ОЦЕНКИ СНИЗУ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. Н. Маргарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 36, № 3, 2001

В статье рассматриваются гипоэллиптические операторы $P(D)$ с постоянными коэффициентами. Получены оценки снизу для функциональной размерности пространства решений дифференциального уравнения $P(D)\,u = 0$. Оценки определяются по поведению символа оператора $P(D)$ на бесконечности.

§1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] была определена функция $N(\varepsilon, F)$, зависящая от компакта F и $\varepsilon > 0$, равная минимальному числу замкнутых множеств с диаметрами, не превосходящими ε. покрывающих F. Через функцию $N(\varepsilon, F)$ в [1] определяется метрический порядок компакта F. Доказано, что для всех метрик компакта F, не меняющих его топологию, величина

$$k(F) = \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln N(\varepsilon, F)}{\ln(1/\varepsilon)}$$

равна размерности компакта F. В частности, $k(F)$ является топологическим инвариантом.

В работе [2] доказано, что для некоторых вполне ограниченных множеств F аналитических функций. функция $H(\varepsilon, F) = \ln N(\varepsilon, F)$ при $\varepsilon \to 0$ ведёт себя как $(\ln 1/\varepsilon)^s$. Для сравнения массивностей множеств A гладких функций естественно рассмотреть следующую числовую характеристику, называемую функциональной размерностью множества A :

$$\mathrm{df}A = \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln H(\varepsilon, A)}{\ln\ln(1/\varepsilon)}.$$

Исследования, представленные в данной работе, выполнены при поддержке гранта ИНТАС 99-01080.

Пусть E – локально выпуклое пространство, U – окрестность нуля в E и $A \subset E$ – некоторое множество. Для заданного $\varepsilon > 0$ множество B называется ε-сетью множества A относительно U, если $A \subset B + \varepsilon U$.

Для заданного множества $A \subset E$ обозначим через $N(A, \varepsilon U)$ наименьшее число элементов ε-сети множества A относительно U. Через $M(A, \varepsilon U)$ обозначим наибольшее число элементов $x_1, ..., x_m \in A$, для которых $x_i - x_j \notin \varepsilon U$ при $i \neq j$, $j = 1, ..., m$. В [2] доказано, что $M(A, 2\varepsilon U) \leq N(A, \varepsilon U)$.

Определение 1 (см. [2]). Для заданного линейного, локально выпуклого пространства E число

$$\mathrm{df} E = \sup_U \inf_V \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \frac{\ln H(V, \varepsilon U)}{\ln \ln(1/\varepsilon)},$$

где U и V пробегают все окрестности нуля в E, называется функциональной размерностью пространства E.

В работе [3] доказано, что если $P(D)$ – гипоэллиптический оператор с постоянными коэффициентами, то $\mathrm{df}N(P) < \infty$, где $N(P) = \{u;\ u \in C, P(D)\,u = 0\}$ и $\mathrm{df}N(P) = n$, если $P(D)$ – эллиптический оператор от n переменных. В [4] – [7] получены оценки сверху и снизу для функциональной размерности пространств решений некоторых классов гипоэллиптических уравнений. Как доказано в [8], $\mathrm{df}N(P) = n$ тогда и только тогда, когда $P(D)$ – эллиптический оператор от n переменных.

§2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Повсюду в этой статье мы используем следующие обозначения :

$\mathbb{R}^n$ = n-мерное действительное евклидово пространство точек $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$;

$\mathbb{C}^n$ = n-мерное комплексное евклидово пространство точек $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_n)$;

$\mathbb{R}^n_0 = \{\xi,\ \xi \in \mathbb{R}^n;\ \xi_1 ... \xi_n \neq 0\}$;

$\mathbb{E}^n$ = n-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, ..., x_n)$;

N^n = множество точек $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$, где ν_k – целые ;

N^n_+ = множество точек $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, где α_k – неотрицательные целые ;

$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} ... \xi_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} ... D_n^{\alpha_n}$, где либо $D_j = -i \cdot \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ $(i^2 = -1)$, либо $D_j = \dfrac{\partial}{\partial \xi_j}$, $j = 1, ..., n$;

$\xi^{(j)} = (\xi_1, ..., \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, ..., \xi_n)$, $j = 1, ..., n$;

$|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$; $\|\xi\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n \xi_j^2}$, $\alpha \in N^n_+$, $\xi \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$.

Пусть $P(D) = \sum\limits_{\alpha} \gamma_\alpha D^\alpha$ – дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, и $P(\xi) = \sum\limits_{\alpha} \gamma_\alpha \xi^\alpha$ – отвечающий ему полный символ, где сумма берётся по конечному набору $(P) = \{\alpha, \alpha \in N_+^n, \gamma_\alpha \neq 0\}$.

