РАДИАЛЬНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ПРЕДСТАВИМЫХ ЛАКУНАРНЫМИ СТЕПЕННЫМИ РЯДАМИ

Т. Л. Гарибян, В. А. Мартиросян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 36, № 3, 2001

В статье исследуются граничные свойства аналитических в круге (конечном или бесконечном) функций, представимых лакунарными степенными рядами. Получены достаточные условия на лакуны, гарантирующие как несуществование радиальных граничных значений (Теоремы 1, 2) так и существование достаточно произвольных радиальных граничных значений (Теоремы 3, 4). Доказательства опираются на новейшие результаты и методы комплексных приближений, касающихся возможности аппроксимации лакунарными полиномами.

§0. ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Основы теории граничных свойств аналитических функций были заложены в классических работах П. Пенлеве и П. Фату конца XIX и начала XX веков. В дальнейшем эта теория интенсивно развивалась и теперь является одной из основных ветвей современного математического анализа (см. К. Носиро [9] и Э. Коллингвуд и А. Ловатер [4]).

Граничные свойства аналитических функций, представимых лакунарными степенными рядами, были исследованы в [8], где получены лакунарные аналоги двух известных результатов Ф. Багемила, В. Сейдела [1] и В. Рудина [10]. Настоящая статья развивает начатое в [8] изучение граничных свойств аналитических функций, представимых лакунарными степенными рядами.

Будем использовать следующие обозначения. Для множества E из конечной комплексной плоскости $\mathbf{C}$ обозначим через $C(E)$ (соответственно, $H(E)$) множество всех непрерывных (голоморфных) на E функций. Для всех $R \in [0, +\infty]$ положим $D_R = \{z \in \mathbf{C} : |z| < R\}$, и предположим, что $D_0 = \emptyset$ и $D_\infty = \mathbf{C}$.

Обозначим через L^a логарифмическую спираль, которая в полярных координатах

(r, ϕ) задаётся уравнением $\phi = a \log r$, $r \in (0, \infty)$, $a \in \mathbb{R}$. В круге D_R определим кривую L следующим образом :

1) при $R = +\infty$ положим $L = L^a \setminus \overline{D_r}$, где $a \in \mathbb{R}$ и $r \in (0, \infty)$ произвольны ;

2) при $R \in (0, \infty)$ рассмотрим возрастающую последовательность положительных чисел $\{r_n\}$, которая стремится к R при $n \to \infty$, и положим $L = \bigcup_{k=1}^{\infty} L_k^{a_k}$, где $L_k^{a_k}$ – единственный виток спирали L^{a_k}, соответствующий (r_k, r_{k+1}), а последовательность $\{a_n\}$ или неограниченно возрастает или неограниченно убывает при $n \to \infty$.

$\mathcal{N}$ означает множество натуральных чисел и ноль.

Следующие теоремы являются основными результатами данной статьи.

Теорема 1. Пусть $Q = \{q_n\}_0^\infty$ – подпоследовательность из $\mathcal{N}$, удовлетворяющая условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n} = +\infty. \tag{1}$$

Тогда существует функция $h \in H(D_R)$, ограниченная на кривой $L \subset D_R$, представимая в окрестности нуля степенным рядом вида

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^n, \quad h_n = 0 \text{ при } n \notin Q \tag{2}$$

и не имеющая граничных значений вдоль всех радиусов.

Теорема 2. Пусть $Q = \{q_n\}_0^\infty$ – подпоследовательность из $\mathcal{N}$ и $M \subset D_R$ – произвольное счётное множество радиусов. Тогда существует функция $h \in H(D_R)$, которая представима в окрестности нуля степенным рядом вида (2) и не имеет граничных значений вдоль всех радиусов из M.

Теорема 3 является обобщением результата из [8].

Теорема 3. Пусть $Q = \{q_n\}_0^\infty$ – подпоследовательность из $\mathcal{N}$, удовлетворяющая условию

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{q_n} = 1, \tag{3}$$

и $E = \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k$ – семейство взаимно непересекающихся радиальных отрезков из круга D_R с концами на границе ∂D_R, где E_k, $k = 0, 1, \ldots$ – нигде не плотные множества. Тогда для любой функции $f \in C(D_R)$ существует функция $g \in H(D_R)$, представимая в окрестности нуля степенным

рядом вида (2) такая, что для каждого $re^{i\varphi} \in E$ с фиксированным φ $f(re^{i\varphi}) - g(re^{i\varphi}) \to 0$ при $r \to R-0$. Отметим, что Теорема 3 является лакунарным аналогом результата Багемила, Сейдела и Рудина (см. [1], [10] и [4], стр. 163). Доказательство этой теоремы аналогично доказательству её частного случая из [8]. Следующая теорема является некоторой модификацией Теоремы 3.

