ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ В ПРОСТРАНСТВАХ С ВЕСОМ

Г. М. Айрапетян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 36, № 3, 2001

В статье рассматривается задача Дирихле в весовом пространстве $L^1(\rho)$, где весовая функция ρ удовлетворяет некоторым условиям регулярности. Достаточное условие разрешимости получено для весовых функций, обращающихся в нуль в конечном числе точек. Это условие необходимо, если порядок нуля весовой функции меньше чем 1. При предположении, что задача разрешима, вычисляется соответствующий индекс.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\rho(t)$ – измеримая неотрицательная функция, определённая на единичной окружности $T = \{t : |t| = 1\}$, отличная от нуля во всех точках $t \in T$, $t \neq 1$. Рассмотрим следующую задачу типа Дирихле в весовом пространстве $L^1(\rho)$. Требуется определить действительную, гармоническую в $D^+ = \{z : |z| < 1\}$ функцию $u(z)$, удовлетворяющую граничному условию

$$\lim_{r\to 1-0} \left\| u\left(re^{i\phi}\right) - f\left(e^{i\phi}\right)\right\|_{L^1(\rho)} = 0, \tag{0.1}$$

где $f(e^{i\phi}) \in L^1(\rho)$ – действительная функция.

Краевые задачи (0.1) в классах аналитических функций в L^1 рассмотрены в [1]. В классической постановке граничная задача Римана для классов $L^p(\rho) \subset L^1$, $1 < p < \infty$ исследовалась многими авторами (см. [2] – [6]). Для степенных весовых функций нётеровость этой задачи была установлена в работе [2]. Как доказано в [7] (см. также [8]), для нормальной разрешимости задачи Римана в классах $L^p(\rho)$, $1 < p < \infty$ необходимо и достаточно, чтобы весовая функция ρ удовлетворяла условию Макенхаупта

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I \rho(t)\,|dt|\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I (\rho(t))^{-\frac{1}{p-1}}\,|dt|\right)^{p-1} < B_p \tag{0.2}$$

для любого интервала $I \subset T$, где $|I|$ - длина интервала I. При $1 \le p < \infty$, $L^p(\rho)$-оценкам гармонических функций, допускающих представление в виде интеграла Пуассона посвящена работа [9]. В [9] показано, что (0.2) является необходимым и достаточным условием для равномерной ограниченности $L^p(\rho)$-нормы функции $u(rt)$. Та же задача рассматривалась в работе [10] для функций, допускающих интегральные представления с помощью ядер вида

$$K_r(x,t) = P_r(t-x) - \sum_{i=1}^{s} \sum_{\lambda_i=0}^{\alpha_i - 1} P_r^{(\lambda_i)}(t - x_i) T(x_i, \lambda_i, x), \tag{0.3}$$

где $-\pi \le x_1 < ... < x_s < \pi$, а $T(x_i, \lambda_i, x)$ - специальные интерполяционные полиномы, возникающие при суммировании по Абелю подсистем тригонометрической системы. Используя ядра (0.3), в работе [11] описаны весовые функции, имеющие особенности в конечном числе точек, для которых задача (0.1) разрешима для любых $f(e^{i\phi}) \in L^1(\rho)$.

В настоящей работе исследуется задача Дирихле (0.1) для весовых функций, RO-меняющихся (см. ниже) в особой точке и выводится достаточное условие разрешимости для любой $f(e^{i\phi}) \in L^1(\rho)$.

Следуя [12], вещественную, положительную и измеримую на $(0,\pi)$ функцию $g(\phi)$ будем называть **RO–меняющейся в точке $\phi = 0$ справа**, если её можно представить в виде

$$g(\phi) = \exp\left(g_1(\phi) + \int_\phi^a \frac{g_2(t)}{t}\, dt\right), \quad \phi \in (0, \pi], \tag{0.4}$$

где a - некоторое число из $(0,\pi]$, а $g_1(\phi)$ и $g_2(\phi)$ - измеримые и ограниченные на $(0,\pi)$ функции.

Аналогично определяется класс RO-меняющихся функций в точке $\phi = 0$ слева. Функция $g(\phi)$ называется **RO–меняющейся в точке $\phi = 0$**, если она RO–меняющаяся в точке $\phi = 0$ и слева и справа. Будем говорить, что весовая функция $\rho(t)$ принадлежит классу R_α, если

$$\alpha = \sup\left\{\beta : \ \rho(t)|1-t|^{-\beta} \in L^\infty(T)\right\} < \infty, \tag{0.5}$$

а функция

$$\rho_1(t) = \rho_1\left(e^{i\theta}\right) = \left|1 - e^{i\theta}\right|^{-\alpha} \rho(e^{i\theta}) \tag{0.6}$$

является RO-меняющейся в нуле, причём функция g_2 из представления (0.4) удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} &\overline{\lim}\, g_2(\phi) < \{\alpha\}, \quad \underline{\lim}\, g_2(\phi) > \{\alpha\} - 1, \quad \phi \to 0, \quad \text{если } \alpha \text{ - нецелое}, \\ &\overline{\lim}\, g_2(\phi) < 1, \quad \underline{\lim}\, g_2(\phi) \ge 0, \quad \phi \to 0, \quad \text{если } \alpha \text{ - целое}, \end{aligned} \tag{0.7}$$

где $\{\alpha\}$ – дробная часть числа α.

Для произвольного неотрицательного числа λ положим

$$\lambda' = \begin{cases} 1 - \{\lambda\}, & \text{если } \lambda \text{ – нецелое}, \\ 0, & \text{если } \lambda \text{ – целое}. \end{cases} \tag{0.8}$$

Наконец, если специально не оговорено, все постоянные будем обозначать буквами C, A, A_k, $k = 1, 2, \ldots$.

Основными результатами работы являются следующие три теоремы.

Теорема А. Пусть $\rho(t) \in R_\alpha$, $\alpha \geq 0$ и $M(\cdot)$ – максимальная функция Харди–Литтлвуда. Если

$$M(|1 - e^{i\theta}|^{-\alpha'}\rho_1(e^{i\theta})) < C|1 - e^{i\theta}|^{-\alpha'}\rho_1(e^{i\theta}), \tag{0.9}$$

то задача (0.1) разрешима для любой функции $f \in L^1(\rho)$. Общее решение можно представить в виде $u(z) = u_1(z) + u_2(z)$, где $u_1(z)$ – общее решение однородной задачи, а

$$u_2(z) = \frac{1}{2\pi}\ \mathrm{Re}\ \left(\frac{1}{(1-z)^\gamma}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(e^{i\theta})\,(1 - e^{i\theta})^\gamma\, e^{i\theta}}{e^{i\theta} - z}\,d\theta + \right.$$
$$\left. + \frac{z^{\gamma+1}}{(1-z)^\gamma}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(e^{i\theta})(1 - e^{i\theta})^\gamma}{e^{i\gamma\theta}(e^{i\theta} - z)}\,d\theta\right),$$

где $\gamma = [\alpha] + 1$, если α – нецелое и $\gamma = \alpha$, если α – целое, α' определяется формулой (0.8), $[\alpha]$ – целая часть числа α.

Теорема В. Неравенство (0.9) является необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (0.1) для любой $\rho(t) \in R_\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$ и $f \in L^1(\rho)$.

Теорема С. Пусть $\rho(t) \in R_0$ и

$$\varlimsup_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \rho_1(e^{i\theta})\,d\theta < \infty. \tag{0.10}$$

Если для некоторого $\delta \in (0, 1)$ функция $|1 - e^{i\theta}|^{-\delta}\rho(e^{i\theta})$ не удовлетворяет условию (0.9), то существует $f \in L^1(\rho)$ такая, что задача (0.1) не разрешима.

В §2 доказывается, что однородная задача (0.1) имеет $\gamma + 1$ линейно независимых решений, и эти решения выписываются в явном виде.

§1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Лемма 1. Если $m > 0$, то

$$\left|\frac{1}{(1-rt)^m} - \frac{1}{(1-r^{-1}t)^m}\right| < C\frac{(1-r)\left((1-r)^{m-1} + |1-t|^{m-1}\right)}{|1-rt|^{2m}}, \tag{1.1}$$

где C – постоянная, не зависящая от r и t. Если $|1-t| \geq 2m(1-r)$, то

$$\left|\frac{1}{(1-rt)^m} - \frac{1}{(1-r^{-1}t)^m}\right| > a\frac{1-r}{|1-rt|^{m+1}}, \tag{1.2}$$

где $a > 0$ – постоянная, не зависящая от r и t.