Определение 2. Минимальный выпуклый многогранник $\mathcal{N}$, содержащий множество $(P) \cup \{0\}$, называется характеристическим многогранником или многогранником Ньютона многочлена P.

Определение 3. Многогранник $\mathcal{N}$ называется вполне правильным, если компоненты внешних нормалей всех $(n-1)$-мерных некоординатных граней многогранника $\mathcal{N}$ положительны.

Для вполне правильного многогранника $\mathcal{N}$ через $\Lambda(\mathcal{N})$ обозначим множество всех нормалей $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ некоординатных граней многогранника $\mathcal{N}$, удовлетворяющих $\min_{1 \leq j \leq n} \lambda_j = 1$.

Известно, что для вполне правильного многогранника $\mathcal{N}$ множество $\Lambda(\mathcal{N})$ ограничено. Для многочлена P обозначим $D(P) = \{\zeta \in \mathbf{C}^n : P(\zeta) = 0\}$, $D_j(P) = \{(\xi_1, ..., \xi_{j-1}, \zeta_j, \xi_{j+1}, ..., \xi_n) \equiv \zeta,\ P(\zeta) = 0,\ \zeta^{(j)} \in \mathbb{R}^{n-1},\ \zeta_j \in \mathbf{C}^1\}$, $j = 1, ..., n$, $d_P(\xi) = \inf_{\zeta \in D(P)} ||\xi - \zeta||$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\rho_j(P, \xi) = \min_{\zeta \in D_j(P)} |\xi_j - \zeta_j|$, $j = 1, ..., n$. Будем использовать также следующее определение (см. [9], определение 4.1.1 и теорему 4.1.3).

Определение 4. Оператор P называется гипоэллиптическим, если выполняется одно из следующих условий :

a) $N(P) \subset \mathbf{C}^\infty$,

b) $d_P(\xi) \to \infty$ при $||\xi|| \to \infty$, $\xi \in \mathbb{R}^n$,

c) для любого $\alpha \in N_+^n$, $|\alpha| \neq 0$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\dfrac{D^\alpha P(\xi)}{P(\xi)} \to 0$ при $||\xi|| \to \infty$.

Известно, что характеристический многогранник гипоэллиптического оператора вполне правильный.

Лемма 1. Существует постоянная $C = C_{n,k} > 0$ такая, что для любого многочлена P от n переменных порядка не выше k относительно ξ_1

$$C^{-1} \sum_{j=0}^{k} |D_1^j P(\xi)| \leq \sup_{|\eta_1| \leq 1} |P(\xi_1 + \eta_1, \xi_2, ..., \xi_n)| \leq \sum_{j=0}^{k} |D_1^j P(\xi)|, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Доказательство : Второе неравенство непосредственно следует из формулы Тейлора. Для доказательства первого неравенства в (1) рассмотрим

$$Q_\xi(t) = P(\xi_1 + t, \xi_2, ..., \xi_n) \equiv \sum_{j=0}^{k} \delta_j(\xi)\, t^j. \quad (2)$$

Для попарно различных точек $\tau_1, ..., \tau_{k+1} \in [-1, 1]$ следующая система алгебраических уравнений относительно $\delta_j(\xi)$, $j = 1, ..., k$

$$\sum_{j=0}^{k} \delta_j(\xi)\, \tau_l^j = Q_\xi(\tau_l), \qquad l = 1, ..., k+1 \tag{3}$$

однозначно разрешима. Поэтому, с некоторыми постоянными $\omega_{l,j}$

$$\delta_j(\xi) = \sum_{l=1}^{k+1} \omega_{l,j}\, Q_\xi(\tau_l), \qquad j = 0, ..., k.$$

Подставляя эти значения в (2), получим

$$P(\xi_1 + t, \xi_2, ..., \xi_n) \equiv \sum_{j=0}^{k} \left(\sum_{l=1}^{k+1} \omega_{l,j}\, Q_\xi(\tau_l) \right) t^j.$$

Отсюда следует

$$|D_1^r P(\xi)| = |D_t^r P(\xi_1 + t, \xi_2, ..., \xi_n)|\big|_{t=0} = r! \left| \sum_{l=1}^{k+1} \omega_{l,r}\, Q_\xi(\tau_l) \right| \leq$$
$$\leq C \sup_{\|\eta_1\| \leq} |P(\xi_1 + \eta_1, \xi_2, ..., \xi_n)|,$$

где $C > 0$ – постоянная, зависящая лишь от k и n. Лемма 1 доказана.

