' \frac{(-1)^s \overline{\theta(x+s)}}{(x+s)^{q+2}}, \quad \Psi(x) = 1 - \frac{|\theta(x)|^2}{\omega^2(x)}.$$

Здесь и ниже $\sum'$ означает сумму, не содержащую слагаемое, соответствующее $s = 0$. Отметим, что $\Psi(x) \geq 0$. Из (1) и (2)

$$\begin{aligned} \|f - S_N(f)\|^2 &= 2 \sum_{n=-N}^N \sum_{r \in \mathbb{Z}} \left| f_{n+r(2N+1)} - \frac{\theta_{n+r(2N+1)}}{\omega_n^2} \sum_{s \in \mathbb{Z}} \overline{\theta_{n+s(2N+1)}} f_{n+s(2N+1)} \right|^2 = \\ &= 2 \sum_{n=-N}^N \sum_{r \in \mathbb{Z}} |f_{n+r(2N+1)}|^2 - 2 \sum_{n=-N}^N \frac{1}{\omega_n^2} \left| \sum_{r \in \mathbb{Z}} \overline{\theta_{n+r(2N+1)}} f_{n+r(2N+1)} \right|^2. \end{aligned} \quad (12)$$

После несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} \|f - S_N(f)\|^2 &= 2 \sum_{n=-N}^N \Psi\left(\frac{n}{2N+1}\right) |f_n|^2 - \\ &- 2 \sum_{n=-N}^N \frac{1}{\omega_n^2} \left| \sum_{r \in \mathbb{Z}}' \overline{\theta_{n+r(2N+1)}} f_{n+r(2N+1)} \right|^2 + 2 \sum_{|n| > N} |f_n|^2 - \\ &- 4 \operatorname{Re} \left(\sum_{n=-N}^N \left(\frac{\theta_n \overline{f_n}}{\omega_n^2} \sum_{r \in \mathbb{Z}}' \overline{\theta_{n+r(2N+1)}} f_{n+r(2N+1)} \right) \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Теорема 1. Пусть выполнены следующие три условия :

1°. Функция $\theta(x)$ кусочно-непрерывна, и ряд $\sum_{s \in \mathbb{Z}} |\theta(x+s)|^2 \neq 0$ равномерно сходится на $[-1/2, 1/2]$,

2°. Существует монотонная на каждом из отрезков $(-1/2, 0)$ и $(0, 1/2)$ и интегрируемая на $(-1/2, 1/2)$ функция $\tau(x) \geq 0$ такая, что $\Psi(x)x^{-2q-4} \leq \tau(x)$,

3°. $f \in C^{q+2}[-1, 1]$, $q \geq -1$.

Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{2q+3} \|f - S_N^q(f)\|^2 =$$

$$= \frac{|A_{q+1}|^2}{\pi^{2q+4}} \left(\frac{2^{2q+3}}{2q+3} + \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{1}{x^{2q+4}} - \frac{|\Phi(x)|^2}{\omega^2(x)} \right) dx \right). \quad (14)$$

Доказательство : Воспользуемся неравенством

$$\|f - S_N^q(f)\| = \|F - S_N(F)\| \leq \|F_1 - S_N(F_1)\| + \|F_2 - S_N(F_2)\|, \quad (15)$$

где (см. Лемму 2), $n \neq 0$

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x), \quad F_1(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}}' F_{1,n} e^{i\pi n x}, \quad F_{1,n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \frac{A_{q+1}}{(i\pi n)^{q+2}},$$

$$F_2(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}}' F_{2,n} e^{i\pi n x}, \quad F_{2,n} = \frac{1}{2(i\pi n)^{q+2}} \int_{-1}^1 f^{(q+2)}(x) e^{-i\pi n x} dx, \quad n \neq 0.$$

Хорошо известно (см., например, [10]), что $|f_n| \leq \text{const } \omega(|n|^{-1}, f)$, и поэтому

$$|F_{2,n}| \leq \text{const } \omega(|n|^{-1}, f^{(q+2)}) |n|^{-q-2}. \quad (16)$$

Согласно Лемме 1 ($t_n = \frac{n}{2N+1}$)

$$\|F_2 - S_N(F_2)\| \leq 4 \left(\sum_{|n| > N} |F_{2,n}|^2 \right)^{1/2} + 2 \left(\sum_{n=-N}^N' |F_{2,n}|^2 \Psi(t_n) \right)^{1/2}. \quad (17)$$

Первое слагаемое в правой части (17) оценим с помощью (16) :

$$\sum_{|n| > N} |F_{2,n}|^2 \leq \text{const} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\omega^2(n^{-1}, f^{(q+2)})}{n^{2q+4}} \leq \frac{\text{const } \omega^2(N^{-1}, f^{(q+2)})}{(2N+1)^{2q+3}}. \quad (18)$$

Для второго слагаемого имеем ($[x]$ – целая часть x)

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N' |F_{2,n}|^2 \Psi(t_n) &\leq \frac{\text{const}}{(2N+1)^{2q+4}} \sum_{n=-[\sqrt{N}]}^{[\sqrt{N}]}' \frac{\Psi(t_n)}{t_n^{2q+4}} \omega^2(|n|^{-1}, f^{(q+2)}) + \\ &+ \frac{\text{const}}{(2N+1)^{2q+4}} \sum_{[\sqrt{N}] < |n| \leq N} \frac{\Psi(t_n)}{t_n^{2q+4}} \omega^2(|n|^{-1}, f^{(q+2)}). \end{aligned} \quad (19)$$

Ясно, что из утверждений Теоремы 1 вытекает интегрируемость $\Psi(x)x^{-2q-4}$ на $[-1/2, 1/2]$ и существование предела (см. [11])

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N' \Psi(t_n) t_n^{-2q-4} = \int_{-1/2}^{1/2} \Psi(x) x^{-2q-4} dx.$$

Следовательно, второе слагаемое в (19) оценивается выражением

$$\text{const} \frac{\omega^2([\sqrt{N}]^{-1}, f^{(q+2)})}{(2N+1)^{2q+3}} \int_{-1/2}^{1/2} \Psi(x) x^{-2q-4} dx.$$

Соответственно первое слагаемое мажорируется выражением

$$\frac{\text{const}}{(2N+1)^{2q+3}} \int_{-\frac{[\sqrt{N}]}{2N+1}}^{\frac{[\sqrt{N}]}{2N+1}} \tau(x) dx,$$