Доказательство : Пусть $|1-t| > 1-r$. Тогда имеем $|1-rt| \leq 2(1-t)$ и $|1-r^{-1}t| \leq 2(1-t)$. Поэтому

$$\left|\frac{1}{(1-rt)^m} - \frac{1}{(1-r^{-1}t)^m}\right| \leq \frac{1-r^2}{|1-rt|^2}\sum_{k=1}^{m-1}|1-rt|^k|1-r^{-1}t|^{m-1-k} \leq$$
$$\leq \frac{2^m(m-1)(1-r^2)}{|1-rt|^{2m}}.$$

Если $|1-t| \leq 1-r$, то $|1-rt| \leq 2(1-r)$ и $|1-r^{-1}t| \leq 2(1-r)$. Поэтому

$$\left|\frac{1}{(1-rt)^m} - \frac{1}{(1-r^{-1}t)^m}\right| \leq \frac{2^m(m-1)(1-r^2)(1-r)^{m-1}}{|1-rt|^{2m}}.$$

Тем самым (1.1) доказано. Предположим теперь, что $|1-t| > 2m(1-r)$. Тогда имеем

$$\left|\frac{1}{(1-rt)^m} - \frac{1}{(1-r^{-1}t)^m}\right| = \frac{1-r^2}{|1-rt|^{m+1}}\left|\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{1-r^{-1}t}{1-rt}\right)^k\right| =$$
$$= \frac{1-r^2}{|1-rt|^{m+1}}\left|\sum_{k=0}^{m-1}\left|\frac{1-r^{-1}t}{1-rt}\right|^k[\cos k\phi + i\sin k\phi]\right| \geq$$
$$\geq \frac{1-r^2}{|1-rt|^{m+1}}\left|\sum_{k=0}^{m-1}\left|\frac{1-r^{-1}t}{1-rt}\right|^k\cos k\phi\right|,$$

где $\phi = \arg(1-r^{-1}t) - \arg(1-rt)$. Из условия $|1-t| > 2m(1-r)$ следует, что $\cos k\phi \geq 0$, $k = 0, 1, ...m-1$. Следовательно, неравенство (1.2) также выполнено. Лемма 1 доказана.

Функция $g(\phi)$ называется **почти монотонно возрастающей**, если существует постоянная $A > 0$ такая, что $g_1(\phi) < Ag_2(\phi)$ для любого $\phi_1 < \phi_2$. Аналогично определяются почти монотонно убывающие функции.

Лемма 2. Пусть $\rho(e^{i\theta}) \in R_\alpha$. Тогда справедливы следующие утверждения :

а) Если α – нецелое, то функция $\phi^{\{\alpha\}}\rho_1(e^{i\phi})$ почти монотонно возрастает на $(0,\pi]$ и почти монотонно убывает на $[-\pi,0)$. Следовательно, $\phi^{-(1-\{\alpha\})}\rho_1(e^{i\phi})$ почти монотонно убывает на $(0,\pi]$ и почти монотонно возрастает на $[-\pi,0)$.

b) Если α – целое, то функция $\phi\rho_1(e^{i\phi})$ почти монотонно возрастает на $(0,\pi]$ и почти монотонно убывает на $[-\pi,0)$, причём для любого $\delta>0$ функция $\phi^{-\delta}\rho_1(e^{i\phi})$ почти монотонно убывает на $(0,\pi]$ и почти монотонно возрастает на $[-\pi,0)$.

Доказательство : Пусть α – нецелое. Согласно (0.4) и (0.7), функцию $\rho_1(e^{i\phi})$ можно представить в виде

$$\rho_1(\phi)=g_1(\phi)\exp\left(\int_\phi^a \frac{g_2(t)}{t}\,dt\right), \tag{1.3}$$

где $g_1(\phi)>m>0$ – измеримая, ограниченная сверху функция на $(0,\pi]$, а $g_2(\phi)<\{\alpha\}$. При $0<\phi_1<\phi_2$ из (1.3) получаем

$$\frac{\phi_1^{\{\alpha\}}\rho_1(e^{i\phi_1})}{\phi_2^{\{\alpha\}}\rho_1(e^{i\phi_2})}<A\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)^{\{\alpha\}}\exp\left(\{\alpha\}\int_{\phi_1}^{\phi_2}\frac{dt}{t}\right)<A.$$

С учётом второго соотношения из (0.7), получаем

$$\frac{\phi_2^{-(1-\{\alpha\})}\rho_1(e^{i\phi_1})}{\phi_1^{-(1-\{\alpha\})}\rho_1(e^{i\phi_2})}<A\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)^{1-\{\alpha\}}\exp\left(-(1-\{\alpha\})\int_{\phi_1}^{\phi_2}\frac{dt}{t}\right)=A.$$

Аналогично доказываются остальные утверждения леммы. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть $\rho(e^{i\phi})\in R_\alpha$ и $\mu=\{\alpha\}$, если α – нецелое и $\mu=1$, если α целое. Тогда функция

$$\Phi(h)=\frac{1}{h}\int_0^h \phi^\mu\rho_1(e^{i\phi})\,d\phi$$

почти монотонно возрастает на $(0,\pi]$ и почти монотонно убывает на $[-\pi,0)$.

Доказательство : С учётом (1.3), не нарушая общности, можно предположить, что $\rho_1(e^{i\phi})\in C(0,2\pi)$. Пусть $0<h_1<h_2$. Используя теорему о среднем значении и Лемму 2, получаем

$$\frac{1}{h_1}\int_0^{h_1}\phi^\mu\rho_1(e^{i\phi})\,d\phi<\frac{A_1}{h_2-h_1}\int_{h_1}^{h_2}\phi^\mu\rho_1(e^{i\phi})\,d\phi.$$

Следовательно

$$\frac{1}{h_1}\int_0^{h_1}\phi^{\mu}\rho_1(e^{i\phi})\,d\phi<\frac{1}{h_2}\left[\int_0^{h_1}\phi^{\mu}\rho_1(e^{i\phi})\,d\phi+A\int_{h_1}^{h_2}\phi^{\mu}\rho_1(e^{i\phi})\,d\phi\right]<$$
$$<\frac{A}{h_2}\int_0^{h_2}\phi^{\mu}\rho_1(e^{i\phi})\,d\phi.$$

Аналогично доказывается, что если $h_1<h_2<0$, то

$$\frac{1}{h_1}\int_0^{h_1}|\phi|^{\mu}\rho_1(e^{i\phi})\,d\phi>\frac{a}{h_2}\int_0^{h_2}|\phi|^{\mu}\rho_1(e^{i\phi})\,d\phi,$$

где $a>0$ – постоянная. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Пусть выполняется условие (0.9). Тогда справедливо соотношение

$$a\int_{-\theta_0}^{0}\frac{\rho_1(e^{i\theta})}{|1-e^{i\theta}|^{\alpha'}}\,d\theta\le\int_0^{\theta_0}\frac{\rho_1(e^{i\theta})}{|1-e^{i\theta}|^{\alpha'}}\,d\theta\le A\int_{-\theta_0}^{0}\frac{\rho_1(e^{i\theta})}{|1-e^{i\theta}|^{\alpha'}}\,d\theta,\tag{1.4}$$

где A и a $(A>a>0)$ суть постоянные, не зависящие от $\theta_0>0$, а α' определяется формулой (0.8).

Доказательство : С учётом (1.3), не нарушая общности, можно предположить, что $\rho_1(e^{i\phi})\in C(0,2\pi)$. Предположим, что (1.4) не выполняется. Тогда для некоторой последовательности $\theta_k\to 0$ будем иметь

$$\int_0^{\theta_k}\frac{\rho_1(e^{i\theta})\,d\theta}{|1-e^{i\theta}|^{\alpha'}}=c_k\int_{-\theta_0}^{0}\frac{\rho_1(e^{i\theta})\,d\theta}{|1-e^{i\theta}|^{\alpha'}},\tag{1.5}$$

где $c_k\to 0$. Пусть $\theta_k'\in(0,\theta_k]$ – точка, для которой имеет место равенство

$$\frac{\rho_1\left(e^{i\theta'}\right)}{|1-e^{i\theta'}|^{\alpha'}}=\frac{1}{\theta_k}\int_0^{\theta_k}\frac{\rho_1(e^{i\theta})\,d\theta}{|1-e^{i\theta}|^{\alpha'}}.\tag{1.6}$$

Из (1.5) следует, что

$$\int_{-\theta_k}^{\theta_k}\frac{\rho_1(e^{i\theta})\,d\theta}{|1-e^{i\theta}|^{\alpha'}}=\left(1+\frac{1}{c_k}\right)\int_0^{\theta_k}\frac{\rho_1(e^{i\theta})\,d\theta}{|1-e^{i\theta}|^{\alpha'}}.\tag{1.7}$$

Так как

$$M\left(\left|1-e^{i\theta_k'}\right|^{-\alpha'}\rho_1\left(e^{i\theta_k'}\right)\right)\ge\frac{1}{4\theta_k}\int_{-\theta_k}^{\theta_k}\frac{\rho_1(e^{i\theta})\,d\theta}{|1-e^{i\theta}|^{\alpha'}},$$

то используя (1.6) и (1.7), получаем

$$M\left(\left|1-e^{i\theta_k'}\right|^{-\alpha'}\rho_1\left(e^{i\theta_k'}\right)\right)\ge\left(1+\frac{1}{c_k}\right)\frac{1}{4\theta_k}\int_0^{\theta_k}\frac{\rho_1(e^{i\theta})\,d\theta}{|1-e^{i\theta}|^{\alpha'}}=$$
$$=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{c_k}\right)\frac{\rho_1\left(e^{i\theta_k'}\right)}{\left|1-e^{i\theta_k'}\right|^{\alpha'}},$$

что противоречит условию (0.9). Доказательство завершено.