Следствие 1. Существует постоянная $C = C_{n,k} > 0$ такая, что для любого многочлена P от n переменных порядка не выше чем k относительно ξ_1, для $\xi \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$

$$C^{-1} \sum_{j=0}^{k} |D_1^j P(\xi)|\, t^j \leq \sup_{|\eta_1| \leq t} |P(\xi_1 + \eta_1, \xi_2, ..., \xi_n)| \leq C \sum_{j=0}^{k} |D_1^j P(\xi)|\, t^j.$$

Доказательство : вытекает применением Леммы 1 к многочлену $P_t(\xi) = P(t\,\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$.

Для доказательства следующего результата мы ссылаемся на [9], Лемма 4.1.1.

Лемма 2. Существует постоянная $C > 0$ такая, что для любого многочлена P степени не выше k

$$C^{-1} \leq d_P(\xi) \sum_{|\alpha|=1}^{k} \left| \frac{D_1^\alpha P(\xi)}{P(\xi)} \right|^{1/|\alpha|} \leq C, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad P(\xi) \neq 0. \tag{4}$$

Лемма 3. Существует постоянная $C > 0$ такая, что для любого многочлена P порядка не выше k относительно ξ_1

$$C^{-1} \leq \rho_1(P, \xi) \sum_{j=1}^{k} \left| \frac{D_1^j P(\xi)}{P(\xi)} \right|^{1/j} \leq C, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad P(\xi) \neq 0. \tag{5}$$

Доказательство : Следует из Леммы 2 и Следствия 1.

Лемма 4. Пусть P и Q – многочлены и $h(\xi)$ – неотрицательная функция такая, что для $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$h(\xi)\,|Q(\xi)| \leq C_1\,|P(\xi)| \quad \text{и} \quad \inf_{|\eta_1| \leq \rho_1(P,\xi)/2} h(\xi_1 + \eta_1, \xi_2, ..., \xi_n) \geq C_2\,h(\xi),$$

где C_1, $C_2 > 0$ – постоянные. Тогда существует постоянная $C_3 > 0$, для которой

$$h(\xi) \sum_{j \geq 1} |D_1^j Q(\xi)|\,\rho_1^j(P,\xi) \leq C_3\,|P(\xi)|, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство : В силу Следствия 1, с некоторой постоянной $C_4 > 0$ имеем

$$C_4^{-1}\,h(\xi) \sum_{j \geq 1} |D_1^j Q(\xi)|\,\rho_1^j(P,\xi) \leq \sup_{|\eta_1| \leq \rho_1(P,\xi)/2} |Q(\xi_1 + \eta_1, \xi_2, ..., \xi_n)|.$$

Отсюда следует

$$C_4^{-1}\,h(\xi) \sum_{j \geq 1} |D_1^j Q(\xi)|\,\rho_1^j(P,\xi) \leq \frac{1}{C_2} \sup_{|\eta_1| \leq \rho_1(P,\xi)/2} |h(\xi_1 + \eta_1, \xi_2, ..., \xi_n) \times$$

$$\times\, Q(\xi_1 + \eta_1, \xi_2, ..., \xi_n)| \leq \frac{C_1}{C_2} \sup_{|\eta_1| \leq \rho_1(P,\xi)/2} |P(\xi_1 + \eta_1, \xi_2, ..., \xi_n)|.$$

Применение Следствия 1 и Леммы 3 завершает доказательство.

Для многочлена P положим

$$g_P(\xi) = \min_{1 \leq j \leq n} \rho_j(P,\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Лемма 5. Пусть P – многочлен с постоянными коэффициентами. Пусть $h(\xi)$ – функция, удовлетворяющая следующим условиям :

i) $0 \leq h(\xi) \leq g_P(\xi)$,

ii) для любого $\varepsilon \in (0,1)$ существует постоянная $\chi(\varepsilon)$ такая, что $\inf_{\|\eta\| \leq \varepsilon h(\xi)} h(\xi + \eta) \geq \chi(\varepsilon)\,h(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Тогда существует постоянная $C > 0$, для которой $h(\xi) \leq C\,d_P(\xi) + 1$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство : В силу Леммы 3 достаточно доказать, что с некоторой постоянной $C_1 > 0$

$$\sum_{\alpha \geq 0} h^{|\alpha|}(\xi)\,|P^{(\alpha)}(\xi)| \leq C_1\,|P(\xi)|, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

По Теореме 3.3.2 из [9], с некоторой постоянной $C_2 > 0$ имеем

$$\sum_{\alpha \geq 0} h^{|\alpha|}(\xi)\,|P^{(\alpha)}(\xi)| \leq C_2 \sup_{\|\eta\| \leq h(\xi)/2} |P(\xi + \eta)| \leq$$

$$\leq C_2 \sup_{\|\eta^{(n)}\| \leq h(\xi)/2}\ \sup_{\|\eta_n\| \leq h(\xi)/2} |P(\xi + (\eta^{(n)}, 0) + (0^{(n)}, \eta_n)|.$$