которое стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$, поскольку $\tau(x)$ интегрируема. Таким образом, $\lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{2q+3} \|F_2 - S_N(F_2)\|^2 = 0$, и следовательно

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{2q+3} \|f - S_N^q(f)\|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{2q+3} \|F_1 - S_N(F_1)\|^2.$$

С другой стороны, в силу (12)

$$\begin{aligned} (2N+1)^{2q+3} \|F_1 - S_N(F_1)\|^2 &= \frac{|A_{q+1}|^2}{2\pi^{2q+4}} \frac{1}{(2N+1)} \left[\sum_{n=-N}^N \sum_{r \neq 0} (t_n + r)^{-2q-4} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=-N}^N \left(t_n^{-2q-4} - \frac{|\Phi(t_n)|^2}{\omega^2(t_n)} \right) \right] + O((2N+1)^{-1}), \quad N \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (20)$$

Покажем теперь, что

$$x^{-2q-4} - \frac{|\Phi(x)|^2}{\omega^2(x)} \in L_1(-1/2, 1/2),$$

и что при $N \rightarrow \infty$ суммы в (20) можно заменить соответствующими интегралами. Имеем

$$x^{-2q-4} - \frac{|\Phi(x)|^2}{\omega^2(x)} = \frac{\Psi(x)}{x^{2q+4}} - \frac{|\tilde{\Phi}(x)|^2}{\omega^2(x)} - 2 \operatorname{Re} \left(\frac{\theta(x) \overline{\tilde{\Phi}(x)}}{x^{q+2} \omega^2(x)} \right). \quad (21)$$

Согласно условиям 1° и 2° функции $|\tilde{\Phi}(x)|^2 \omega^{-2}(x)$ и $\Psi(x) x^{-2q-4}$ интегрируемы на отрезке $[-1/2, 1/2]$. Третье слагаемое в правой части (21) мажорируется выражением

$$\text{const} \frac{|\tilde{\Phi}(x) x^{-q-2}|}{\omega^2(x)} \leq \text{const} (\Psi(x) x^{-2q-4})^{1/2} \leq \text{const} (\tau(x))^{1/2}.$$

Для завершения доказательства остаётся учесть, что из условия 2° следует интегрируемость функции $\sqrt{\tau(x)}$ на $[-1/2, 1/2]$. Теорема 1 доказана.

Для заданного α ($0 < \alpha \leq 1$) обозначим через Λ_α класс функций f , удовлетворяющих оценке $\omega(\delta, f) \leq C\delta^\alpha$, где C — постоянная, не зависящая от δ . Известно (см., например, [10]), что $|f_n| \leq \text{const} |n|^{-\alpha}$.

Теорема 2. Пусть выполнены следующие условия :

1°. Функция $\theta(x)$ кусочно-непрерывна, и ряд $\sum_{s \in \mathbb{Z}} |\theta(x+s)|^2 \neq 0$ равномерно сходится на $[-1/2, 1/2]$,

2°. $\lim_{x \rightarrow 0} x^{-2q-3} \Psi(x) = B$,

3°. Существует монотонная на каждом из отрезков $(-1/2, 0)$ и $(0, 1/2)$ и интегрируемая на $(-1/2, 1/2)$ функция $\Omega(x) \geq 0$ такая, что

$$|(\Psi(x)x^{-2q-3} - B)x^{-1}| \leq \Omega(x), \quad (22)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} (\ln \epsilon)^{-1} \int_{\epsilon < |x| \leq 1/2} \Omega(x) dx = 0, \quad (23)$$

4°. $f^{(q+2)} \in \Lambda_\alpha$, $q \geq -1$.

Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(2N+1)^{2q+3}}{\ln(2N+1)} \|f - S_N^q(f)\|^2 = \frac{|A_{q+1}|^2}{\pi^{2q+4}} B. \quad (24)$$

Доказательство : Воспользуемся неравенством (15), в котором второе слагаемое в правой части оценим с помощью Леммы 1. Первое слагаемое в правой части (3), где $f_n = F_{2,n}$, оценивается как и при доказательстве Теоремы 1 (см. (18)). Второе слагаемое в (3) при $f_n = F_{2,n}$ оценим следующим образом :

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N |F_{2,n}|^2 \Psi(t_n) &\leq \frac{\text{const}}{(2N+1)^{2q+3}} \sum_{n=-N}^N |n|^{2q+3} |F_{2,n}|^2 \leq \\ &\leq \frac{\text{const}}{(2N+1)^{2q+3}} \sum_{n=-N}^N \frac{\omega^2(|n|^{-1}, f^{(q+2)})}{|n|} \leq \frac{\text{const}}{(2N+1)^{2q+3}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|n|^{1+2\alpha}}. \end{aligned}$$

Таким образом

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(2N+1)^{2q+3}}{\ln(2N+1)} \|F_2 - S_N(F_2)\|^2 = 0,$$

и следовательно

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(2N+1)^{2q+3}}{\ln(2N+1)} \|f - S_N^q(f)\|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(2N+1)^{2q+3}}{\ln(2N+1)} \|F_1 - S_N(F_1)\|^2.$$

Согласно (13)

$$\begin{aligned} \|F_1 - S_N(F_1)\|^2 &= 2 \sum_{n=-N}^N \Psi(t_n) |F_{1,n}|^2 - \\ &- 2 \sum_{n=-N}^N \frac{1}{\omega_n^2} \left| \sum_{r \in \mathbb{Z}} \overline{\theta_{n+r(2N+1)}} F_{1,n+r(2N+1)} \right|^2 + 2 \sum_{|n| > N} |F_{1,n}|^2 - \\ &- 4 \operatorname{Re} \left(\sum_{n=-N}^N \left(\frac{\theta_n \overline{F_{1,n}}}{\omega_n^2} \sum_{r \in \mathbb{Z}} \overline{\theta_{n+r(2N+1)}} F_{1,n+r(2N+1)} \right) \right). \quad (25) \end{aligned}$$

Второе слагаемое в (25) мажорируется третьим слагаемым, поскольку

$$\text{const} \sum_{n=-N}^N \Psi(t_n) \sum_{r \in \mathbb{Z}} |F_{1,n+r(2N+1)}|^2 \leq \text{const} \sum_{|n| > N} |F_{1,n}|^2.$$