Лемма 5. Пусть

$$g(\phi) = \exp\left(\int_\phi^a \frac{g_2(t)}{t}\,dt\right),$$

где $g_2(t)$ – функция, ограниченная на $(0,\pi]$. Тогда для любого $\lambda \in (0,1]$ и $\phi \in (\lambda\theta, \lambda^{-1}\theta)$ имеем

$$\left|\frac{g(\phi)-g(\theta)}{\phi-\theta}\right| < A_\lambda \frac{g(\theta)}{\theta},$$

где A_λ – постоянная, не зависящая от θ, но, возможно, зависящая от λ.

Доказательство : Из определения функции $g(\phi)$ имеем

$$\frac{g(\phi)-g(\theta)}{\phi-\theta} = \frac{g(\theta)}{\phi-\theta}\left(1-\exp\int_\phi^\theta \frac{g_2(t)}{t}\,dt\right).$$

Так как $\phi \in (\lambda\theta, \lambda^{-1}\theta)$, то

$$\left|\int_\phi^\theta \frac{g_2(t)}{t}\,dt\right| < M_\lambda \frac{|\phi-\theta|}{\theta},$$

где M_λ – постоянная. Следовательно

$$\left|\frac{g(\phi)-g(\theta)}{\phi-\theta}\right| < AM_\lambda \frac{g(\theta)}{\theta}.$$

Лемма 5 доказана.

Пусть

$$\rho_1'(e^{i\phi}) = \rho_1(e^{i\phi})g_1^{-1}(\phi), \tag{1.8}$$

$$H(\phi,\theta) = \frac{1}{|\theta-\phi|}|1-e^{i\phi}|^{1-\alpha'}\left|\rho_1'(e^{i\phi})-\rho_1'(e^{i\theta})\right|,$$

где $g_1(\phi)$ определена по формуле (1.3).

Лемма 6. Пусть $\theta \in (0,\pi)$, $\rho(t) \in R_\alpha$ и выполняется условие (0.9). Тогда

$$\sup_{h>0} \frac{1}{h}\int_{-h}^0 H(\phi,\theta)\,d\phi < A\frac{\rho_1(e^{i\theta})}{|1-e^{i\theta}|^{\alpha'}}, \tag{1.9}$$

где α' определена формулой (0.8).

Доказательство : Для $\lambda \in (0,1)$ рассмотрим случаи $h < \lambda\theta$ и $h > \lambda\theta$. Пусть $h < \lambda\theta$. По Лемме 3 имеем

$$\frac{1}{h}\int_{-h}^0 H(\phi,\theta)\,d\phi < \frac{1}{h}\int_{-h}^0 \frac{|\phi|^{1-\alpha'}\rho_1'(e^{i\phi})}{|\theta-\phi|}\,d\phi + \frac{1}{h}\int_{-h}^0 \frac{1}{\theta}|\phi|^{1-\alpha'}\rho_1'(e^{i\theta})\,d\phi <$$

$$< \frac{A_1}{\lambda\theta}\int_{-\lambda\theta}^0 \frac{1}{\theta}|\phi|^{1-\alpha'}\rho_1'(e^{i\phi})\,d\phi + \frac{\rho_1(e^{i\theta})}{\theta^{\alpha'}} < \frac{A_1}{\lambda\theta}\int_{-\lambda\theta}^0 \frac{\rho_1'(e^{i\phi})}{|\phi|^{\alpha'}}\,d\phi + \frac{\rho_1(e^{i\theta})}{\theta^{\alpha'}}.$$

В силу Леммы 4 имеем

$$\frac{1}{\lambda\theta}\int_{-\lambda\theta}^{0}\frac{\rho_1'(e^{i\phi})}{|\phi|^{\alpha'}}\,d\phi < A_2\frac{1}{\lambda\theta}\int_{0}^{\lambda\theta}\frac{\rho_1'(e^{i\phi})}{|\phi|^{\alpha'}}\,d\phi < 2A_2M\left(\frac{\rho_1(e^{i\theta})}{\theta^{\alpha'}}\right).$$

Отсюда и из условия (0.9), получаем (1.9) при $h<\lambda\theta$. Теперь пусть $h>\lambda\theta$. Используя неравенство

$$\frac{1}{h}\int_{-h}^{0}\frac{|\phi|^{1-\alpha'}\rho_1'(e^{i\theta})}{|\theta-\phi|}\,d\phi < \frac{\rho_1'(e^{i\theta})}{h}\int_{-h}^{0}\frac{d\phi}{|\phi|^{\alpha'}} < A_3\frac{\rho_1(e^{i\theta})}{\theta^{\alpha'}},$$

получаем

$$\frac{1}{h}\int_{-h}^{0}H_1(\phi)\,d\phi < \frac{1}{h}\int_{-h}^{-\lambda\theta}\frac{\rho_1'(e^{i\phi})\,d\phi}{|\phi|^{\alpha'}} + A_5\frac{\rho_1(e^{i\theta})}{\theta^{\alpha'}} <$$

$$< \frac{2\theta+2h}{h}\frac{1}{2\theta+2h}\int_{-h}^{2\theta+h}\frac{\rho_1'(e^{i\phi})\,d\phi}{|\phi|^{\alpha'}} + A_5\frac{\rho_1(e^{i\theta})}{\theta^{\alpha'}} < A_4\frac{\rho_1(e^{i\theta})}{\theta^{\alpha'}},$$

где $H_1(\phi)=\frac{1}{|\theta-\phi|}|1-e^{i\phi}|^{1-\alpha'}\rho_1'(e^{i\phi})$. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. Если $\theta\in(0,\pi)$, $\rho(t)\in R_\alpha$, $\alpha\geq 0$ и выполняется условие (0.9), то

$$\sup_{h>0}\frac{1}{h}\int_{0}^{h}H(\phi,\theta)\,d\phi < A\frac{\rho_1(e^{i\theta})}{|1-e^{i\theta}|^{\alpha'}}, \tag{1.10}$$

где α' определяется формулой (0.8).

Доказательство : Пусть $\lambda\in(0,1)$ и $h<\lambda\theta$. Применяя Лемму 3, будем иметь

$$\frac{1}{h}\int_{0}^{h}H(\phi,\theta)\,d\phi < \frac{1}{h}\int_{0}^{h}\frac{\phi^{1-\alpha'}\rho_1'(e^{i\phi})}{|\theta-\phi|}\,d\phi + \frac{1}{h}\int_{0}^{h}\frac{\phi^{1-\alpha'}\rho_1'(e^{i\theta})}{\theta}\,d\phi <$$

$$< \frac{A_1}{h}\int_{0}^{h}\frac{\phi^{1-\alpha'}\rho_1'(e^{i\phi})}{\theta}\,d\phi + \frac{A_1}{h}\int_{0}^{h}\frac{\phi^{1-\alpha'}\rho_1'(e^{i\theta})}{\theta}\,d\phi <$$

$$< \frac{A_2}{\lambda\theta}\int_{0}^{\lambda\theta}\frac{|\phi|^{1-\alpha'}\rho_1'(e^{i\phi})}{\theta}\,d\phi + \frac{A_1h^{2-\alpha'}\rho_1(e^{i\theta})}{h\theta} <$$

$$< \frac{A_2}{\lambda\theta}\int_{0}^{\lambda\theta}\frac{\rho_1'(e^{i\phi})}{\phi^{\alpha'}}\,d\phi + A_1\frac{\rho_1(e^{i\theta})}{\theta^{\alpha'}} < A_2M\left(\frac{\rho_1(e^{i\theta})}{\theta^{\alpha'}}\right) + A_1\frac{\rho_1(e^{i\theta})}{\theta^{\alpha'}}.$$

Учитывая условие (0.9), получаем (1.10) при $h<\lambda\theta$. Пусть теперь $h>\lambda\theta$. Имеем

$$\frac{1}{h}\int_{0}^{h}H(\phi,\theta)\,d\phi < \frac{1}{h}\int_{0}^{\lambda\theta}H(\phi,\theta)\,d\phi + \frac{1}{h}\int_{\lambda\theta}^{h}H(\phi,\theta)\,d\phi.$$

Первое слагаемое в правой части равномерно ограничено величиной $A\rho_1(e^{i\theta})|1-e^{i\theta}|^{-\alpha'}$. Оценим второе слагаемое

$$\frac{1}{h}\int_{\lambda\theta}^{h}H(\phi,\theta)\,d\phi < \frac{1}{h}\int_{\lambda\theta}^{\lambda^{-1}\theta}\frac{\phi^{1-\alpha'}\left|\rho_1'(e^{i\phi})-\rho_1'(e^{i\theta})\right|}{|\theta-\phi|}\,d\phi +$$

$$+\frac{1}{h}\int_{\lambda^{-1}\theta}^{h}\frac{\phi^{1-\alpha'}\rho_1'(e^{i\varphi})}{|\theta-\phi|}\,d\phi+\frac{1}{h}\int_{\lambda^{-1}\theta}^{h}\frac{\phi^{1-\alpha'}\rho_1'(e^{i\theta})}{|\theta-\phi|}\,d\phi.$$