Теорема 4. Пусть $Q = \{q_n\}_0^\infty$ – подпоследовательность из $\mathcal{N}$, удовлетворяющая условию

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{n}{q_n} = 1, \tag{4}$$

и $M \subset D_R$ – произвольное счётное множество радиусов вида

$$M = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, \quad I_k = \{z = te^{i\theta_k} :\ 0 \le t < R\}, \quad \frac{\theta_k}{2\pi} \in \mathcal{Q},$$

где $0 \le \frac{\theta_1}{2\pi} < \cdots < \frac{\theta_k}{2\pi} < \cdots < 1$ – рациональны. Тогда для любой $f \in C(D_R)$ существует функция $g \in H(D_R)$, представимая в окрестности нуля степенным рядом вида (2) такая, что для каждого $re^{i\varphi} \in M$ с фиксированным φ имеем $f(re^{i\varphi}) - g(re^{i\varphi}) \to 0$ при $r \to R-0$.

Следующая теорема вытекает из Теоремы 1.

Теорема 5. Пусть $Q = \{q_n\}_0^\infty$ – подпоследовательность из $\mathcal{N}$, удовлетворяющая условию (3). Тогда для заданных двух функций $a(\varphi)$ и $b(\varphi)$, определённых на $(0, 2\pi)$, допускающих значения $\pm\infty$, существует функция $g \in H(D_1)$, представимая в окрестности нуля степенным рядом вида (2) такая, что для почти всех $\varphi \in (0, 2\pi)$

$$\lim_{r\to 1-0} g(re^{i\varphi}) = a(\varphi) + ib(\varphi).$$

Отметим, что частный случай Теоремы 5, когда $Q = \mathcal{N}$, был одновременно установлен Ф. Багемилом и В. Сейделем [2] и О. Лехто [6]. Доказательство Теоремы 5 в общем случае аналогично доказательству частного случая, но основано на Теореме 3 (см. [5], стр. 186).

§1. ВЛИЯНИЕ ЛАКУН НА НЕСУЩЕСТВОВАНИЕ РАДИАЛЬНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

В этом параграфе собраны результаты о лакунарных степенных рядах, не имеющих радиальных граничных значений, и доказываются Теоремы 1 и 2. Обозначим через Π_a полуплоскость $\Pi_a = \{z = x + iy :\ x - ay \ge 0\}$, $a \in \mathbb{R}$.

Лемма 1. Пусть $Q = \{q_n\}_0^\infty$ – подпоследовательность из $\mathcal{N}$, удовлетворяющая (1), и $f \in H(\Pi_0)$ – функция экспоненциального типа, для которой

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+ |f(iy)|}{1+y^2}\, dy < \infty.$$

Тогда для любого φ ($|\varphi| < \pi/2$)

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{1}{r} \log |f(re^{i\varphi})| = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{q_n} \log |f(q_n re^{i\varphi})|.$$

В частном случае, когда $\varphi = 0$, Лемма 1 совпадает с Теоремой 10.7.4 из [3]. Доказательство Леммы 1 аналогично доказательству этой теоремы.

Рассмотрим компактное множество K комплексной плоскости :

$$K = \overline{D_r} \cup \gamma, \quad \gamma = L^a \cap \left(\overline{D_\rho} \setminus D_r\right), \quad 0 < r < \rho < \infty.$$

Обозначим через $A(K)$ банахово пространство функций, непрерывных на K и голоморфных на его внутренности K^0 с нормой $||f|| = \sup |f|(K)$.

Лемма 2. Пусть $Q = \{q_n\}_0^\infty$ – подпоследовательность из $\mathcal{N}$, удовлетворяющая условию (1). Тогда для любой функции $f \in A(K)$, представимой в окрестности нуля степенным рядом вида (2), и для любого числа $\varepsilon > 0$ существует многочлен p вида

$$p(z) = \sum_{n=0}^{m} p_n z^n, \quad p_n = 0 \text{ при } n \notin Q, \tag{5}$$

такой, что $|f(z) - p(z)| < \varepsilon$ при $z \in K$.