Легко показать, что третье слагаемое в (25) имеет порядок $O((2N+1)^{-2q-3})$ при $N \rightarrow \infty$. Мажоранта четвёртого слагаемого в (25) оценивается выражением

$$\begin{aligned} & \text{const} \sum_{n=-N}^N |F_{1,n}| \Psi^{1/2}(t_n) \left(\sum_{r \in \mathbb{Z}} |F_{1,n+r(2N+1)}|^2 \right)^{1/2} \leq \\ & \leq \frac{\text{const}}{(2N+1)^{q+1.5}} \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{r \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(n+r(2N+1))^{2q+4}} \right)^{1/2} \leq \\ & \leq \frac{\text{const}}{(2N+1)^{2q+3.5}} \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{\text{const}}{(2N+1)^{2q+3}}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(2N+1)^{2q+3}}{\ln(2N+1)} \|f - S_N^q(f)\|^2 &= 2 \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(2N+1)^{2q+3}}{\ln(2N+1)} \sum_{n=-N}^N |F_{1,n}|^2 \Psi(t_n) = \\ &= \frac{|A_{q+1}|^2}{\pi^{2q+4}} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \ln(2N+1)} \sum_{n=-N}^N \frac{\Psi(t_n)}{t_n^{2q+3}} \frac{1}{n}. \end{aligned} \quad (26)$$

Для завершения доказательства остаётся показать, что последний предел в правой части (26) равен B . Имеем

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2 \ln(2N+1)} \sum_{n=-N}^N \frac{\Psi(t_n)}{t_n^{2q+3}} \frac{1}{n} - B \right) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \ln(2N+1)} \sum_{n=1}^N \left(\frac{\Psi(t_n)}{t_n^{2q+3}} - B \right) \frac{1}{n} + \\ &+ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \ln(2N+1)} \sum_{n=1}^N \left(\frac{\Psi(-t_n)}{t_n^{2q+3}} - B \right) \frac{1}{n}. \end{aligned} \quad (27)$$

Сначала покажем, что первый предел в правой части (27) равен нулю. Подставляя $\lambda(x) = \Psi(x)x^{-2q-3} - B$, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 \ln(2N+1)} \sum_{n=1}^N \frac{\lambda(t_n)}{n} &= \frac{1}{2 \ln(2N+1)} \sum_{n=1}^{[\sqrt{N}]} \frac{\lambda(t_n)}{n} + \frac{1}{2 \ln(2N+1)} \sum_{n=[\sqrt{N}]+1}^N \frac{\lambda(t_n)}{n} \leq \\ &\leq \text{const} \omega \left(\frac{[\sqrt{N}]}{2N+1}, \lambda \right) + \frac{1}{2(2N+1) \ln(2N+1)} \sum_{n=[\sqrt{N}]+1}^N \Omega(t_n) \leq \\ &\leq \text{const} \omega \left(\frac{[\sqrt{N}]}{2N+1}, \lambda \right) + \frac{\text{const}}{\ln(2N+1)} \int_{\frac{[\sqrt{N}]}{2N+1}}^{1/2} \Omega(x) dx. \end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что второй предел в правой части (27) также равен нулю. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Пусть выполнены следующие три условия :

1°. Функция $\theta(x)$ кусочно-непрерывна и ряд $\sum_{s \in \mathbb{Z}} |\theta(x+s)|^2 \neq 0$ равномерно сходится на $[-1/2, 1/2]$,

2°. Для некоторого $\alpha < q + 1.5$ существует предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \Psi(x) x^{-2\alpha} = C, \quad (28)$$

3°. $f \in C^{q+2}[-1, 1]$, $q \geq -1$.

Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{2\alpha} \|f - S_N^q(f)\|^2 = \frac{C}{2\pi^{2q+2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}}' \frac{1}{n^{2q+2-2\alpha}} \left| \int_{-1}^1 f^{(q+1)}(x) e^{-i\pi n x} dx \right|^2. \quad (29)$$

Доказательство : Используя (13), получаем

$$\begin{aligned} \|f - S_N^q(f)\|^2 &= \|F - S_N(F)\|^2 = 2 \sum_{n=-N}^N' \Psi(t_n) |F_n|^2 - \\ &- 2 \sum_{n=-N}^N \frac{1}{\omega_n^2} \left| \sum_{r \in \mathbb{Z}}' \overline{\theta_{n+r(2N+1)}} F_{n+r(2N+1)} \right|^2 + 2 \sum_{|n| > N} |F_n|^2 - \\ &- 4 \operatorname{Re} \left(\sum_{n=-N}^N' \left(\frac{\theta_n \overline{F_n}}{\omega_n^2} \sum_{r \in \mathbb{Z}}' \overline{\theta_{n+r(2N+1)}} F_{n+r(2N+1)} \right) \right), \end{aligned} \quad (30)$$

где (см. Лемму 2)

$$F_n = \frac{\varepsilon_n}{2(i\pi n)^{q+1}}, \quad \varepsilon_n = \int_{-1}^1 f^{(q+1)}(x) e^{-i\pi n x} dx, \quad n \neq 0.$$

Как и при доказательстве Теоремы 2, можно показать, что второе и третье слагаемые в правой части (30) имеют порядок $O((2N+1)^{-2q-3})$ при $N \rightarrow \infty$. Последнее слагаемое в правой части (30) мажорируется следующим выражением :

$$\frac{\operatorname{const}}{(2N+1)^{q+2}} \sum_{n=-N}^N' |F_n| \Psi^{1/2}(t_n) \leq \frac{\operatorname{const}}{(2N+1)^{q+1.5+\alpha}}.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{2\alpha} \|f - S_N^q(f)\|^2 &= 2 \lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{2\alpha} \sum_{n=-N}^N' |F_n|^2 \Psi(t_n) = \\ &= \frac{1}{2\pi^{2q+2}} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N' \Psi(t_n) t_n^{-2\alpha} \frac{|\varepsilon_n|^2}{n^{2q+3-2\alpha}}. \end{aligned}$$

Покажем теперь, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \Psi(t_n) t_n^{-2\alpha} \frac{|\varepsilon_n|^2}{n^{2q+2-2\alpha}} = C \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|\varepsilon_n|^2}{n^{2q+2-2\alpha}}.$$