Учитывая Лемму 5, будем иметь

$$\frac{1}{h}\int_{\lambda\theta}^{\lambda^{-1}\theta}\frac{\phi^{1-\alpha'}\left|\rho_1'(e^{i\phi})-\rho_1'(e^{i\theta})\right|}{|\theta-\phi|}\,d\phi<\frac{A_3}{h}\int_{\lambda\theta}^{\lambda^{-1}\theta}\frac{\phi^{1-\alpha'}\rho_1'(e^{i\theta})}{\theta}\,d\phi<A_4\frac{\rho_1(e^{i\theta})}{\theta^{\alpha'}}.$$

Следовательно

$$\frac{1}{h}\int_{\lambda^{-1}\theta}^{h}\frac{\phi^{1-\alpha'}\rho_1'(e^{i\phi})}{|\theta-\phi|}\,d\phi<\frac{A_5}{h}\int_{\lambda^{-1}\theta}^{h}\frac{\rho_1'(e^{i\phi})}{\phi^{\alpha'}}\,d\phi<\frac{A_6 2\theta}{h}\frac{1}{2\theta}\int_{2\theta-h}^{h}\frac{\rho_1'(e^{i\phi})}{\phi^{\alpha'}}\,d\phi<$$

$$<2A_6M\left(\frac{\rho_1(e^{i\theta})}{\theta^{\alpha'}}\right)<A_7\frac{\rho_1(e^{i\theta})}{\theta^{\alpha'}},$$

$$\frac{1}{h}\int_{\lambda^{-1}\theta}^{h}\frac{\phi^{1-\alpha'}\rho_1'(e^{i\theta})}{|\theta-\phi|}\,d\phi<\frac{A_8}{h}\int_{\lambda^{-1}\theta}^{h}\frac{\rho_1'(e^{i\theta})}{\phi^{\alpha'}}\,d\phi<A_9\frac{\rho_1(e^{i\theta})}{\theta^{\alpha'}}.$$

Лемма 7 доказана.

Лемма 8. Пусть τ – произвольная точка на единичной окружности T, а $\mu\in[0,1]$. Тогда

$$\sup_{\tau\in T}\frac{|1-\tau|^{1-\mu}}{2\pi}\int_T\frac{|1-t|^{\mu}(1-r)}{|1-rt|^2|\tau-r^{-1}t|}\,|dt|<\infty. \tag{1.11}$$

Доказательство : Так как

$$\left||1-\tau|^{1-\mu}-|\tau-r^{-1}t|^{1-\mu}\right|<C|1-rt|^{1-\mu},\quad |1-t|<2|1-rt|,$$

то

$$\frac{|1-\tau|^{1-\mu}}{2\pi}\int_T\frac{|1-t|^{\mu}(1-r)}{|1-rt|^2|\tau-r^{-1}t|}\,|dt|<\frac{1}{\pi}\int_T\frac{|1-\tau|^{1-\mu}(1-r)}{|1-rt|^{2-\mu}|\tau-r^{-1}t|}\,|dt|\le$$

$$\le\frac{1}{\pi}\int_T\frac{\left||1-\tau|^{1-\mu}-|\tau-r^{-1}t|^{1-\mu}\right|(1-r)}{|1-rt|^{2-\mu}|\tau-r^{-1}t|}\,|dt|+\frac{1}{\pi}\int_T\frac{(1-r)}{|1-rt|^{2-\mu}|\tau-r^{-1}t|^{\mu}}\,|dt|\le$$

$$\le\frac{1}{\pi}\int_T\frac{(1-r)}{|1-rt|^2}\,|dt|+\frac{1}{\pi}\int_T\frac{(1-r)}{|\tau-r^{-1}t|^2}\,|dt|+C\int_T\frac{(1-r)}{|1-rt|\cdot|\tau-r^{-1}t|}\,|dt|<2+2\pi C.$$

Лемма 8 доказана.

Лемма 9. Пусть $\rho(t)\in R_\alpha$ и выполняется неравенство (0.9). Тогда

$$\sup_{\tau\in T}\frac{|1-\tau|^{\alpha'}}{\rho_1(\tau)}\int_T\frac{|1-t|^{1-\alpha'}(1-r)\rho_1(t)}{|1-rt|^2|\tau-r^{-1}t|}\,|dt|<\infty, \tag{1.12}$$

где α' определяется формулой (0.8).

Доказательство : Так как представление (1.3) выполняется, то достаточно доказать, что

$$\sup_{\tau\in T}\frac{|1-\tau|^{\alpha'}}{\rho_1'(\tau)}\int_T\frac{|1-t|^{1-\alpha'}(1-r)\rho_1'(t)}{|1-rt|^2|\tau-r^{-1}t|}\,|dt|<\infty.$$

Учитывая Лемму 8, нужно показать, что

$$\sup_{\tau\in T}\frac{|1-\tau|^{\alpha'}}{\rho_1'(\tau)}\int_T\frac{|1-t|^{1-\alpha'}(1-r)\,|\rho_1'(t)-\rho_1'(\tau)|}{|1-rt|^2|\tau-r^{-1}t|}\,|dt|<\infty.$$

Для произвольного $\tau\in T$, $\tau\neq 1$ имеем (см. [7])

$$\int_T\frac{|1-t|^{1-\alpha'}(1-r)\,|\rho_1'(t)-\rho_1'(\tau)|}{|1-rt|^2|\tau-r^{-1}t|}\,|dt|<$$
$$<A_1\sup\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\frac{|1-e^{i\phi}|^{1-\alpha'}\,|\rho_1'(e^{i\phi})-\rho_1'(e^{i\theta})|}{|e^{i\theta}-re^{i\phi}|}\,d\phi.$$

Используя Леммы 6 и 7 завершаем доказательство.

Лемма 10. Пусть $\rho(e^{i\theta})\in R_\alpha$ и $0\leq\alpha<1$. Тогда

$$\sup_{\tau\in T}\frac{|1-e^{i\theta}|^{1-\alpha}}{\rho_1(e^{i\theta})}\int_T\frac{|1-e^{i\phi}|^{\alpha}(1-r)^3\rho_1(e^{i\phi})}{|1-re^{i\phi}|^2|e^{i\theta}-re^{i\phi}|^2}\,d\phi<\infty,\quad r\in(0,1).$$

Доказательство : Пусть $\alpha\in(0,1)$. Так как

$$|1-e^{i\phi}|\leq 2|1-re^{i\phi}|,\quad 1-r<|e^{i\theta}-re^{i\phi}|,\quad 1-r<|1-re^{i\phi}|,$$

для любого $\theta\in(0,\pi)$, то имеем

$$\frac{|1-e^{i\theta}|^{1-\alpha}}{\rho_1(e^{i\theta})}\int_T\frac{|1-e^{i\phi}|^{\alpha}(1-r)^3\rho_1(e^{i\phi})}{|1-re^{i\phi}|^2|e^{i\theta}-re^{i\phi}|^2}\,d\phi<C\frac{|1-e^{i\theta}|^{1-\alpha}}{\rho_1(e^{i\theta})}\int_T\frac{\rho_1(e^{i\phi})}{|1-e^{i\phi}|^{1-\alpha}}\,d\phi.$$

Из определения класса R_α следует, что

$$\rho_1(e^{i\phi})|1-e^{i\phi}|^{1-\alpha}\in L^1(T),\quad \sup|1-e^{i\theta}|^{1-\alpha}\big(\rho_1(e^{i\theta})\big)^{-1}<\infty.$$

Таким образом, для $\alpha\in(0,1)$ доказательство завершено. Пусть теперь $\alpha=0$. По определению класса R_α существует $\delta>0$ такое, что $\theta^{-(1-\delta)}\rho_1(e^{i\theta})$ ограничено снизу положительным числом. Поэтому

$$\frac{|1-e^{i\theta}|}{\rho_1(e^{i\theta})}\int_T\frac{(1-r)^3\rho_1(e^{i\phi})}{|1-re^{i\phi}|^2|e^{i\theta}-re^{i\phi}|^2}\,d\phi=$$
$$=\frac{|1-e^{i\theta}|^{1-\delta}}{\rho_1(e^{i\theta})}\int_T\frac{(1-r)^3\rho_1(e^{i\phi})}{|1-re^{i\phi}|^{2-\delta}|e^{i\theta}-re^{i\phi}|^2}\,d\phi+$$

$$+\frac{|1-e^{i\theta}|^{1-\delta}}{\rho_1(e^{i\theta})}\int_T \frac{(1-r)^3\rho_1(e^{i\phi})}{|1-re^{i\phi}|^{2-\delta}|e^{i\theta}-re^{i\phi}|^2}\left(\left|\frac{1-e^{i\theta}}{1-re^{i\phi}}\right|^{\delta}-1\right)\,d\phi<$$

$$< A_1\left(\int_T \frac{(1-r)^3\rho_1(e^{i\phi})}{|1-re^{i\phi}|^{2-\delta}|e^{i\theta}-re^{i\phi}|^2}\,d\phi+\int_T \frac{(1-r)^3\rho_1(e^{i\phi})}{|1-re^{i\phi}|^{2}|e^{i\theta}-re^{i\phi}|^{2-\delta}}\,d\phi\right)<$$

$$< A_2\left(\int_T \frac{(1-r)\rho_1(e^{i\phi})}{|1-re^{i\phi}|^{2-\delta}}\,d\phi+\int_T \frac{(1-r)\rho_1(e^{i\phi})}{|e^{i\theta}-re^{i\phi}|^{2-\delta}}\,d\phi\right).$$