Доказательство : Без ограничения общности можем предполагать, что K содержится в круге D_1. Согласно теоремам Хана–Банаха и Рисса, достаточно доказать, что для произвольной комплексной меры Бореля μ на K, удовлетворяющей соотношениям

$$\int_K z^{q_n}\, d\mu(z) = 0, \quad n = 0, 1, ..., \tag{6}$$

выполняется условие

$$\int_K f(z)\, d\mu(z) = 0, \tag{7}$$

где $f \in A(K)$ – произвольная функция, представимая в окрестности нуля степенным рядом вида (2). Рассмотрим преобразование Коши

$$G(t) = \int_K \frac{d\mu(z)}{t-z}, \quad t \in \overline{C} \setminus K.$$

Ясно, что $G(t)$ голоморфна по $t \in \overline{C} \setminus K$. Для каждого $t \in \overline{C} \setminus K$, достаточно большого по модулю ($|t| > \rho$), степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{t}\right)^n = \left(1 - \frac{z}{t}\right)^{-1}$$

равномерно сходится для всех $z \in K$. Следовательно, интегрируя почленно этот ряд по мере μ и учитывая (6), получим

$$G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^{-p_n - 1} \int_K z^{p_n} \, d\mu(z), \quad |t| > \rho, \tag{8}$$

где $\{p_n\}$ – последовательность, дополнительная к Q относительно $\mathcal{N}$. Докажем теперь, что степенной ряд (8) сходится в действительности при $|t| > r$. С этой целью рассмотрим функцию

$$F(w) = \int_\gamma z^w \, d\mu(z), \quad z^w = \exp[w(\log t + ia \log t)], \quad w \in C.$$

Ясно, что $F(w)$ – целая функция. Для $w = x + iy$ имеем $|z^w| = \exp[(x - ay) \log t]$, $r \le t \le \rho$. Так как по предположению $\rho < 1$, получим

$$|F(w)| \le \int_\gamma d|\mu|(z) = M, \quad z \in \Pi_a.$$

В силу (6) имеем

$$F(q_n) = -\int_{\overline{D_r}} z^{q_n} \, d\mu(z), \quad n = 0, 1, ...,$$

откуда следует оценка $|F(q_n)| \le r^{q_n} M_1$, $n = 0, 1, ...$, где M_1 – положительная постоянная. Следовательно

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{q_n} \log |F(q_n)| \le \log r.$$

Пусть $\tan \phi = -a$ и $|\phi| < \pi/2$. Применяя Лемму 1 к функции $F(\zeta e^{-i\phi})$ и к лучу $\arg \zeta = \phi$, получим

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \log |F(n)| \le \log r. \tag{9}$$

Учитывая, что

$$\int_K z^{p_n} \, d\mu(z) = \int_{\overline{D_r}} z^{p_n} \, d\mu(z) + F(p_n),$$

из (9) получим

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{p_n} \log \left| \int_K z^{p_n} \, d\mu(z) \right| \le \log r.$$

В силу формулы Коши-Адамара для радиуса сходимости степенного ряда, отсюда следует, что ряд (8) сходится при $|t| > r$. Применяя теорему единственности для аналитических функций и преобразование Коши заключаем, что мера μ сосредоточена на круге $\overline{D_r}$. Теперь для вывода (7) из (6) остаётся отметить, что средние арифметические для частичных сумм степенного ряда произвольной функции $f \in A(\overline{D_r})$ сходится к f равномерно на $\overline{D_r}$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть $Q = \{q_n\}_0^\infty$ – подпоследовательность из $\mathcal{N}$, удовлетворяющая условию (1), $f(z)$ и $\varepsilon(z)$ – произвольные функции, непрерывные на кривой $L \subset D_R$. Тогда существует функция $g \in H(D_R)$, представимая в окрестности нуля степенным рядом вида (2) такая, что

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon(z) \quad \text{при} \quad z \in L. \tag{10}$$