Обозначив $\tilde{\Psi}(x) = x^{-2\alpha} \Psi(x)$, $\tilde{\Psi}(0) = C$, и учитывая непрерывность функции $\tilde{\Psi}(x)$ в точке $x = 0$, получим

$$\begin{aligned} & \left| C \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|\varepsilon_n|^2}{n^{2q+2-2\alpha}} - \sum_{n=-N}^N \tilde{\Psi}(t_n) \frac{|\varepsilon_n|^2}{n^{2q+2-2\alpha}} \right| = \\ & = \left| \sum_{n=-N}^N (\tilde{\Psi}(0) - \tilde{\Psi}(t_n)) \frac{|\varepsilon_n|^2}{n^{2q+2-2\alpha}} + C \sum_{|n| > N} \frac{|\varepsilon_n|^2}{n^{2q+2-2\alpha}} \right| \leq \\ & \leq \sum_{n=-[\sqrt{N}]}^{[\sqrt{N}]} \frac{\omega\left(\frac{n}{2N+1}, \tilde{\Psi}\right)}{n^{2q+4-2\alpha}} + \text{const} \sum_{|n| > [\sqrt{N}]} n^{-2q-4+2\alpha} \leq \\ & \leq \omega\left(\frac{[\sqrt{N}]}{2N+1}, \tilde{\Psi}\right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^{-2q-4+2\alpha} + \text{const} \sum_{|n| > [\sqrt{N}]} n^{-2q-4+2\alpha}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что согласно условию $f \in C^{(q+2)}$ имеем $|\varepsilon_n| \leq \text{const} |n|^{-1}$. Остаётся отметить, что ряд $\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^{-2q-4+2\alpha}$ сходится при $\alpha < q + 1.5$.

Теорема 3 доказана.

§3. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ И ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом параграфе мы рассмотрим примеры, иллюстрирующие результаты §2.

Пример 1. Рассмотрим простейший случай (см. также (11)), который соответствует классической системе Фурье :

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } |x| \leq 1/2, \\ 0, & \text{при } |x| > 1/2. \end{cases}$$

Все условия Теоремы 1 выполнены, и на отрезке $[-1/2, 1/2]$ имеем $\Phi(x) = x^{-q-2}$.

Согласно формуле (14)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{q+1.5} \|f - S_N^q(f)\| = |A_{q+1}| a(q), \quad (31)$$

где

$$a(q) = \frac{2^{q+1}}{\pi^{q+2}} \sqrt{\frac{2}{2q+3}}.$$

Таким образом, мы имеем точную асимптотическую оценку L_2 -ошибки для метода Фурье-Бернулли (см. [7], [8]). В Таблице 1 приведены численные значения $a(q)$ для различных значений q .

q	-1	0	1	2	3	4	5
$a(q)$	0.4501	0.1654	0.0816	0.0439	0.0246	0.0142	0.0083

Таблица 1. Численные значения константы $a(q)$ для различных значений q .

Пример 2. Рассмотрим следующий нестандартный случай :

$$\theta(x) = \begin{cases} \cos^s \frac{\pi}{2} x, & \text{при } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{при } |x| > 1, \end{cases} \quad s > 0.$$

Имеем

$$\omega^2(x) = \cos^{2s} \frac{\pi}{2} x + \sin^{2s} \frac{\pi}{2} x, \quad \Psi(x) = \frac{\sin^{2s} \frac{\pi}{2} x}{\cos^{2s} \frac{\pi}{2} x + \sin^{2s} \frac{\pi}{2} x}. \quad (32)$$

Очевидно, что условие 1° Теоремы 1 выполняется. Имеем

$$\Psi(x)x^{-2q-4} \leq \text{const } x^{2s-2q-4}. \quad (33)$$

Функция в правой части неравенства (33) монотонна на каждом из интервалов $(-1/2, 0)$, $(0, 1/2)$ и интегрируема на интервале $(-1/2, 1/2)$ для $s > q + 1.5$. Следовательно, условие 2° Теоремы 1 выполнено. Кроме того, при $0 < x < 1/2$ имеем

$$\Phi(x) = \theta(x)x^{-q-2} - \theta(x-1)(x-1)^{-q-2} = x^{-q-2} \cos^s \frac{\pi}{2} x - (x-1)^{-q-2} \sin^s \frac{\pi}{2} x,$$

а при $-1/2 < x < 0$ имеем

$$\Phi(x) = \theta(x)x^{-q-2} - \theta(x+1)(x+1)^{-q-2} = x^{-q-2} \cos^s \frac{\pi}{2} x - (x+1)^{-q-2} \sin^s \frac{\pi}{2} x.$$

Согласно Теореме 1

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{q+1.5} \|f - S_N^q(f)\| = |A_{q+1}| b_1(q, s), \quad (34)$$

где

$$b_1^2(q, s) = \frac{1}{\pi^{2q+4}} \left(\frac{2^{2q+3}}{2q+3} + \int_0^{1/2} \left(x^{-2q-4} - \frac{|\Phi(x)|^2}{\omega^2(x)} \right) dx \right).$$

Численные значения постоянной $b_1(q, s)$ для некоторых значений s и q представлены на Рис. 1. Сравнение с Таблицей 1 показывает, что при чётных q (нижние диаграммы, Рис. 1) значения константы $b_1(q, s)$ всегда больше, чем соответствующее значение $a(q)$, и если s возрастает, то $b_1(q, s)$ приближается к $a(q)$. Таким