Применяя неравенство Гёльдера будем иметь

$$\int_T \frac{(1-r)\rho_1(e^{i\phi})}{|e^{i\theta}-re^{i\phi}|^{2-\delta}}\,d\phi<\|\rho_1\|_p\left(\int_T \frac{(1-r)^q}{|e^{i\theta}-re^{i\phi}|^{q(2-\delta)}}\,d\phi\right)^{1/q}.$$

Пусть $q<(1-\delta)^{-1}$. Тогда $q(2-\delta)<q+1$ и

$$\int_T \frac{(1-r)^q}{|e^{i\theta}-re^{i\phi}|^{q(2-\delta)}}\,d\phi<A_2,\quad \int_T \frac{(1-r)\rho_1(e^{i\phi})}{|e^{i\theta}-re^{i\phi}|^{2-\delta}}\,d\phi<A_3\|\rho_1\|_p.$$

Аналогично получаем

$$\int_T \frac{(1-r)\rho_1(e^{i\phi})}{|1-re^{i\phi}|^{2-\delta}}\,d\phi<A_4\|\rho_1\|_p.$$

Лемма 10 доказана.

Лемма 11. Пусть $\rho(t)\in R_\alpha$ и $\alpha\in[0,1)$. Тогда

$$\sup_{\theta\in[-\pi,\pi],r<1}\frac{|1-e^{i\theta}|^{1-\alpha}}{\rho_1(e^{i\theta})}\times$$
$$\times\int_{T_{a,\theta}}\frac{|1-e^{i\phi}|^{\alpha}(1-r^2)(r|1-e^{i\theta}|+(1+r^2)|1-e^{i\phi}|)\rho_1(e^{i\phi})}{|1-re^{i\phi}|^2|e^{i\theta}-re^{i\phi}|^2}\,d\phi<\infty,$$

где $T_{a,\theta}=\{\phi:|1-e^{i\phi}|>a|1-e^{i\theta}|,\ a>0\}$.

Доказательство : Достаточно показать, что

$$\sup_{\theta\in[-\pi,\pi],r<1}\frac{|1-e^{i\theta}|^{1-\alpha}}{\rho_1'(e^{i\theta})}\int_{T_{a,\theta}}H_2(\phi)\,d\phi<\infty, \tag{1.13}$$

где

$$H_2(\phi)=\frac{|1-e^{i\phi}|^{1+\alpha}(1-r^2)\rho_1'(e^{i\phi})}{|1-re^{i\phi}|^2|e^{i\theta}-re^{i\phi}|^2},$$

а ρ_1' определяется формулой (1.8). Пусть для определённости $\theta>0$. Выражение в (1.13) представим в виде суммы $J_1(r,\theta)+I_2(r,\theta)$, где

$$I_k(r,\theta)=\frac{|1-e^{i\theta}|^{1-\alpha}}{\rho_1'(e^{i\theta})}\int_{T^k_{a,\theta}}H_2(\phi)\,d\phi<\infty,\quad k=1,2,$$

$$T^1_{a,\theta}=\{\phi:a|1-e^{i\theta}|<|1-e^{i\phi}|<|1-e^{i\theta}|\},\quad T^2_{a,\theta}=\{\phi:|1-e^{i\phi}|>|1-e^{i\theta}|\}.$$

Так как $2|1-re^{i\phi}| > |1-e^{i\phi}|$ и функция $|1-e^{i\phi}|^{-(1-\alpha)}\rho_1'(e^{i\phi})$ почти монотонно убывающая на $(0,\pi)$, то

$$I_2(r,\theta) < A_1 \frac{|1-e^{i\theta}|^{1-\alpha}}{\rho_1'(e^{i\theta})} \frac{\rho_1'(e^{i\theta})}{|1-e^{i\theta}|^{1-\alpha}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-r^2)}{|e^{i\theta}-re^{i\phi}|^2}\, d\phi < A_1.$$

Оценим $I_1(r,\theta)$. В силу Леммы 9, достаточно оценить функцию

$$I_1'(r,\theta) = \frac{|1-e^{i\theta}|^{1-\alpha}}{\rho_1'(e^{i\theta})} \int_{T^2_{a,\theta}} \frac{|1-e^{i\phi}|^{1+\alpha}(1-r^2)|\rho_1'(e^{i\phi})-\rho_1'(e^{i\theta})|}{|1-re^{i\phi}|^2|e^{i\theta}-re^{i\phi}|^2}\, d\phi.$$

Учитывая неравенство $2|e^{i\theta}-re^{i\phi}| > |e^{i\theta}-e^{i\phi}|$, в силу Леммы 6 получим

$$I_1'(r,\theta) < \frac{|1-e^{i\theta}|^{1-\alpha}}{\rho_1'(e^{i\theta})} \int_{T^2_{a,\theta}} \frac{|\rho_1'(e^{i\phi})-\rho_1'(e^{i\theta})|}{|1-re^{i\phi}|\cdot|e^{i\theta}-re^{i\phi}|^{1-\alpha}}\, d\phi <$$
$$< \frac{A_2}{|1-e^{i\theta}|^{\alpha}} \int_{T^2_{a,\theta}} \frac{d\phi}{|1-re^{i\phi}|^{1-\alpha}} < A_3.$$

Лемма 11 доказана.

Лемма 12. Пусть $\rho(t)\in R_\alpha$, $\alpha\in[0,1)$ и для некоторой последовательности $t_k = e^{i\theta_k}\in T$ имеем

$$M\left(\frac{\rho_1(e^{i\theta_k})}{|1-e^{i\theta_k}|^{\mu}}\right) \geq c_k \frac{\rho_1(e^{i\theta_k})}{|1-e^{i\theta_k}|^{\mu}}, \tag{1.14}$$

где $c_k\to\infty$, $\mu = 1-\alpha$ если $\alpha\neq 0$ и $\mu\in(0,1)$ произвольное, если $\alpha = 0$. Тогда семейство функций

$$A_r(\theta) = \frac{|1-e^{i\theta}|^{\mu}}{\rho_1(e^{i\theta})} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|1-e^{i\phi}|^2(1-r^2)}{|1-re^{i\phi}|^2|e^{i\theta}-re^{i\phi}|^2} \frac{\rho_1(e^{i\phi})}{|1-e^{i\phi}|^{\mu}}\, d\phi, \quad r\in(0,1)$$

не является ограниченным по r для $\theta\in[-\pi,\pi]$.

Доказательство : Пусть $\alpha > 0$. Для любых a, d, $0 < a < d$ будем иметь

$$A_r(\theta) \geq \frac{|1-e^{i\theta}|^{1-\alpha}}{\rho_1(e^{i\theta})} \frac{a^2}{2} \int_{T_{a,d,r,\theta}} \frac{(1-r^2)}{|e^{i\theta}-re^{i\phi}|^2} \frac{\rho_1(e^{i\phi})}{|1-e^{i\phi}|^{1-\alpha}}\, d\phi \geq$$
$$\geq \frac{|1-e^{i\theta}|^{1-\alpha}}{\rho_1(e^{i\theta})} \frac{a^2 d}{2(1+d^2)} \frac{1}{2d(1-r)} \int_{T_{a,d,r,\theta}} \frac{\rho_1(e^{i\phi})}{|1-e^{i\phi}|^{1-\alpha}}\, d\phi, \tag{1.15}$$

где

$$T_{a,d,r,\theta} = \{\phi :\ |1-e^{i\phi}| > a(1-r),\ |\phi-\theta| < d(1-r)\}.$$

Для определённости предположим, что $\theta_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots..$ Пусть r_k – числа, удовлетворяющие равенству

$$M\left(\frac{\rho_1(e^{i\theta_k})}{|1-e^{i\theta_k}|^{1-\alpha}}\right) = \frac{1}{2d(1-r_k)} \int_{|\phi-\theta_k|<d(1-r_k)} \frac{\rho_1(e^{i\phi})}{|1-e^{i\phi}|^{1-\alpha}}\, d\phi. \tag{1.16}$$