Доказательство : Пусть множество $L \cap (0, R)$ - возрастающая к R последовательность положительных чисел $\{r_n\}_1^\infty$. Обозначим $\gamma_n = L \cap \left(\overline{D_{r_{n+1}}} \setminus D_{r_n}\right)$. Рассмотрим последовательность положительных чисел $\{\delta_n\}_0^\infty$ такую, что $\delta_n < \inf\{\varepsilon(z) \ : \ z \in \gamma_n\}$, $\delta_n \downarrow 0$, $n \to \infty$. По индукции, построим подходящую последовательность $\{p_n(z)\}_0^\infty$ многочленов вида (5). Положим $p_0(z) \equiv 0$. Сперва рассмотрим функцию

$$h_1(z) = \begin{cases} p_0(z), & \text{при } z \in \overline{D_{r_1}}, \\ f(z) - \frac{r_2 - z}{r_2 - r_1}[f(r_1) - p_0(r_1)], & \text{при } z \in \gamma_1. \end{cases}$$

Так как $h_1 \in A\left(\overline{D_{r_1}} \cup \gamma_1\right)$, то в силу Леммы 2 существует многочлен $p_1(z)$ вида (5) такой, что $|h_1(z) - p_1(z)| < \alpha_1$ при $z \in \overline{D_{r_1}} \cup \gamma_1$. Здесь и ниже $\alpha_n = \delta_{n+1} - \delta_{n+2}$. Отсюда следует, что $|p_0(z) - p_1(z)| < \alpha_1$ при $z \in \overline{D_{r_1}}$ и

$$|f(z) - p_1(z)| < \begin{cases} \alpha_1 & \text{при } z = r_2, \\ \alpha_1 + \alpha_0 & \text{при } z \in \gamma_1. \end{cases}$$

Предположим, что уже построены многочлены $p_n(z)$ вида (5) такие, что

$$|p_{n-1}(z) - p_n(z)| < \alpha_n \quad \text{при} \quad z \in \overline{D_{r_n}}, \tag{11}$$

$$|f(z) - p_n(z)| < \begin{cases} \alpha_n & \text{при } z = r_{n+1}, \\ \alpha_n + \alpha_{n-1} & \text{при } z \in \gamma_n. \end{cases} \tag{12}$$

Многочлен $p_{n+1}(z)$ вида (5) построим следующим образом. Рассмотрим функцию

$$h_{n+1}(z) = \begin{cases} p_n(z) & \text{при } z \in \overline{D_{r_{n+1}}}, \\ f(z) - \frac{r_{n+2} - z}{r_{n+2} - r_{n+1}}[f(r_{n+1}) - p_n(r_{n+1})] & \text{при } z \in \gamma_{n+1}, \end{cases}$$

так, что $h_{n+1} \in A\left(\overline{D_{r_{n+1}}} \cup \gamma_{n+1}\right)$. Согласно Лемме 2 существует многочлен $p_{n+1}(z)$ вида (5) такой, что $|h_{n+1}(z) - p_{n+1}(z)| < \alpha_{n+1}$ при $z \in \overline{D_{r_{n+1}}} \cup \gamma_{n+1}$. Отсюда следуют оценки типа (11) и (12) с заменой n на $n+1$. Рассмотрим теперь функцию

$$g(z) = \lim_{n \to \infty} p_n(z) = p_0(z) + \sum_{n=0}^{\infty}[p_{n+1}(z) - p_n(z)], \quad z \in D_R.$$

В силу (11), последний полиномиальный ряд сходится абсолютно и локально-равномерно на D_R. Следовательно, $g \in H(D_R)$ и в окрестности нуля $g(z)$ представляется степенным рядом вида (2). Пусть $z \in L$. Предположим, например, что $z \in \gamma_n$. Из (11) и (12) имеем

$$|f(z) - p_n(z)| < \alpha_n + \alpha_{n-1}, \quad |g(z) - p_n(z)| = \left|\sum_{k=n}^{\infty}[p_{k+1}(z) - p_k(z)]\right| \le \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k+1}.$$

Следовательно, $|f(z) - g(z)| < \sum\limits_{k=n-1}^{\infty} \alpha_k = \delta_n$. С учётом выбора чисел δ_n получим (10). Лемма 3 доказана.