Отсюда и из условий i), ii) вытекает

$$\sum_{\alpha\geq 0} h^{|\alpha|}(\xi)\,|P^{(\alpha)}(\xi)| \leq$$
$$\leq C_3 \sup_{\|\eta^{(n)}\|\leq h(\xi)/2} \quad \sup_{|\eta_n|\leq\chi(1/2)\,h(\xi+(\eta^{(n)},0))/2} |P(\xi+(\eta^{(n)},0)+(0^{(n)},\eta_n)| \leq$$
$$\leq C_3 \sup_{\|\eta^{(n)}\|\leq h(\xi)/2} \quad \sup_{|\eta_n|\leq\chi(1/2)\,\rho_n(P,\xi+(\eta^{(n)},0))/2} |P(\xi+(\eta^{(n)},0)+(0^{(n)},\eta_n)|,$$

где C_3 – постоянная. В силу Лемм 1 и 3, с некоторой постоянной $C_4>0$

$$\sum_{\alpha\geq 0} h^{|\alpha|}(\xi)\,|P^{(\alpha)}(\xi)| \leq C_4 \sup_{\|\eta^{(n)}\|\leq h(\xi)/2} |P(\xi+(\eta^{(n)},0))|.$$

Повторяя вышеприведённые рассуждения $(n-1)$ раз получим требуемый результат. Лемма 5 доказана.

Пусть $h(\xi)$ – неотрицательная функция, определённая на $\mathbb{R}^n$, $t>0$. Положим $G(h,t)=\{\xi\in\mathbb{R}^n:\ h(\xi)\leq t\}$, $G^{(1)}(h,t)=\{\xi\in\mathbb{R}^n:\ \sup_{\|\eta\|\leq\sqrt{n}/2} h(\xi+\eta)\leq t\}$, $G^{(2)}(h,t)=\{\xi\in\mathbb{R}^n:\ \inf_{\|\eta\|\leq\sqrt{n}/2} h(\xi+\eta)\leq t\}$. Для множества $A\in\mathbb{R}^n$ обозначим через A_j, $1\leq j\leq n$ проекцию множества A на подпространство $\xi_j=0$, а через $m(A)$ – количество мультииндексов множества A. Для заданного вектора $\alpha\in N^{(n-1)}$ обозначим через I_α единичный $(n-1)$-мерный куб с центром в точке α и гранями, параллельными координатным гиперплоскостям.

Лемма 6. Для любой неотрицательной функции $h(\xi)$ на $\mathbb{R}^n$ существует $t_0>0$ такое, что

$$\operatorname{mes} G_j^{(1)}(h,t)\leq m(G_j(h,t))\leq \operatorname{mes} G_j^{(2)}(h,t),\qquad j=1,2,..,\qquad t>t_0.$$

Доказательство : Так как $\beta\neq\alpha$, $\alpha,\beta\in N^{(n-1)}$, $I_\alpha\cap I_\beta=\emptyset$, то используя аддитивность, имеем

$$m(G_j(h,t))=\sum_{\alpha\in G_j(h,t)\cap N^{(n-1)}} 1=\sum_{\alpha\in G_j(h,t)\cap N^{(n-1)}} \operatorname{mes} I_\alpha=$$
$$=\operatorname{mes}\left(\cup_{\alpha\in G_j(h,t)\cap N^{(n-1)}} I_\alpha\right).$$

Остаётся показать, что

$$G_j^{(1)}(h,t)\subset\overline{\cup_{\alpha\in G_j(h,t)\cap N^{(n-1)}} I_\alpha}\subset G_j^{(2)}(h,t). \tag{6}$$

Пусть $\xi^{(j)}\in G_j^{(1)}(h,t)$ – фиксированная точка такая, что для некоторого τ $\sup_{\|\eta\|\leq\sqrt{n}/2} h(\xi(\tau)+\eta)\leq t$, где $\xi(\tau)=(\xi_1,...,\xi_{j-1},\tau,\xi_{j+1},...,\xi_n)$. Для заданного вектора ξ, через $\alpha(\xi) \in N^n$ обозначим вектор, для которого $|\alpha_i(\xi) - \xi_i| \le 1/2$, $i = 1, ..., n$. Так как $\|\alpha(\xi(\tau)) - \xi(\tau)\| \le \sqrt{n}/2$, то

$$h(\alpha(\xi(\tau))) = h(\xi(\tau) - (\xi(\tau) - \alpha(\xi(\tau))) \le \sup_{\|\eta\| \le \sqrt{n}/2} h(\xi(\tau) + \eta) \le t.$$