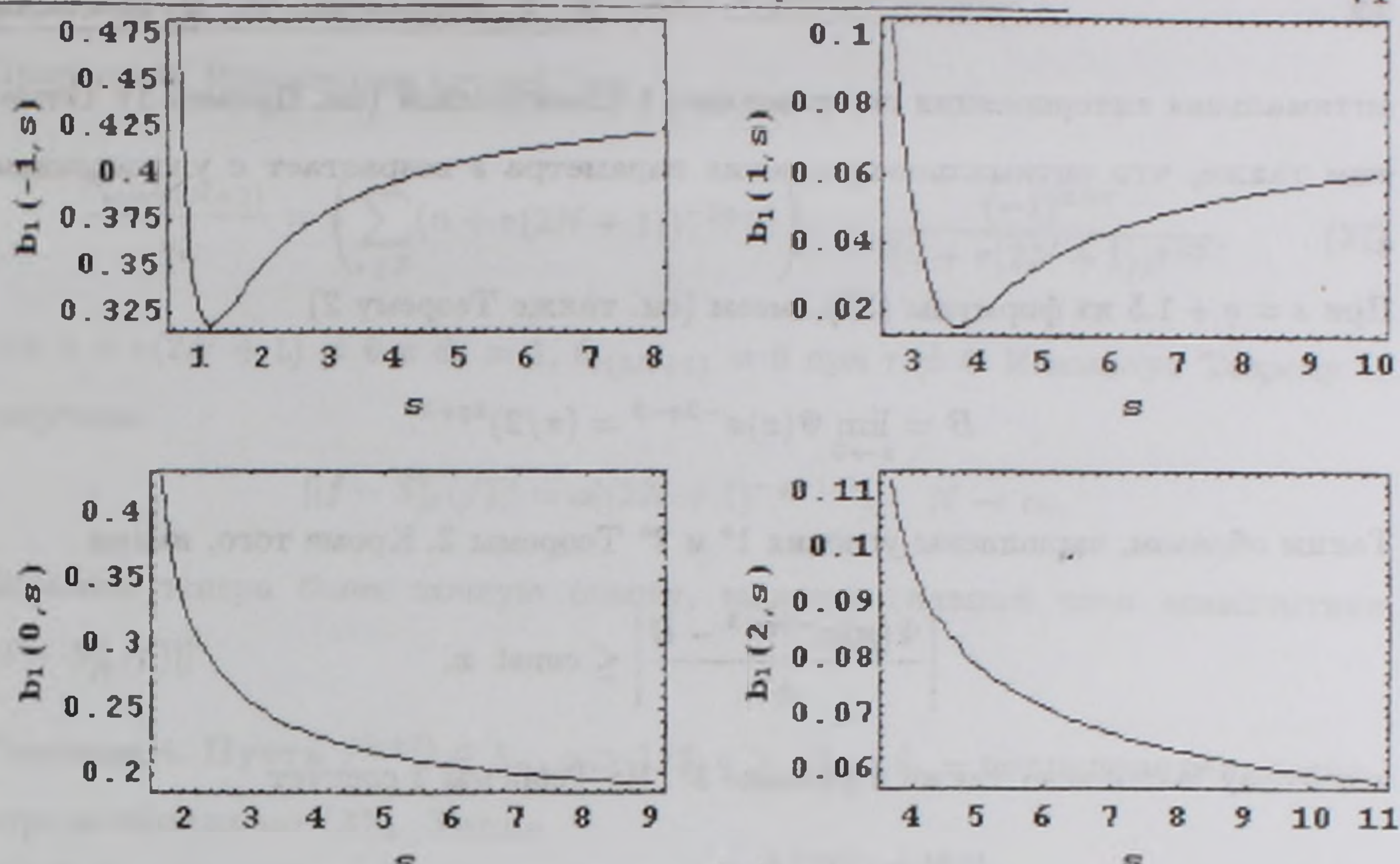


Рис. 1. Численные значения константы $b_1(q, s)$ для различных значений s и q .

образом, для чётных q классический выбор функции $\theta(x)$, как в Примере 1, приводит к более эффективной интерполяции по сравнению с Примером 2.

Для нечётных же q (верхние диаграммы, Рис. 1) ситуация совершенно иная. Значения константы $b_1(q, s)$ сначала быстро убывают (если s возрастает) до некоторого минимального значения, а потом начинают возрастать до значений константы $a(q)$. Сравнение с Таблицей 1 показывает, что начиная с некоторых значений s , $b_1(q, s)$ становится меньше, чем $a(q)$. Такое поведение $b_1(q, s)$ с резко выраженным минимумом даёт возможность выбора оптимального значения параметра s при фиксированных нечётных значениях q . Оптимальные значения параметра s найдены посредством пакета программ MATHEMATICA 3.0. Соответствующие результаты приведены в Таблице 2.

q	s	$b_1(q, s)$	$\frac{a(q)}{b_1(q, s)}$
-1	1.17501	0.318887	1.4
1	3.68683	0.015286	5.3
3	6.26922	0.001880	13.1
5	8.83021	0.000234	35.4

Таблица 2. Оптимальные значения параметра s и константы $b_1(q, s)$.

Последний столбец в Таблице 2 показывает, насколько эффективней становится

оптимальная интерполяция по сравнению с классической (см. Пример 1). Отметим также, что оптимальное значение параметра s возрастает с увеличением q .

При $s = q + 1.5$ из формулы (32) имеем (см. также Теорему 2)

$$B = \lim_{x \rightarrow 0} \Psi(x) x^{-2q-3} = (\pi/2)^{2q+3}.$$

Таким образом, выполнены условия 1° и 2° Теоремы 2. Кроме того, имеем

$$\left| \frac{\Psi(x) x^{-2q-3} - B}{x} \right| \leq \text{const } x,$$

и поэтому выполнено также и условие 3°. Из Теоремы 2 следует

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(2N+1)^{q+1.5}}{\sqrt{\ln(2N+1)}} \|f - S_N^q(f)\| = |A_{q+1}| b_2(q), \quad (35)$$

где

$$b_2(q) = \frac{1}{2^{q+1}} \sqrt{\frac{1}{2\pi}}.$$

В Таблице 3 приведены численные значения $b_2(q)$ для некоторых значений q .

q	-1	0	1	2	3	4	5
$b_2(q)$	0.3989	0.1995	0.0997	0.0499	0.0249	0.0125	0.0062

Таблица 3. Численные значения $b_2(q)$ для $-1 \leq q \leq 5$.

Наконец, при $s < q + 1.5$ имеем (см. также Теорему 3)

$$C = \lim_{x \rightarrow 0} \Psi(x) x^{-2s} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2s}.$$

Поэтому при $\alpha = s$ выполнены все условия Теоремы 3, откуда следует

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{2s} \|f - S_N^q(f)\|^2 = \\ & = \pi^{2s-2q-2} 2^{-2s-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}}' \frac{1}{n^{2q+2-2s}} \left| \int_{-1}^1 f^{(q+1)}(x) e^{-i\pi n x} dx \right|^2. \end{aligned} \quad (36)$$

Таким образом, для нечётных значений q и оптимального выбора параметра s получим более строгий алгоритм по сравнению с классической тригонометрической аппроксимацией (Пример 1).

Пример 3. Рассмотрим случай, где

$$\frac{\theta_{n+r(2N+1)}}{\omega_n^2} = \left(\sum_{r \in \mathbb{Z}} (n + r(2N+1))^{-2q-4} \right)^{-1/2} \frac{(-1)^{n+r}}{(n + r(2N+1))^{q+2}}, \quad (37)$$

при $n + r(2N+1) \neq 0$ и $\theta_0 = 1$, $\theta_{r(2N+1)} = 0$ при $r \neq 0$. Используя Теорему 1, получаем

$$\|f - S_N^q(f)\| = o((2N+1)^{-q-1.5}), \quad N \rightarrow \infty.$$

Докажем теперь более точную оценку, выделяя главный член асимптотики $\|f - S_N^q(f)\|$.