Доказательство Теоремы 1. Построим функцию f на L следующим образом. Пронумировав витки кривой L, на витках с номерами $4n + 1$ положим $f = 0$, а на витках с номерами $4n + 3$ положим $f = 1$. На остальных витках зададим f ограниченным и непрерывным продолжением на L. Далее рассмотрим произвольную непрерывную на L функцию $\varepsilon(z) > 0$ такую, что $\varepsilon(z) \to 0$ при $|z| \to R$. Согласно Лемме 3, существует функция $h \in H(D_R)$, имеющая в окрестности нуля разложение вида (2) и удовлетворяющая (10). Очевидно, что функция h удовлетворяет всем требованиям нашей теоремы. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. В случае, когда $R = +\infty$, условие (1) в Теореме 1 необходимо. Действительно, пусть h – произвольная целая функция, удовлетворяющая Теореме 1. Предполагая, что h удовлетворяет условию $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n} < \infty$, согласно теореме Макинтайра [7] получим $h \equiv const$, что является очевидным противоречием.

Рассмотрим теперь компактное множество K вида $K = \overline{D_r} \cup \{z_1, ..., z_m\}$, $r < |z_1| < \cdots < |z_m|$.

Лемма 4. Пусть $Q = \{q_n\}_0^\infty$ – подпоследовательность из N. Тогда для произвольной функции $f \in A(K)$, представимой в окрестности нуля степенным рядом вида (2), и для любого числа $\varepsilon > 0$ существует многочлен p вида (5) такой, что $|f(z) - p(z)| < \varepsilon$ при $z \in K$.

Доказательство : Аналогично доказательству Леммы 2, достаточно показать, что произвольная комплексная мера Бореля μ на K, удовлетворяющая (6), сосредоточена на круге $\overline{D_r}$. С этой целью, запишем (6) в виде

$$\sum_{k=1}^{m} c_k z^{q_n} + \int_{\overline{D_r}} z^{q_n}\, d\mu(z) = 0, \quad n = 0, 1, ..., \tag{13}$$

где c_k – атом меры μ в точке z_k, $k = 1, \dots, m$. Разделив обе части (13) на $z_m^{q_n}$ и устремив n к ∞, заключаем, что $c_m = 0$. Аналогично, из (13) получим $c_k = 0$ при $k = 1, \dots, m$. Следовательно, мера μ сосредоточена на $\overline{D_r}$. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. Пусть $Q = \{q_n\}_0^\infty$ – подпоследовательность из $\mathcal{N}$, $E = \{z_m\}_1^\infty$ – последовательность из D_R такая, что $0 < |z_m| \uparrow R$ при $m \to \infty$. Тогда для произвольных функций $f(z)$ и $\varepsilon(z) > 0$, определённых на E, существует функция $g \in H(D_R)$, представимая в окрестности нуля степенным рядом вида (2) и такая, что

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon(z) \quad \text{при} \quad z \in E. \tag{14}$$

Доказательство аналогично доказательству Леммы 3, поэтому мы его опускаем.

Доказательство Теоремы 2. Обозначим $M = \{\alpha_n\}_1^\infty$. Рассмотрим последовательность положительных чисел $\{r_n\}_0^\infty$ такую, что $r_n \uparrow R$ при $n \to \infty$, и множества $E_n = \{z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, \dots, z_n^{(n)}\}$, $r_{n-1} < |z_1^{(n)}| < \dots < |z_n^{(n)}| \le r_n$, $z_k^{(n)} \in \alpha_n$, $n = 1, 2, \dots$. На $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ определим функцию f следующим образом : $f = 0$ при $z \in E_{2n-1}$, и $f = 1$ при $z \in E_{2n}$, $n = 1, 2, \dots$ Согласно Лемме 5 существует функция $g \in H(D_R)$, представимая в окрестности нуля степенным рядом вида (2) и удовлетворяет (14) для любой функции $\varepsilon > 0$ на E такой, что $\varepsilon(z) \to 0$ при $|z| \to R$. Из (14) следует, что функция $h = g$ не имеет граничных значений вдоль всех радиусов из M. Теорема 2 доказана.

§2. ЛАКУНЫ И СУЩЕСТВОВАНИЕ РАДИАЛЬНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

В этом параграфе приводятся результаты о лакунарных степенных рядах, имеющих наперёд заданные радиальные граничные значения, доказываются Теорема 4 и необходимость условии (3) в Теореме 3.

Замечание 2. Для любого числа $\delta \in [0, 1)$ существует подпоследовательность $\{q_n\}_0^\infty \subset \mathcal{N}$, $n/q_n \to \delta$ при $n \to \infty$, для которой утверждения Теоремы 3 не верны.