Следовательно, $\alpha^{(j)}(\xi(\tau)) \in G_j(h,t) \cap N^{(n-1)}$. По определению I_α имеем $\xi^{(j)} \in I_{\alpha^{(j)}(\xi(\tau))}$. Поэтому

$$G_j^{(1)}(h,t) \subset \overline{\cup_{\alpha \in G_j(h,t) \cap N^{(n-1)}} I_\alpha}.$$

Для доказательства второго вложения в (6) отметим, что для любых $\xi^{(j)} \in I_\beta$, $\beta \in G_j(h,t) \cap N^{(n-1)}$ имеем $\|\xi^{(j)} - \beta\| \le \sqrt{n-1}/2$ и $h(\beta(\tau)) \le t$ для некоторого $\tau \in \mathbb{R}^1$, где $\beta(\tau) = (\beta_1, ..., \beta_{j-1}, \tau, \beta_{j+1}, ..., \beta_n)$. Следовательно

$$\inf_{\|\eta\| \le \sqrt{n}/2} h(\xi(\eta) + \eta) \le h(\xi(\tau) - (\xi(\tau) - \beta(\tau)) = h(\beta(\tau)) \le t.$$

Отсюда следует, что $\xi^{(j)} \in G^{(2)}(h,t)$ и получаем требуемый результат. Лемма 6 доказана.

Предложение 1. Пусть $h_1(\xi)$ и $h_2(\xi)$ – неотрицательные функции, определённые на $\mathbb{R}^n$ такие, что $h_2(\xi) \le h_1(\xi)$. Тогда

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{\ln m(G_j(h_1,t))}{\ln t} \le \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{\ln m(G_j(h_2,t))}{\ln t}, \quad j = 1, ..., n.$$

Доказательство : Следует из $G_j(h_1,t) \subset G_j(h_2,t)$ для $t > 0$.

Лемма 7. Для любого гипоэллиптического многочлена P от $n \ge 2$ переменных существуют величины

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{\ln m(G_j(d_P,t))}{\ln t}, \quad j = 1, ..., n.$$

Доказательство : В силу Леммы 6 достаточно доказать существование

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{\ln \operatorname{mes}(G_j^{(2)}(d_P,t))}{\ln t}, \quad j = 1, ..., n.$$

Из условия гипоэллиптичности многочлена P следует, что с некоторыми постоянными C_1, $C_2 > 0$

$$1 + \inf_{\|\eta\| \le \sqrt{n}/2} d_P(\xi + \eta) \ge C_1 \|\xi\|^{C_2}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Учитывая Предложение 1, получим

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{\ln \operatorname{mes}(G_j^{(2)}(d_P,t))}{\ln t} \le \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{\ln \operatorname{mes}(G_j(C_1 \|\xi\|^{C_2}, t+1))}{\ln t} \le$$

$$\le \overline{\lim_{t \to +\infty}} \left[\ln(2\pi)^{n-2} \int_0^{[C_1^{-1}(t+1)]^{1/C_2}} r^{n-2}\, dr \right] / \ln t = (n-1)/C_2 < \infty.$$

Лемма 7 доказана.

§3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. Для любого гипоэллиптического оператора $P(D)$ от $n \geq 2$ переменных с постоянными коэффициентами

$$\mathbf{df} N(P) \geq \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\ln \operatorname{mes}(G_j^{(1)}(\rho_j(P),t))}{\ln t} + 1, \quad j = 1, ..., n.$$

Доказательство : Обозначим через $\alpha^{(j)}(1), ..., \alpha^{(j)}(m(\rho_j, t))$ элементы множества $G_j(\rho_j(P), t) \cap N^{(n-1)}$. По Лемме 3 для любого натурального l, $1 \leq l \leq m(\rho_j, t)$ существует комплексное число $\zeta_j(l)$ такое, что

$$P(\alpha_1(l), ..., \alpha_{j-1}(l), \zeta_j(l), \alpha_{j+1}(l), ..., \alpha_n(l)) = 0$$

и $\operatorname{Im}|\zeta_j(l)| \leq \rho_j(P, \alpha_1(l), ..., \alpha_{j-1}(l), \operatorname{Re}\zeta_j(l), \alpha_{j+1}(l), ..., \alpha_n(l)) \leq t$. Каждому такому вектору сопоставим функцию $U_l(x) = \exp i[x^{(j)}\alpha^{(j)} + x_j\zeta_j(l)] \in N(P)$. Пусть γ – число такое, что $\gamma^{-1} \in N_+^1$. Через $A^j(t)$ обозначим множество $m(\rho_j(P), t)$–мерных векторов $(a_1, ..., a_{m(\rho_j(P),t)}$, $r = 1, ...m(\rho_j(P), t)$, для которых $\gamma^{-1}a_r$ – целые неотрицательные числа. Ясно, что количество таких векторов равно $\gamma^{-m(\rho_j(P),t)}$. Сопоставим каждому вектору $a \in A^j(t)$ функцию

$$\sum_{r=1}^{m(\rho_j(P),t)} a_r\, e^{i[(x^{(j)},\alpha^{(j)}(r))+x_j\zeta_j(r)]} \in N(P).$$