Так как функция $|1-e^{i\phi}|^{1-\alpha}\rho_1(e^{i\phi})$ почти монотонно убывает, то можно предположить, что $|\theta_k|(1-r_k)^{-1}\to 0$. Положим

$$M^+(\theta_k)=\frac{1}{2d(1-r_k)}\int_{0<\phi-\theta_k<d(1-r_k)}\frac{\rho_1(e^{i\phi})}{|1-e^{i\phi}|^{1-\alpha}}\,d\phi,$$

$$M^-(\theta_k)=\frac{1}{2d(1-r_k)}\int_{-d(1-r_k)<\phi-\theta_k<0}\frac{\rho_1(e^{i\phi})}{|1-e^{i\phi}|^{1-\alpha}}\,d\phi.$$

Из (1.14) следует, что для заданного $k=1,2,\dots$ имеет место хотя бы одно из следующих неравенств :

$$M^+(\theta_k)\ge\frac{c_k}{2}\frac{\rho_1(e^{i\theta_k})}{|1-e^{i\theta_k}|^{1-\alpha}},\tag{1.17}$$

$$M^-(\theta_k)\ge\frac{c_k}{2}\frac{\rho_1(e^{i\theta_k})}{|1-e^{i\theta_k}|^{1-\alpha}}.\tag{1.18}$$

Предположим сначала, что имеет место (1.17). Из (1.15) будем иметь

$$A_{r_k}(\theta_k)\ge\frac{|1-e^{i\theta_k}|^{1-\alpha}}{\rho_1(e^{i\theta_k})}\frac{a^2d}{4}\frac{1}{2d(1-r_k)}\left[\int_{T_d}\frac{\rho_1(e^{i\phi})}{|1-e^{i\phi}|^{1-\alpha}}\,d\phi-\right.$$
$$\left.-\int_{T_a}\frac{\rho_1(e^{i\phi})}{|1-e^{i\phi}|^{1-\alpha}}\,d\phi\right]\ge\frac{|1-e^{i\theta_k}|^{1-\alpha}}{\rho_1(e^{i\theta_k})}\frac{a^2d}{4}\left[M^+(\theta_k)-\frac{a}{d}M\left(\frac{\rho_1(e^{i\theta_k})}{|1-e^{i\theta_k}|^{1-\alpha}}\right)\right],$$

где $T_d=\{\phi:0<\phi-\theta_k<d(1-r_k)\}$. Предполагая, что $d>4a$ и учитывая (1.12) и (1.16), получаем $A_{r_k}(\theta_k)>a^2dc_k/8$.

Предположим теперь, что выполнено (1.18). Возможны два случая. Пусть множества $|\phi-\theta_k|<d(1-r_k)$ и $|\phi|<a(1-r_k)$ не пересекаются. Согласно (1.15) и (1.16) будем иметь

$$A_{r_k}(\theta_k)>\frac{a^2dc_k}{1+d^2}\frac{|1-e^{i\theta_k}|^{1-\alpha}}{\rho_1(e^{i\theta_k})}M\left(\frac{\rho_1(e^{i\theta_k})}{|1-e^{i\theta_k}|^{1-\alpha}}\right)\ge\frac{a^2dc_k}{1+d^2}.$$

Пусть теперь множества $|\phi-\theta_k|<d(1-r_k)$ и $|\phi|<a(1-r_k)$ пересекаются. Выберем числа a и d так, чтобы $d>4a$. Для $1-r'_k=3(1-r_k)$ из формулы (1.12) получаем

$$A_{r'_k}(\theta_k)>\frac{a^2|1-e^{i\theta_k}|^{1-\alpha}}{6(1+d^2)\rho_1(e^{i\theta_k})(1-r_k)}\int_{|\phi|>a(1-r_k),|\phi-\theta_k|<d(1-r_k)}\frac{\rho_1(e^{i\phi})}{|1-e^{i\phi}|^{1-\alpha}}\,d\phi\ge$$

$$\ge\frac{a^2d}{3(1+d^2)}\frac{|1-e^{i\theta_k}|^{1-\alpha}}{\rho_1(e^{i\theta_k})}\left[\frac{1}{6d(1-r_k)}\int_{-3d(1-r_k)+\theta_k}^{\theta_k}\frac{\rho_1(e^{i\phi})}{|1-e^{i\phi}|^{1-\alpha}}\,d\phi-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2d(1-r_k)}\int_{-a(1-r_k)}^{\theta_k}\frac{\rho_1(e^{i\phi})}{|1-e^{i\phi}|^{1-\alpha}}d\phi\right]\ge$$

$$\geq \frac{a^2 d}{3(1+d^2)} \frac{|1-e^{i\theta_k}|^{1-\alpha}}{\rho_1(e^{i\theta_k})} \left[\frac{1}{3} M^-(\theta_k) - \frac{\theta_k + a(1-r_k)}{d(1-r_k)} M\left(\frac{\rho_1(e^{i\theta_k})}{|1-e^{i\theta_k}|^{1-\alpha}}\right)\right].$$

Учитывая теперь, что $\theta_k(1-r_k)^{-1} \to 0$ при $k \to \infty$ и неравенство $d > 4a$, получаем

$$\frac{\theta_k + a(1-r_k)}{d(1-r_k)} < \frac{1}{8}.$$

Следовательно, в силу (1.14) и (1.18) имеем

$$A_{r'_k}(\theta_k) > \frac{a^2 d}{3(1+d^2)} \frac{|1-e^{i\theta_k}|^{1-\alpha}}{\rho_1(e^{i\theta_k})} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) M\left(\frac{\rho_1(e^{i\theta_k})}{|1-e^{i\theta_k}|^{1-\alpha}}\right) \geq mc_k,$$

где m – постоянная, не зависящая от k. Это доказывает результат для $\alpha > 0$.

Пусть теперь $\alpha = 0$ и $\theta > 0$. Так как функция $|1-e^{i\phi}|^{-\mu}\rho_1(e^{i\phi})$ почти монотонно убывает на $(0, \pi)$, то

$$M^+(\theta, \mu) = \frac{1}{2d(1-r_k)} \int_{|\phi-\theta_k|<d(1-r_k)} \frac{\rho_1(e^{i\phi})}{|1-e^{i\phi}|^{\mu}}\, d\phi < A \frac{\rho_1(e^{i\theta})}{|1-e^{i\theta}|^{1-\alpha}},$$

где A – постоянная. Из этой оценки и из (1.14) будем иметь

$$M^-(\theta, \mu) \geq a_1 c_k \frac{\rho_1(e^{i\theta_k})}{|1-e^{i\theta_k}|^{1-\alpha}}, \quad a_1 > 0.$$

Имеем также

$$A_{r_k}(\theta_k) > \frac{|1-e^{i\theta_k}|}{\rho_1(e^{i\theta_k})} \frac{a}{2} \int_{a(1-r)<|\phi|<\theta} \frac{(1-r_k^2)\rho_1(e^{i\phi})\, d\phi}{|1-r_k e^{i\phi}||e^{i\theta_k} - r_k e^{i\phi}|^2} >$$

$$> \frac{|1-e^{i\theta_k}|^{\mu}}{\rho_1(e^{i\theta_k})} \frac{a^2 d}{2(1+d^2)} \frac{1}{2d(1-r_k)} \int_{T'_{a,d}} \frac{\rho_1(e^{i\phi}) d\phi}{|1-e^{i\phi}|^{\mu}},$$

где $T'_{a,d} = \{\phi : a(1-r_k) < |\phi| < \theta_k,\ \theta_k - d(1-r_k) < \phi < \theta_k\}$. Повторяя эти рассуждения, можно получить результат и для $\alpha = 0$. Лемма 12 доказана.

§2. ОДНОРОДНАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ В $L^1(\rho)$

Пусть $\Phi^+(z)$ – аналитическая функция в $D^+ = \{z : |z| < 1\}$. Положим $D^- = \{z : |z| > 1\}$ и рассмотрим функцию $\Phi(z)$, определённую на $D^+ \cup D^-$ по формуле

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Phi^+(z), & \text{при } z \in D^+, \\ \overline{\Phi^+(\overline{z}^{-1})}, & \text{при } z \in D^-. \end{cases}$$

Для произвольной аналитической функции $\Phi(z)$ в $D^+ \cup D^-$ обозначим через $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ сужения функции $\Phi(z)$ на D^+ и D^-, соответственно. Условие (0.1) можно записать в виде

$$\left\|\Phi^+(rt) + \Phi^-(r^{-1}t) - 2f(t)\right\|_{L^1(\rho)} = 0. \tag{2.1}$$

Задачи (0.1) и (2.1) эквивалентны в том смысле, что если $u(z)$ является решением (0.1), то представляя $u(z)$ в виде $u(z) = \operatorname{Re} \Phi^+(z)$ и доопределив функцию на D^- как и выше, мы получаем решение задачи (2.1). Верно и обратное : если $\Phi(z)$ является решением задачи (2.1), то

$$u(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{2}\left(\Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z}^{-1})}\right), \quad z \in D^+ \tag{2.2}$$

является решением задачи (0.1). Следовательно, задачи (0.1) и (2.1) одновременно обладают свойством нётеровости. Мы будем исследовать задачу (2.1) в классе аналитических функций $f(e^{i\phi}) \in L^1(\rho)$, а затем сформулируем соответствующие результаты для задачи (0.1).