Доказательство : Пусть сперва $\delta = p/q \in (0, 1)$ – рациональное число. Рассмотрим множество

$$E = \bigcup_{k=0}^{q-1} E_k, \quad E_k = \left\{ z : \arg z = \frac{2\pi}{q} k, \ 0 \le |z| < R \right\},$$

и последовательность $\{q_n\}_0^\infty \subset \mathcal{N}$ вида

$$0,\ q,\ q+1, ..., q+p-1, ..., kq,\ kq+1, ..., kq+p-1, ..., \quad k \in \mathcal{N}.$$

Легко проверить, что $n/q_n \to p/q$ при $n \to \infty$. Отметим, что каждую функцию $g \in H(D_R)$, представимую в окрестности нуля степенным рядом вида (2), можно записать в виде

$$g(z) = g_0(z^q) + zg_1(z^q) + \cdots + z^{p-1}g_{p-1}(z^q), \tag{15}$$

где $g_k \in H(D_R)$, $k = 0, 1, ..., p-1$. Обозначив $\omega = \exp(2\pi i/q)$, получим линейную систему

$$\begin{aligned}
&g(z) = g_0(z^q) + zg_1(z^q) + \cdots + z^{p-1}g_{p-1}(z^q),\\
&g(\omega z) = g_0(z^q) + z\omega g_1(z^q) + \cdots + z^{p-1}\omega^{p-1}g_{p-1}(z^q),\\
&\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots\\
&g(\omega^{p-1}z) = g_0(z^q) + z\omega^{p-1}g_1(z^q) + \cdots + z^{p-1}\omega^{(p-1)^2}g_{p-1}(z^q).
\end{aligned}$$

Из этой системы видно, что функции $g_0(z^q), g_1(z^q), \ldots, g_{p-1}(z^q)$ для $z \in D_R$ однозначно выражаются через значения $g(z), g(\omega z), \ldots, g(\omega^{p-1}z)$ функции g, поскольку определитель Вандермонда чисел $1, \omega, \ldots, \omega^{p-1}$ отличен от нуля.

Предположим, что функции f и g удовлетворяют Теореме 3 и имеют конечные радиальные пределы на лучах E_0, E_1,...,E_{q-2}, а на луче E_{q-1} они стремятся к $+\infty$ быстрее произвольного многочлена. Из условия $p < q$ вытекает $p-1 \le q-2$. Следовательно, функции $g_0(z^q), g_1(z^q), \ldots, g_{p-1}(z^q)$ имеют конечные радиальные пределы при $z \in E_0$. Более того, в силу периодичности, каждая из них имеет один и тот же конечный радиальный предел на E :

$$g_k(z^q) \to a_k \quad \text{при} \quad r \to R-0, \quad z = re^{i\varphi} \in E, \quad k = 0, 1, ..., p-1$$

для любого фиксированного φ. Таким образом, из (15) вытекает, что на E_{q-1} функция g имеет не более чем полиномиальный рост, и приходим к противоречию.

Пусть теперь $\delta \in (0,1)$ – иррациональное или $\delta = 0$. Рассмотрим рациональное число $p/q \in (\delta, 1)$. Рассуждая как и выше, построим подпоследовательность $\{q_n\}_0^\infty \subset \mathcal{N}$, для которой $n/q_n \to p/q$ при $n \to \infty$, и утверждение Теоремы 3 не верно. Выделяя из $\{q_n\}_0^\infty$ подпоследовательность с плотностью δ, получим требуемую подпоследовательность. Утверждение Замечании 2 доказано.

Рассмотрим теперь компактное множество K вида

$$K = \overline{D_r} \cup \left(\bigcup_{s=1}^{k} I_s \right), \quad I_s = \{z = te^{i\theta_s} : r \le t \le \rho\}, \quad \frac{\theta_s}{2\pi} \in Q,$$

где $0 \le \theta_1 < \cdots < \theta_k < 2\pi$, а Q - множество всех рациональных чисел.