В $N(P)$ рассмотрим следующие полунормы :

$$q(U) = (2\pi)^{(n-1)/2}\left[\int_{-\pi}^{\pi}...\int_{-\pi}^{\pi}|U(x^{(j)},0)|^2\,dx^{(j)}\right]^{1/2}, \qquad q_L(U) = \max_{||x||\leq L}|U(x)|,$$

$L = 1, 2, ...$ и в $N(P)$ определим топологию $W = \{U \in N(P)\colon q(U) < 1\}$, $V_L = \{U \in N(P)\colon q_L(U) < 1\}$, $L = 1, 2, ...$ Пусть $a, b \in A^j(t)$ – два различных вектора. Легко проверить, что

$$q\left(\sum_{r=1}^{m(\rho_j(P),t)}(a_r - b_r)\,e^{i[(x^{(j)},\alpha^{(j)}(r))+x_j\zeta_j(r)]}\right) = \left(\sum_{r=1}^{m(\rho_j(P),t)}|a_r - b_r|^2\right)^{1/2} \geq \gamma.$$

Простые вычисления показывают, что

$$\sum_{r=1}^{m(\rho_j(P),t)} a_r\,U_r \in m(\rho_j(P),t)\,e^{Lt}\,V_L,$$

откуда следует

$$M(m(\rho_j(P),t)\,e^{Lt}\,V_L, \gamma W) \geq \gamma^{-m(\rho_j(P),t)}.$$

Пусть $\varepsilon' > 0$ – фиксированное число. Положим $\varepsilon = e^{-2Lt}$ и

$$\gamma^{-1} = \left[\frac{\varepsilon' e^{-Lt}}{2\varepsilon\, m(\rho_j(P), t)}\right],$$

где $[\tau]$ – целая часть числа τ.

В силу Леммы 7 существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

$$\gamma^{-m(\rho_j(P),t)} = \left[\frac{\varepsilon' e^{-Lt}}{2\varepsilon\, m(\rho_j(P), t)}\right]^{m(\rho_j(P),t)} \geq \left[\varepsilon^{-1/3}\right]^{m(\rho_j(P),t)},$$

и в силу свойств функций M и N

$$\ln\ln N(\varepsilon' V_L, \varepsilon W) = \ln\ln N(V_L, \varepsilon W/\varepsilon') \geq \ln\ln N(V_L, 2\varepsilon W/\varepsilon') =$$

$$= \ln\ln\gamma^{-m(\rho_j(P),t)} \geq \ln\ln(\varepsilon^{-1/3})^{m(\rho_j(P),t)} = \ln m(\rho_j(P), t) + \ln\ln\varepsilon^{-1} - \ln 3 \geq$$

$$\geq \ln m\left(\rho_j(P), \frac{1}{2L}\ln\varepsilon^{-1}\right) + \ln\ln\varepsilon^{-1} - \ln 3.$$

Следовательно, согласно Предложению 1 и Лемме 6

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to+0}} \frac{\ln\ln N(\varepsilon' V_L, \varepsilon W)}{\ln\ln(1/\varepsilon)} \geq \overline{\lim_{\varepsilon\to+0}} \frac{\ln(m(\rho_j(P), \frac{1}{2L}\ln\varepsilon^{-1})}{\ln\ln(1/\varepsilon)} + 1 =$$

$$= \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\ln(m(\rho_j(P), t)}{\ln t} + 1 \geq \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\ln \operatorname{mes}(G_j^{(1)}(d_P, t))}{\ln t} + 1.$$

Так как $\varepsilon' V_L$, $L = 1, 2, \ldots$ образуют базис в $N(P)$, то отсюда получаем требуемый результат. Теорема 1 доказана.

Следствие 2. Пусть P – гипоэллиптический многочлен такой, что для некоторой постоянной $C > 0$

$$1 + d_P(\xi) \geq C\rho_1(P, \xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда

$$\operatorname{df} N(P) \geq \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\ln \operatorname{mes}(G_1(d_P, t))}{\ln t} + 1.$$

Доказательство : Следует из Теоремы 1, Предложения 1 и неравенств $d_P(\xi + \eta) \leq d_P(\xi) + \|\eta\|$, $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$.