Теорема 1. Для любого $\rho(t) \in R_\alpha$ справедливы следующие утверждения :

a) Если α – нецелое, то общее решение однородной задачи (2.1) можно представить в виде

$$\Phi(z) = \frac{P(z)}{(1-z)^\gamma}, \quad \gamma = [\alpha] + 1, \tag{2.3}$$

где $P(z)$ – произвольный полином порядка γ.

b) Если α – целое и функция $\rho_1(e^{i\theta})$ в представлении (0.6) удовлетворяет условию

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} \rho_1(e^{i\theta})\, d\theta = 0, \tag{2.4}$$

то общее решение однородной задачи (2.1) можно представить в виде (2.3).

c) Если α – целое и условие (2.4) не имеет места, то общее решение однородной задачи (2.1) можно представить в виде (2.3), причём $\gamma = \alpha$.

Доказательство : Пусть $\Phi(z)$ – ограниченное на бесконечности решение однородной задачи (2.1). Имеем

$$\lim_{r\to 1-0} \left\|\Phi^+(rt)(1-t)^\gamma + \Phi^-(r^{-1}t)(1-t)^\gamma\right\|_{L^1} = 0.$$

Положим

$$f_r(t) = \Phi^+(rt)(1-t)^\gamma + \Phi^-(r^{-1}t)(1-t)^\gamma.$$

Функции $\Phi^+(rz)(1-z)^\gamma$ и $\Phi^-(r^{-1}z)(1-z)^\gamma$ принадлежат классу Гёльдера, причём функция $\Phi^-(r^{-1}z)(1-z)^\gamma$ имеет порядок γ на бесконечности. Поэтому

$$\begin{aligned}\Phi^+(rz)(1-z)^\gamma &= \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f_r(t)}{t-z}\,dt + P_r(z),\\ \Phi^-(r^{-1}z)(1-z)^\gamma &= \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f_r(t)}{t-z}\,dt + P_r(z),\end{aligned} \tag{2.5}$$

где $P_r(z)$ – главная часть функции $\Phi^-(r^{-1}z)(1-z)^\gamma$ на бесконечности. Переходя к пределу в (2.5) и учитывая, что $f_r(t) \to 0$ в L^1, получаем (2.3).

Теперь приведём условия, при которых функция (2.3) является решением однородной задачи (2.1). Сначала предположим, что α – нецелое число. Докажем, что функция (2.3) удовлетворяет условию (2.1) для любого полинома $P(z)$ порядка γ. Очевидно, что достаточно рассмотреть случай, когда $P(z) \equiv 1$. В этом случае имеем $\Phi(z) = (1-z)^{-\gamma}$ и

$$\left\|\Phi^+(rt) + \Phi^-(r^{-1}t)\right\|_{L^1(\rho)} \le C\int_T \left|\frac{1}{(1-rt)^\gamma} - \frac{1}{(1-r^{-1}t)^\gamma}\right| |1-t|^{\alpha-\varepsilon}dt,$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно мало, а C – постоянная, зависящая от ε. При $|1-t| < 1-r$ имеем

$$\begin{aligned}I_1(r) &= \int_{|1-t|<1-r}\left|\frac{1}{(1-rt)^\gamma} - \frac{1}{(1-r^{-1}t)^\gamma}\right| |1-t|^{\alpha-\varepsilon}|dt| \le \\ &\le C_1\int_{|1-t|<1-r}\frac{(1-r)^\gamma}{|1-rt|^{2\gamma}}|1-t|^{\alpha-\varepsilon}|dt| \le C_2\int_T\frac{(1-r)^{\gamma+\alpha-\varepsilon}}{|1-rt|^{2\gamma}}|dt| \le \\ &\le C_2\int_T\frac{(1-r)^{1+\{\alpha\}-\varepsilon}}{|1-rt|^2}|dt| = C_2 2\pi(1-r)^{\{\alpha\}-\varepsilon}.\end{aligned}$$

Следовательно, если $\varepsilon < \{\alpha\}$, то $I_1(r) \to 0$ при $r \to 1$. Предположим теперь, что $|1-t| > 1-r$. Имеем $|1-t| > 2^{-1}|1-rt|$ и

$$\left|\frac{1}{(1-rt)^\gamma} - \frac{1}{(1-r^{-1}t)^\gamma}\right| < C_3\frac{(1-r)}{|1-rt|^{2\gamma}}|1-t|^{\gamma-1}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}I_2(r) &= \int_{|1-t|>1-r}\left|\frac{1}{(1-rt)^\gamma} - \frac{1}{(1-r^{-1}t)^\gamma}\right| |1-t|^{\alpha-\varepsilon}|dt| \le \\ &\le C_4\int_T\frac{(1-r)}{|1-rt|^{2\gamma}}|1-t|^{\gamma+\alpha-\varepsilon-1}|dt| \le \\ &\le C_2\left(\int_T\frac{(1-r)}{|1-rt|^{2\gamma}}|1-rt|^{\gamma+\alpha-\varepsilon-1}|dt| + \int_T\frac{(1-r)^{\gamma+\alpha-\varepsilon}}{|1-rt|^{2\gamma}}|dt|\right) \le \\ &\le C_3\int_T\frac{(1-r)}{|1-rt|^{\gamma-\alpha+1-\varepsilon}}\,dt.\end{aligned}$$

Если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то $\gamma - \alpha + 1 - \varepsilon < 2$. Следовательно $I_2(r) \to 0$ при $r \to 1$. Тем самым утверждение a) теоремы доказано. Рассмотрим случай, когда α целое. Используя Лемму 1, получаем

$$\left\|\Phi^+(rt) + \Phi^-(r^{-1}t)\right\|_{L^1(\rho)} \le C\int_T\left|\frac{1}{(1-rt)^\gamma} - \frac{1}{(1-r^{-1}t)^\gamma}\right| |1-t|^{\gamma-1}\rho_1(t)\ |dt| \le$$

$$\leq C\left(\int_T \frac{(1-r)^\gamma}{|1-rt|^{2\gamma}}|1-t|^{\gamma-1}\rho_1(t)\,|dt| + \int_T \frac{(1-r)}{|1-rt|^{2\gamma}}|1-t|^{2\gamma-2}\rho_1(t)\,|dt|\right) \leq$$
$$\leq 2C\int_T \frac{1-r}{|1-rt|^2}\rho_1(t)\,|dt| \leq 2C\int_T \frac{1-r}{|1-rt|^2}\rho_1(t)\,|dt|. \tag{2.6}$$

Предположим, что $\rho_1(t)$ удовлетворяет условию (2.4). Для $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ так, чтобы из неравенства $|h| < \delta$ следовало бы

$$\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \rho_1(e^{i\theta})\,d\theta < \varepsilon. \tag{2.7}$$

Далее, представим функцию $\rho_1(t)$ в виде $\rho_1(t) = \rho_2(t) + \rho_3(t)$, где

$$\rho_2(t) = \begin{cases} \rho_1(t) & \text{при } |\arg t| < \delta, \\ 0 & \text{при } \delta < |\arg t| < \pi. \end{cases}$$

Из (2.6) имеем

$$\left\|\Phi^+(rt) + \Phi^-(r^{-1}t)\right\|_{L^1(\rho)} \leq C\int_T \frac{1-r}{|1-rt|^2}(\rho_2(t) + \rho_3(t))\,|dt| \leq$$
$$\leq CM(\rho_2(1)) + \int_T \frac{1-r}{|1-rt|^2}\rho_3(t)\,|dt|.$$

Так как по (2.7) имеем $M(\rho_2(1)) < \varepsilon$ и

$$\lim_{r\to 1-0}\int_T \frac{1-r}{|1-rt|^2}\rho_3(t)\,|dt| = 0,$$

то окончательно

$$\lim_{r\to 1-0}\left\|\Phi^+(rt) + \Phi^-(r^{-1}t)\right\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Тем самым доказано утверждение b). Перейдём к доказательству утверждения c). Предположим, что

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\,\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \rho_1(e^{i\theta})\,d\theta > 0. \tag{2.8}$$

Покажем, что функция $(1-z)^{-\gamma}$ не удовлетворяет условию (2.1). Для этого заметим, что функции

$$g_1(h) = \frac{1}{h}\int_0^h \rho_1(e^{i\theta})\,d\theta > 0, \quad g_2(h) = \frac{1}{h}\int_h^{2h} \rho_1(e^{i\theta})\,d\theta$$

одновременно стремятся или не стремятся к нулю. Действительно, если $g_1(h) \to 0$, то $0 < g_2(h) < 2g_1(2h)$ и поэтому $g_2(h) \to 0$. Обратно, если $g_2(h) \to 0$, то $g_2(h)$ ограничена в некоторой окрестности нуля и

$$0 < g_1(h) = \frac{1}{h}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h}{2^n}g_2\left(\frac{h}{2^n}\right) < \max_{t\in[0,h]} g_2(t),$$

то $g_1(h) \to 0$. Далее

$$\int_T \left| \frac{1}{(1-rt)^\gamma} - \frac{1}{(1-r^{-1}t)^\gamma} \right| |1-t|^{\gamma-1} \rho_1(t) \, |dt| \ge$$
$$\ge \int_{|\theta|>h} \frac{1-r}{|1-re^{i\theta}|^{\gamma+1}} |\theta|^{\gamma-1} \rho_1(e^{i\theta}) \, |d\theta| \ge$$

$$\ge \int_{|\theta|>h} \frac{1-r}{|1-re^{i\theta}|^2} \rho_1(e^{i\theta}) \, |d\theta| \ge \frac{2}{5h} \int_{h\le|\theta|<2h} \rho_1(e^{i\theta}) \, |d\theta| = \frac{2}{5} g_2(h),$$

где $h = \gamma(1-r)$. Из (2.8) следует, что $g_1(h)$ не стремится к нулю, поэтому и $g_2(h)$ не стремится к нулю. Теорема 1 доказана.