Лемма 6. Пусть $Q = \{q_n\}_0^\infty$ – подпоследовательность из $\mathcal{N}$, удовлетворяющая (4). Тогда для произвольной функции $f \in A(K)$, представимой в окрестности нуля степенным рядом вида (2), и для любого числа $\varepsilon > 0$ существует многочлен p вида (5) такой, что

$$|f(z) - p(z)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad z \in K. \tag{16}$$

Доказательство : Обозначим через m наименьший общий знаменатель рациональных чисел $\theta_s/2\pi$, $s = 1, ..., k$. Без ограничения общности можем предположить, что $\theta_s/2\pi = s/m$, где $s = 0, 1, ..., m-1$. Соответствующий компакт обозначим через K^*. Заметим сперва, что из (4) следует

$$\sum_{q_n \in Q_s} q_n^{-1} = +\infty, \quad Q_s = \{q_n \in Q : q_n = s(mod\ m)\}, \quad s = 0, 1, ..., m-1.$$

Произвольную функцию $f \in A(K^*)$ можно представить суммой

$$f(z) = \sum_{s=0}^{m-1} f_s(z), \quad z \in K^*, \tag{17}$$

где функции $f_s \in A(K^*)$ удовлетворяют условию

$$f_s(z\omega) = \omega^s f_s(z), \quad \omega = \exp\left(i\frac{2\pi}{m}\right), \quad z \in K^*. \tag{18}$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно положить

$$f_s(z) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f(z\omega^k)\omega^{-ks}, \quad s = 0, 1, ..., m-1.$$

Из (18) следует, что $f_s(0) = 0$ при $s = 1, ..., m-1$. Поскольку в окрестности нуля функция f представляется степенным рядом вида (2), то в окрестности нуля функции f_s можно представить степенным рядом вида (2) с заменой Q на Q_s. Следовательно, применяя Лемму 2 к каждой функции f_s и последовательности Q_s, находим многочлен p_s вида (5) с заменой Q на Q_s такой, что

$$|f_s(z) - p_s(z)| < \frac{\varepsilon}{m} \quad \text{при} \quad z \in \overline{D}_r \cup [r, \rho]. \tag{19}$$

Ясно, что каждый многочлен p_s удовлетворяет (18) с заменой f_s на p_s. Следовательно, полагая $p(z) = \sum_{s=0}^{m-1} p_s(z)$, $z \in \mathbf{C}$ и учитывая (17) - (19) заключаем, что $p(z)$ - многочлен вида (5), удовлетворяющий (16) на K^*. Лемма 6 доказана.

Доказательство Теоремы 4. Рассмотрим последовательность положительных чисел $\{r_n\}_0^\infty$ такую, что $r_n \uparrow R$ при $n \to \infty$. Пусть $\varepsilon(z) > 0$ – произвольная функция из $C[0, R)$, убывающая к нулю. Выберем последовательность положительных чисел $\{\delta_n\}_0^\infty$ так, чтобы $\delta_n \downarrow 0$ при $n \to \infty$ и $\delta_n < \inf\{\varepsilon(|z|) : r_{n-1} \le |z| \le r_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Полагая $\alpha_n = \delta_{n+1} - \delta_{n+2}$, построим индукцией подходящую последовательность $\{p_n(z)\}_0^\infty$ многочленов вида (5). Согласно теореме Мюнца, существует многочлен $p_0(z)$ вида (5) такой, что $|f(z) - p_0(z)| < a_0$ при $z \in \overline{D_{r_0}} \cap I_1$. Предположим, что уже построены многочлены $p_n(z)$ вида (5), удовлетворяющие

$$|p_{n-1}(z) - p_n(z)| < \alpha_n \quad \text{при} \quad z \in \overline{D}_{r_{n-1}}, \tag{20}$$

$$\begin{cases} |f(z) - p_n(z)| < \alpha_n + \alpha_{n-1} \quad \text{при} \quad z \in (\overline{D_{r_n}} \setminus D_{r_{n-1}}) \cap \bigcup_{s=1}^n I_s, \\ |f(z) - p_n(z)| < \alpha_n \quad \text{при} \quad z \in \overline{D}_{r_{n-1}} \cap \bigcup_{s=1}^n I_s. \end{cases} \tag{21}$$

Многочлен $p_{n+1}(z)$ вида (5) построим следующим образом. Обозначим через $z_1^{(n)}, \ldots, z_{n+1}^{(n)}$ элементы множества $\overline{D}_{r_n} \cup \bigcup\limits_{s=1}^{n+1} I_s$, и рассмотрим функцию

$$h_{n+1}(z) = \begin{cases} p_n(z) & \text{при } z \in \overline{D_{r_n}}, \\ f(z) - \frac{z_s^{(n+1)} - z}{z_s^{(n+1)} - z_s^{(n)}}[f(z_s^{(n)}) - p_n(z_s^{(n)})] & \text{при } z \in I_s, \end{cases}$$