Теорема 4. Пусть $f^{(q+2)} \in \Lambda_\alpha$, $\alpha > 1/2$, $q \geq -1$, и θ_n — последовательность, определённая по (37). Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{2q+4} \|f - S_N^q(f)\|^2 = \\ = \frac{\zeta(2q+4)}{\pi^{2q+4}} \left(|A_{q+1}|^2 + 2 \int_{-1}^1 |f^{(q+2)}(z)|^2 dz - \left| \int_{-1}^1 f^{(q+2)}(z) dz \right|^2 \right), \end{aligned} \quad (38)$$

где $\zeta(s) = \sum_{r=1}^{\infty} r^{-s}$ — функция Римана.

Доказательство : Легко проверить, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{2q+4} \|F_1 - S_N(F_1)\|^2 = \frac{|A_{q+1}|^2 \zeta(2q+4)}{\pi^{2q+4}}.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{2q+4} \|f - S_N^q(f)\|^2 = \\ = \lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{2q+4} \|F_2 - S_N(F_2)\|^2 + \frac{|A_{q+1}|^2 \zeta(2q+4)}{\pi^{2q+4}}. \end{aligned}$$

Воспользуемся формулой (13) при

$$f_n = F_{2,n} = \frac{\delta_n}{2(i\pi n)^{q+2}}, \quad \delta_n = \int_{-1}^1 f^{(q+2)}(x) e^{-i\pi n x} dx, \quad n \neq 0.$$

Как было показано при доказательстве Теоремы 2, второе слагаемое в правой части (13) при $f_n = F_{2,n}$ мажорируется третьим слагаемым, для которого, в свою очередь, имеем оценку

$$\sum_{|n| > N} |F_{2,n}|^2 \leq \text{const} \sum_{|n| > N} \frac{|\delta_n|^2}{n^{2q+4}} \leq \text{const} \sum_{|n| > N} n^{-2q-2\alpha-4} \leq \frac{\text{const}}{(2N+1)^{2q+3+2\alpha}}.$$

Последнее слагаемое в правой части (13) при $f_n = F_{2,n}$ мажорируется выражением

$$\begin{aligned} & \text{const} \sum_{n=-N}^N \left(\frac{|\delta_n|}{|n|^{q+2}} \Psi^{1/2}(t_n) \left(\sum_{r \in \mathbb{Z}}' \frac{|\delta_{n+r(2N+1)}|^2}{(n+r(2N+1))^{2q+4}} \right)^{1/2} \right) \leq \\ & \leq \frac{\text{const}}{(2N+1)^{q+2}} \sum_{n=-N}^N |n|^{-\alpha} \left(\sum_{r \in \mathbb{Z}}' (n+r(2N+1))^{-2q-4-2\alpha} \right)^{1/2} \leq \\ & \leq \frac{\text{const}}{(2N+1)^{2q+4+\alpha}} \sum_{n=1}^N n^{-\alpha} \leq \frac{\text{const}}{(2N+1)^{2q+3+2\alpha}}. \end{aligned}$$

Таким образом

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{2q+4} \|f - S_N^q(f)\|^2 = \\ & = \frac{1}{2\pi^{2q+4}} \lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{2q+4} \sum_{n=-N}^N \frac{\Psi(t_n)}{t_n^{2q+4}} |\delta_n|^2 + \frac{|A_{q+1}|^2 \zeta(2q+4)}{\pi^{2q+4}}. \end{aligned}$$

Остается доказать, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \frac{\Psi(t_n)}{t_n^{2q+4}} |\delta_n|^2 = 2\zeta(2q+4) \sum_{n \in \mathbb{Z}}' |\delta_n|^2. \quad (39)$$

Рассуждая как и при доказательстве Теоремы 3, получаем, что ряд в правой части (39) сходится, так как $|\delta_n|^2 \leq |n|^{-2\alpha}$, $\alpha > 1/2$. Поэтому имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{2q+4} \|f - S_N^q(f)\|^2 = \frac{\zeta(2q+4)}{\pi^{2q+4}} \sum_{n \in \mathbb{Z}}' |\delta_n|^2 + \frac{|A_{q+1}|^2 \zeta(2q+4)}{\pi^{2q+4}}.$$

Использование равенства Парсеваля завершает доказательство Теоремы 4.

Пример 4. Рассмотрим функцию

$$\theta(x) = \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x} \right)^m, \quad (40)$$

где $m \geq 1$ – целое. Это случай хорошо известных В-сплайнов, для которых $\text{supp}(\rho(x)) \in [-m, m]$. В этом случае имеем

$$\begin{aligned} \theta(x+s) &= \frac{(-1)^{sm} \sin^m \pi x}{\pi^m (x+s)^m}, \quad \omega^2(x) = \frac{\sin^{2m} \pi x}{\pi^{2m}} \sum_{s \in \mathbb{Z}} (x+s)^{-2m}, \\ \Psi(x) &= x^{2m} \sum_{s \in \mathbb{Z}}' (x+s)^{-2m} \left(1 + x^{2m} \sum_{s \in \mathbb{Z}}' (x+s)^{-2m} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (41)$$

Кроме того, имеем оценку $\Psi(x)x^{-2q-4} \leq \text{const } x^{2m-2q-4}$. Таким образом, при $m \geq q+2$ выполнены все условия Теоремы 1. После несложных преобразований из формулы (14) получим

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{q+1.5} \|f - S_N^q(f)\| = |A_{q+1}| c_1(q, m),$$

где $c_1^2(q, m) =$

$$= \pi^{-2q-4} \left(\frac{2^{2q+3}}{2q+3} + \int_0^{1/2} \left(x^{-2q-4} - \frac{(\sum_{s \in \mathbb{Z}} (-1)^{s(m+1)} (x+s)^{-m-q-2})^2}{\sum_{s \in \mathbb{Z}} (x+s)^{-2m}} \right) dx \right).$$