Замечание. Для гипоэллиптического оператора $P(D)$ имеем $\operatorname{df}N(P) = +\infty$. Это следует из того факта, что для любого $h_\epsilon(\xi) \geq \max(\rho_j(P, \xi), \|\xi\|^\epsilon)$, $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\ln m(h_\epsilon, t)}{\ln t} = \infty \quad \text{и} \quad \operatorname{df} N(P) \geq \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\ln \operatorname{mes}(G_j^{(1)}(h_\epsilon, t)}{\ln t} + 1.$$

Теорема 2. **Пусть P – многочлен $n \geq 2$ переменных с вполне правильным характеристическим многогранником $\mathcal{N}$. Тогда $\operatorname{df} N(P) \geq \max_{\lambda\in\Lambda(\mathcal{N})} |\lambda|$.**

Доказательство : Пусть для определённости $|\lambda^0| = \max_{\lambda \in \Lambda(\mathcal{N})} |\lambda|$, $\lambda_1^0 = 1$, $\lambda^0 \in \Lambda(\mathcal{N})$. Многочлен P представим в виде

$$P(\xi) = \sum_{l=0}^{k} P_{ml}(\xi) \equiv \sum_{l=0}^{k} \sum_{(\lambda^0,\alpha)=m_l} \gamma_\alpha \xi^\alpha, \qquad m_0 > \dots > m_k \geq 0.$$

Так как вектор $\lambda^0 \in \Lambda(\mathcal{N})$, ясно, что существует точка $\tau \in \mathbb{R}_0^n$ такая, что $P_{m_0}(\tau)\, D_1\, P_{m_0}(\tau) \neq 0$. Не умаляя общности можно считать, что $\tau = (1, ..., 1)$. В силу непрерывности многочленов существует число $\varepsilon \in (0, 1)$ такое, что $P_{m_0}(\xi)\, D_1\, P_{m_0}(\xi) \neq 0$ на множестве $F = \{\xi\colon 1 - \varepsilon \leq \xi_j \leq 1 + \varepsilon,\ j = 1, ..., n\}$. Для $\theta \geq 0$ обозначим через $H(\theta)$ следующее множество $H(\theta) = \{\xi\colon \theta \leq \xi_1;\ (1-\varepsilon)\,\xi_1^{1/\lambda_j} \leq \xi_j \leq (1+\varepsilon)\,\xi_1^{1/\lambda_j}\}$. Используя Лемму 3, легко видеть, что существуют постоянные θ_0, $C_1 > 0$ такие, что $\rho_1(P, \xi) \leq C_1\, \xi_1$ при $\xi \in H(\theta_0)$. В силу Предложения 1, для некоторой постоянной $C_3 > 0$ имеем $G(\rho_1(P), t) \supset G(C_1\,\xi_1, t) \cap H(\theta_0)$ при $t \geq \theta_0$ и

$$\varliminf_{t\to+\infty} \frac{\ln \operatorname{mes} G_1^{(1)}(\rho_1(P), t)}{\ln t} \geq \varliminf_{t\to+\infty} \frac{\ln \left[\int_{a_2(t)}^{b_2(t)} \dots \int_{a_n(t)}^{b_n(t)} d\xi_2 \dots d\xi_n - C_3\right]}{\ln t} = \lambda_2^0 + \dots + \lambda_n^0,$$

где $a_j(t) = (1-\varepsilon)\, t^{\lambda_j^0}$, $b_j(t) = (1+\varepsilon)\, t^{\lambda_j^0}$, $j = 2, .., n$. Отсюда и из Теоремы 1 получим требуемый результат. Теорема 2 доказана.

Пусть P – многочлен с вполне правильным характеристическим многогранником $\mathcal{N}$, $(\lambda_1, ..., \lambda_{n-1}, 1) = \lambda \in \Lambda(\mathcal{N})$. Представим P в виде

$$P(\xi) = \sum_{l=0}^{M} P_{ml}(\xi) \equiv \sum_{l=0}^{M} \sum_{(\lambda,\alpha)=m_l} \gamma_\alpha \xi^\alpha, \quad m_0 > \dots > m_M \geq 0.$$

Пусть для некоторой точки $\tau \in R_0^n$, $P_{m_0}(\tau) = 0$, $P_{m_1}(\tau) \neq 0$

$$k(\tau) = \max\{r,\ r > 0,\ \sum_{(\alpha,\lambda)<r} |D^\alpha P_{m_0}(\tau)| = 0,\ \sum_{(\alpha,\lambda)=r} |D^\alpha P_{m_1}(\tau)| \neq 0\}$$

и $m_1 > m_0 - k(\tau)$. Заметим, что неравенство $m_1 > m_0 - k(\tau)$ является необходимым условием гипоэллиптичности многочлена P.