$s = 1, \ldots, n+1$. Ясно, что $h_{n+1} \in A\left(\overline{D}_{r_n} \cup \bigcup\limits_{s=1}^{n+1} I_s\right)$. Тогда, по Лемме 6 существует многочлен $p_{n+1}(z)$ вида (5) такой, что

$$|h_{n+1}(z) - p_{n+1}(z)| < \alpha_{n+1} \quad \text{при} \quad z \in \overline{D}_{r_n} \cup \bigcup_{s=1}^{n+1} I_s.$$

Отсюда следуют оценки типа (20) и (21) с заменой n на $n+1$. Таким образом, требуемая последовательность $\{p_n(z)\}_0^\infty$ многочленов вида (5) построена. Рассмотрим теперь полиномиальный ряд

$$g(z) = \lim_{n\to\infty} p_n(z) = p_0(z) + \sum_{n=0}^\infty [p_{n+1}(z) - p_n(z)], \quad z \in D_R.$$

Поскольку последовательность $\{r_n\}_0^\infty$ возрастает, то в силу (20) последний ряд сходится абсолютно и локально-равномерно на D_R. Следовательно, $g \in H(D_R)$ и в окрестности нуля $g(z)$ представляется степенным рядом вида (2). Обозначим $F = \bigcup\limits_{n=1}^\infty (I_n \setminus D_{r_{n-1}})$. При $z \in F$ и некотором $m \ge n$ имеем $z \in (\overline{D}_{r_m} \setminus D_{r_{m-1}}) \cap I_n$. В силу (20) и (21)

$$|f(z) - p_m(z)| < \alpha_m + \alpha_{m-1}, \quad |g(z) - p_m(z)| = \left|\sum_{k=m}^\infty [p_{k+1}(z) - p_k(z)]\right| \le \sum_{k=m}^\infty \alpha_{k+1}.$$

Следовательно, $|f(z) - g(z)| < \sum_{k=m-1}^{\infty} \alpha_k = \delta_m$. С учётом выбора δ_m получим (14) при $z \in F$. Остаётся отметить, что каждый радиус из множества M, за исключением конечного числа, содержится в множестве F. Теорема 4 доказана.

ABSTRACT. The paper investigates the boundary properties of functions, analytic in a disk (finite or infinite) and representable by lacunary power series. Sufficient conditions on lacunas are obtained, which guarantee both nonexistence of radial boundary values (Theorems 1, 2) and existence of rather arbitrary radial boundary values (Theorems 3, 4). The proofs are based on new results in complex approximations concerning possibility of approximation by gap polynomials.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Bagemihl, "Some boundary properties of analytic functions", Math. Zeit. vol. 61, pp. 186 – 199, 1954.
2. F. Bagemihl, W. Seidel, "Regular functions with prescribed measurable boundary values almost everywhere", Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. 41, pp. 740 – 743, 1955.
3. R. Boas, Entire Functions, Academic Press, NY, 1954.
4. E. Collingwood, A. Lohwater, The Theory of Cluster Sets, Cambridge Univ. Press, 1966.
5. D. Gaier, Vorlesungen ueber Approximation im Komplexen, Birkhauser–Verlag, Basel, 1980.
6. O. Lehto, "On the first boundary value problem for functions harmonic in the unit circle", Ann. Acad. Sci. Finn, ser. A.I., no. 210, 1955.
7. A. J. Macintyre, "Asymptotic paths of integral functions with gap power series", Proc. London Math. Soc. (3), vol. 2, pp. 286 – 296, 1952.
8. В. А. Мартиросян, "О равномерно – касательном приближении лакунарными степенными рядами на множествах Карлемана", Изв. НАН Армении. Математика, том 30, № 4, стр. 59 - 67, 1995.
9. K. Noshiro, Cluster Sets, Springer Verlag, Berlin, 1960.
10. W. Rudin, "Radial cluster sets of analytic functions", Bull. Amer. Math. Soc., vol. 60, pp. 455, 1954.

30 октября 2000

Ереванский государственный университет,
Институт математики НАН Армении