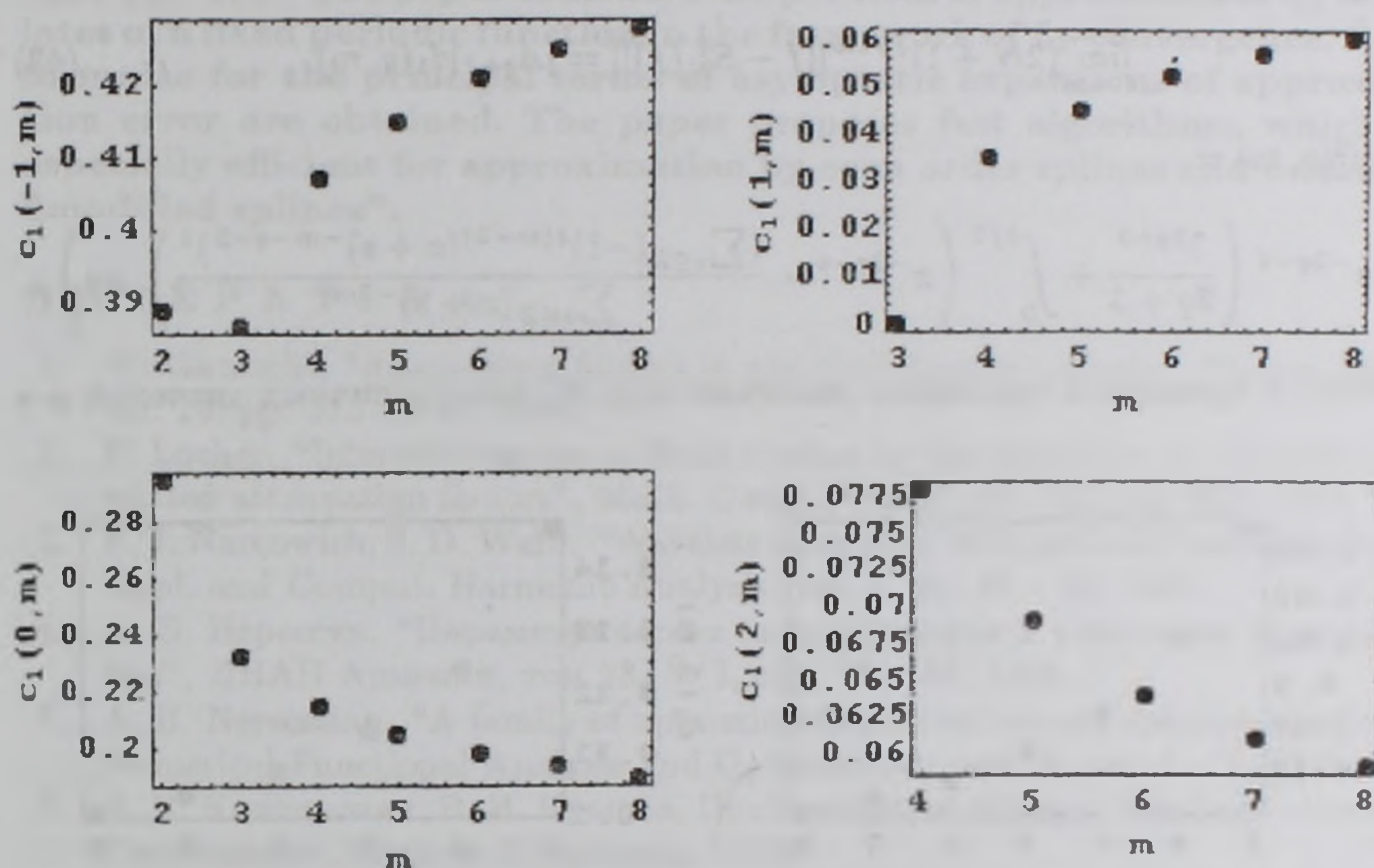


Рис. 2. Значения константы $c_1(q, m)$ для $-1 \leq q \leq 2$ и $2 \leq m \leq 8$.

Рисунки 1 и 2 почти идентичны. Как и в Примере 2, при чётных q (нижние диаграммы Рисунка 2) значения константы $c_1(q, m)$ всегда больше, чем соответствующее значение $a(q)$, и $c_1(q, m)$ аппроксимирует $a(q)$ при возрастании m . При нечётных q (верхние диаграммы Рисунка 2) $c_1(q, m)$ меньше, чем $a(q)$, и вновь аппроксимирует $a(q)$ при возрастании m .

Из формулы (41) вытекает, что (см. Теорему 3)

$$C = \lim_{x \rightarrow 0} \Psi(x)x^{-2m} = \sum'_{s \in \mathbb{Z}} s^{-2m} = 2\zeta(2m).$$

Поэтому при $m \leq q+1$ и $\alpha = m$ выполнены все условия Теоремы 3. Тогда из формулы (29) имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{2m} \|f - S_N^q(f)\|^2 = \frac{\zeta(2m)}{\pi^{2q+2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}}' \frac{1}{n^{2q+2-2m}} \left| \int_{-1}^1 f^{(q+2)}(x) e^{-i\pi n x} dx \right|^2.$$

Легко проверить, что функция (40) порождает последовательность, удовлетворяющую условию (37) для нечётных q . В этом случае утверждение Теоремы 4 имеет место и в случае Примера 4.

Пример 5. Рассмотрим функцию

$$\theta(x) = \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x} \right)^m \cos \pi x, \quad (42)$$

где $m \geq 1$ – целое. Очевидно, что в этом случае $\text{supp } \rho(x) \in [-m-1, m+1]$. При $m \geq q+2$ выполнены все условия Теоремы 1, и из формулы (14) получим

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{q+1.5} \|f - S_N^q(f)\| = |A_{q+1}| d_1(q, m), \quad (43)$$

где $d_1^2(q, m) =$

$$= \pi^{-2q-4} \left(\frac{2^{2q+3}}{2q+3} + \int_0^{1/2} \left(x^{-2q-4} - \frac{(\sum_{s \in \mathbb{Z}} (-1)^{s(m+2)} (x+s)^{-m-q-2})^2}{\sum_{s \in \mathbb{Z}} (x+s)^{-2m}} \right) dx \right).$$

На Рис. 3 приведены численные значения $d_1(q, m)$ для различных значений q и m .