Теорема 3. Пусть P – многочлен, удовлетворяющий вышеописанным условиям. Если

$$\sum_{(\alpha,\lambda)\leq k(\tau)-\lambda_n} |D_n D^\alpha P_{m_0}(\tau)| \neq 0,$$

то

$$\operatorname{df}N(P) \geq \frac{\lambda_1\, k(\tau)}{[m_1 - (m_0 - k(\tau))]} + \lambda_2 + \dots + \lambda_n.$$

Доказательство : В условиях теоремы существуют вектор $a \in \mathbb{R}_0^n$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что

$$\sum_{(\alpha,\lambda)\leq k(\tau)-\lambda_n} D^\alpha P_{m_0}(\tau)\,\eta^\alpha/\alpha! \neq 0$$

при всех $\eta \in F = \{\eta,\ a_j - \varepsilon \leq \eta_j \leq a_j + \varepsilon, j = 1, ..., n\} \subset \mathbb{R}_0^n$.

Для $\theta \geq 0$ обозначим через $H(\theta) = \{\xi,\ \xi_1 \geq \theta,\ \tau_j(\xi_1/\tau_1)^{\lambda_j/\lambda_1} + (a_j - \varepsilon)\xi_1^{\delta\lambda_j/\lambda_1} \leq \xi_j \leq \tau_j(\xi_1/\tau_1)^{\lambda_j/\lambda_1} + (a_j + \varepsilon)\xi_1^{\delta\lambda_j/\lambda_1}, j = 2, ..., n\}$, где $\delta = [m_0 - (m_1 - k(\tau))]/k(\tau)$.

Используя Лемму 3, после простых вычислений заключаем, что $\rho_n(P,\xi) \leq C_1\xi_1^{\delta\lambda_n/\lambda_1} = C_1\xi_1^{\delta/\lambda_1}$ для всех $\xi \in H(\theta_0)$, где $\theta \geq 0$ и $c_1 > 0$ – постоянные. Существуют также постоянные $C_2 > 0$ и $C_3 > 0$ такие, что при $t > \theta_0$

$$\mathrm{mes}(H(\theta) \cap G(\rho_n(P), t))_n \geq$$
$$\geq C_2 \int_0^{t^{\lambda_1/\delta}} \int_{(a_2-\varepsilon)t^{\lambda_2}}^{(a_2+\varepsilon)t^{\lambda_2}} \cdots \int_{(a_{n-1}-\varepsilon)t^{\lambda_{n-1}}}^{(a_{n-1}+\varepsilon)t^{\lambda_{n-1}}} d\xi_1\, d\xi_2 ... d\xi_{n-1} - C_3.$$

Отсюда, в силу Теоремы 1 и Предложения 1 получаем требуемый результат. Теорема 3 доказана.

ABSTRACT. The paper considers hypoelliptic operators $P(D)$ with constant coefficients and establishes lower bounds for functional dimension of the space of solutions of differential equation $P(D)\,u = 0$. The bounds are determined by the behavior of the symbol of operator $P(D)$ at infinity.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Pontrjagin, L. Schnirelman, "Sur une propriete metrique de la dimension", Ann. Math., vol. 33, pp. 156 -- 162, 1921.
2. А. Н. Колмогоров, В. М. Тихомиров, "ε-энтропия и ε-ёмкость множеств в функциональных пространствах", УМН, том 2(96), стр. 3 — 86, 1959.
3. Y. Komura, "Die Nuklearitar der Losungsraume der Hypoelliptischen Gleichungen Funcialay Ekvacioj", vol. 9, pp. 313 — 324, 1966.
4. Z. Zielezni, "On the functional dimension of the space of solutions of PDE", J. Diff. Equat., vol. 18, no. 2, pp. 340 — 345, 1975.
5. M. Langenbruch, "On the functional dimension of solution spaces of Hypoelliptic partial differential operators", Math. Ann., vol. 272, pp. 217 — 229, 1985.
6. M. Langenbruch, "P-Functionale und Randwere zu Hypoelliptischen Differentialoperatoren", Math. Ann., vol. 239, pp. 313 — 324, 1979.
7. В. Н. Маргарян, Г. Г. Казарян, "О функциональной размерности пространства решений гипоэллиптических уравнений", Мат. сб., том 115(157), стр. 614 — 631, 1981.
8. Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "Оценки снизу функциональной размерности пространства решений гипоэллиптических операторов", Мат. сб., том 181, № 7, стр. 910 — 922, 1990.
9. Л. Хермандер, Линейные Дифференциальные Операторы с Частными Производными, М., Мир, 1965.

22 марта 2001

Бюраканская астрофизическая обсерватория