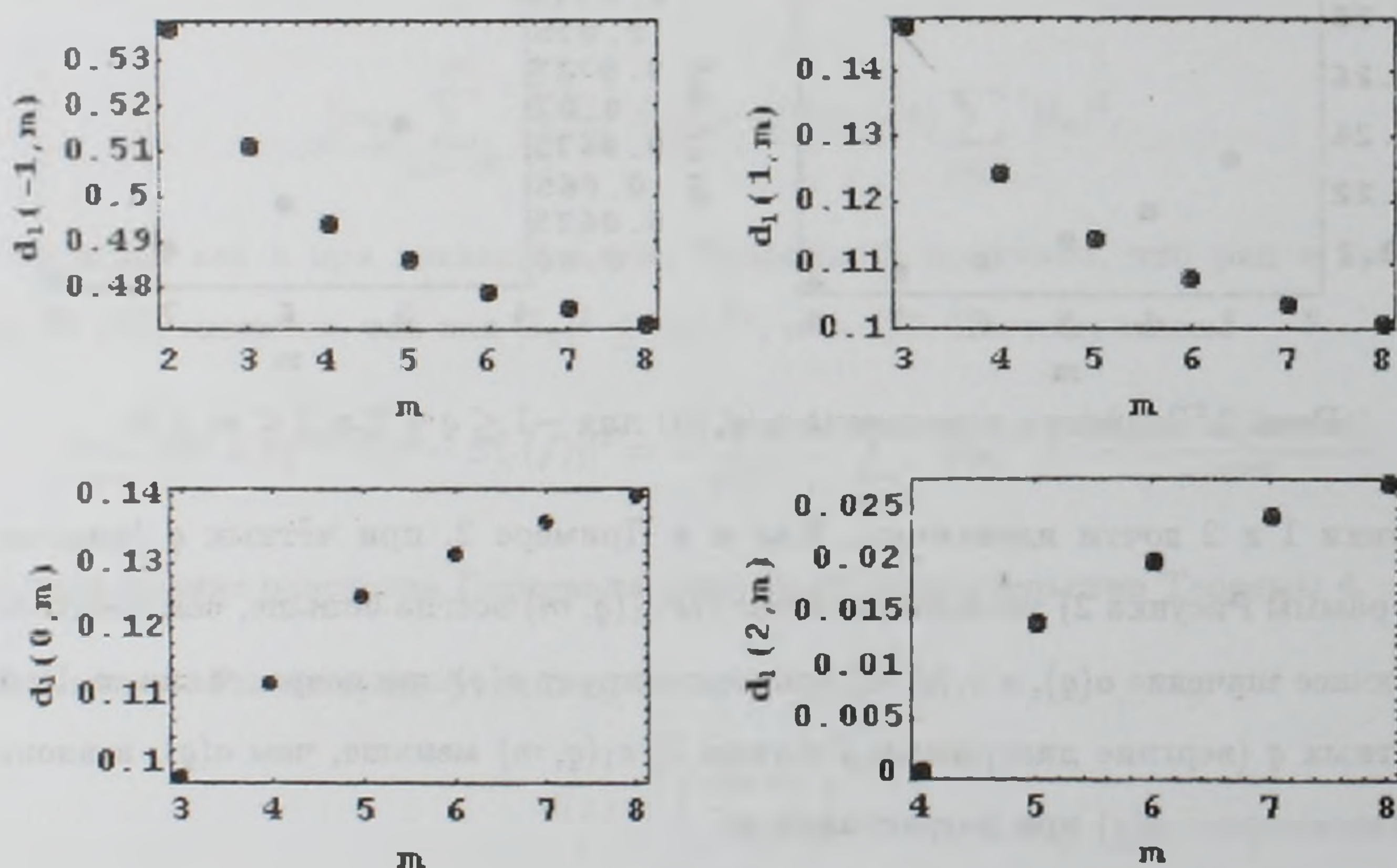


Рис. 3. Значения константы $d_1(q, m)$ для различных значений q и m .

Наконец, при $m < q+2$ выполнены все условия Теоремы 3, и из формулы (29) получим

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{2m} \|f - S_N^q(f)\|^2 = \frac{\zeta(2m)}{\pi^{2q+2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n^{2q+2-2m}} \left| \int_{-1}^1 f^{(q+2)}(x) e^{-i\pi n x} dx \right|^2. \quad (44)$$

Для чётных значений q условие (37) выполнено, и Теорему 4 можно использовать и для этого примера.

В действительности, при выборе сплайна как в Примере 4 (для нечётного $q \geq -1$), а также “модифицированного сплайна”, как в Примере 5 (для нечётного $q \geq 0$), приходим к быстрым алгоритмам повышенной точности, основанным на функциях с локальными носителями.

ABSTRACT. The paper considers the problem of approximation by translates of a fixed periodic function in the framework of L_2 -convergence. Exact formulae for the principal terms of asymptotic expansions of approximation error are obtained. The paper proposes fast algorithms, which are especially efficient for approximation by even order splines and odd order “modified splines”.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Gautschi, “Attenuation factors in practical Fourier analysis”, Numer. Math., vol. 18, pp. 373 – 400, 1972.
2. F. Locher, “Interpolation on uniform meshes by the translates of a function and related attenuation factors”, Math. Comp., vol. 37, no. 156, pp. 403 – 416, 1981.
3. F. J. Narcowich, J. D. Ward, “Wavelets associated with periodic basis functions”, Appl. and Comput. Harmonic Analysis, vol. 3, pp. 40 – 56, 1996.
4. А. Б. Нерсисян, “Параметрическая аппроксимация и некоторые её применения”, ДНАН Армении, том 98, № 1, стр. 23 – 30, 1998.
5. A. B. Nersessian, “A family of approximation formulas and some applications”, Numerical Functional Analysis and Optimization, vol. 21, no. 1 – 2, 2000.
6. А. В. Канторович, В. И. Крылов, Приближённые Методы Высшего Анализа, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1950.
7. K. S. Eckhoff, “Accurate reconstructions of functions of finite regularity from truncated Fourier series expansions”, Math. Comp., vol. 64, no. 210, pp. 671 – 690, 1995.
8. K. S. Eckhoff, C. E. Wasberg, “On the numerical approximation of derivatives by a modified Fourier collocation method”, Thesis of C. E. Wasberg, Department of Mathematics, University of Bergen, Norway, 1996.
9. S. Wolfram, The MATHEMATICA Book, Third Edition, Wolfram Media, Cambridge University Press, 1996.
10. А. Зигмунд, Тригонометрические Ряды, Мир, Москва, 1965.
11. Г. М. Фихтенгольд, Курс Дифференциального и Интегрального Исчисления, том 3, Наука, Москва, 1970.

16 октября 2000

Институт математики НАН Армении

E-mails : nerses@instmath.sci.am

arnak@instmath.sci.am