Из Теоремы 1 и (2.2) непосредственно вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $\rho(t) \in A_\alpha$, $\alpha \ge 0$. Тогда справедливы следующие утверждения :

a) Если α – нецелое, то общее решение однородной задачи Дирихле (0.1) можно представить в виде

$$u(z) = \mathbf{Re} \, \frac{P(z)}{(1-z)^\gamma}, \quad \gamma = [\alpha] + 1, \tag{2.9}$$

где коэффициенты многочлена $P(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_\gamma z^\gamma$ удовлетворяют условию $a_k = \overline{a_{\gamma-k}}$, если γ – нечётное число, и $a_k = -\overline{a_{\gamma-k}}$, если γ – чётное.

b) Если α – целое и функция $\rho(t)$ удовлетворяет условию (2.4), то общее решение однородной задачи Дирихле (0.1) можно представить в виде (2.9).

c) Пусть α – целое, а функция $\rho(t)$ не удовлетворяет условию (2.4), тогда общее решение однородной задачи Дирихле (0.1) имеет представление вида (2.9) для $\gamma = \alpha$.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ А

Вначале рассмотрим случай, когда α – нецелое. Пусть функция $\Phi(z)$ удовлетворяет условию (2.1). Тогда

$$\lim_{r\to 1-0} \left\| \Phi^+(rt)(1-t)^\gamma + \Phi^-(r^{-1}t)(1-t)^\gamma - 2f(t)(1-t)^\gamma \right\|_{L^1} = 0.$$

Полагая $\Phi_r^+(z) = \Phi^+(rz)(1-z)^\gamma$, при $|z| < 1$, $\Phi_r^-(z) = \Phi^-(r^{-1}z)(1-z)^\gamma$, при $|z| > 1$, и $\Phi_r^+(t) - \Phi_r^-(t) = f_r(t)$, имеем

$$\Phi^+(rz)(1-z)^\gamma = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f_r(t)}{t-z} \, dt + P_r(z), \quad z \in D^+,$$

$$\Phi^-(r^{-1}z)(1-z)^\gamma = \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f_r(t)}{t-z}\,dt + P_r(z), \quad z \in D^-,$$

где $P_r(z)$ – главная часть функции $\Phi_r^-(z)$ на бесконечности. Переходя к пределу и учитывая, что

$$\lim_{r\to 1-0} \|f_r(t) - 2f(t)(1-t)^\gamma\|_{L^1} = 0,$$

получаем

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i(1-z)^\gamma}\int_T \frac{f(t)(1-t)^\gamma}{t-z}\,dt + \frac{P(z)}{(1-z)^\gamma}. \tag{3.1}$$

Для доказательства теоремы необходимо установить, что для любой $f(t) \in L^1(\rho)$ функция $\Phi(z)$, определённая по (3.1), удовлетворяет (2.1). Учитывая Теорему 1, достаточно доказать, что функция

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i(1-z)^\gamma}\int_T \frac{f(t)(1-t)^\gamma}{t-z}\,dt \tag{3.2}$$

удовлетворяет (2.1). Для этого докажем неравенство

$$\left\|\Phi_1^+(rt) - \Phi_1^-(r^{-1}t)\right\|_{L^1(\rho)} \le A\|f(t)\|_{L^1(\rho)}, \tag{3.3}$$

где A – постоянная. Из (3.2) имеем

$$\Phi_1^+(rt) - \Phi_1^-(r^{-1}t) = I_1(r,t) + I_2(r,t), \tag{3.4}$$

где

$$I_1(r,t) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{(1-rt)^\gamma} - \frac{1}{(1-r^{-1}t)^\gamma}\right)\int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^\gamma}{\tau - r^{-1}t}\,d\tau,$$

$$I_2(r,t) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{(1-rt)^\gamma}\int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^\gamma(1-r^2)}{\tau|\tau - rt|^2}\,d\tau.$$

Учитывая Лемму 1, будем иметь $\|I_1(r,t)\|_{L^1(\rho)} =$

$$= \sup_{\|g\|_{L^\infty(\rho^{-1})}\le 1}\left|\int_T\left(\frac{1}{(1-rt)^\gamma} - \frac{1}{(1-r^{-1}t)^\gamma}\right)\int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^\gamma}{\tau - r^{-1}t}\,d\tau\right| \overline{g(t)}\,|dt| \le$$

$$\le C\int_T f(\tau)\rho(t)\frac{|1-\tau|^{1-\{\alpha\}}}{\rho_1(t)}\int_T\left|\frac{1}{(1-rt)^\gamma} - \frac{1}{(1-r^{-1}t)^\gamma}\right|\frac{|1-t|^\alpha\rho_1(t)}{|\tau - r^{-1}t|}\,|dt|\,|d\tau| \le$$

$$\le C\int_T f(\tau)\rho(t)\frac{|1-\tau|^{1-\{\alpha\}}}{\rho_1(t)}\times$$

$$\times\int_T\left|\frac{(1-r^2)\left((1-r)^{\gamma-1} + |1-t|^{\gamma-1}\right)}{|1-rt|^{2\gamma}}\right|\frac{|1-t|^\alpha\rho_1(t)}{|\tau - r^{-1}t|}\,|dt|\,|d\tau| \le$$

$$\le C\int_T f(\tau)\rho(t)\frac{|1-\tau|^{1-\{\alpha\}}}{\rho_1(t)}\int_T\frac{(1-r^2)}{|1-rt|^2}\frac{|1-t|^{\{\alpha\}}\rho_1(t)}{|\tau - r^{-1}t|}|\,dt||d\tau|.$$

Применяя Лемму 9, получим

$$\|I_1(\tau,t)\|_{L^1(\rho)} \le A\|f(t)\|_{L^1(\rho)}. \tag{3.5}$$

Далее имеем

$$\|I_2(\tau,t)\|_{L^1(\rho)} \le \int_T \frac{|1-t|^{\alpha}\rho_1(t)}{|1-\tau t|^{\gamma}} \int_T \frac{f(\tau)|1-\tau|^{\gamma}(1-r^2)}{|\tau-rt|^2}\,|d\tau|\,|dt| \le$$

$$\le \int_T f(\tau)\rho(\tau)\frac{|1-\tau|^{1-\{\alpha\}}}{\rho_1(\tau)} \int_T \frac{(1-r^2)}{|\tau-rt|^2}\frac{|1-t|^{\{\alpha\}}\rho_1(t)}{|1-rt|}\,|dt|\,|d\tau| \le$$

$$\le A_1 \int_T f(\tau)\rho(\tau)\frac{|1-\tau|^{1-\{\alpha\}}}{\rho_1(t)} M\left(\frac{\rho_1(\tau)}{|1-\tau|^{1-\{\alpha\}}}\right)\,|d\tau|.$$

Используя условие (0.9), получаем $\|I_1(\tau,t)\|_{L^1(\rho)} \le A\|f(t)\|_{L^1(\rho)}$. Это доказывает (3.3) для нецелого α.

Теперь используя (3.3), покажем, что функция $\Phi_1(z)$, определённая по (3.2), удовлетворяет условию (2.1). Для произвольной функции $f(t) \in L^1(\rho)$ рассмотрим последовательность функций $\{f_n(t)\}$, определённых следующим образом :

$$f_n(t) = \begin{cases} f(t), & \text{при } |t-1| > n^{-1}, \\ 0, & \text{при } |t-1| < n^{-1}. \end{cases}$$

Имеем

$$\|f_n(t) - f(t)\|_{L^1(\rho)} \to 0. \tag{3.6}$$

Полагая

$$\Phi^{\pm}_{n,1}(z) = \frac{1}{2\pi i(1-z)^{\gamma}} \int_T \frac{f_n(t)(1-t)^{\gamma}}{t-z}\,dt, \quad z \in D^+ \cup D^-,$$

получаем

$$\lim_{r\to 1-0} \left\|\Phi^+_{n,1}(rt) - \Phi^-_{n,1}(r^{-1}t) - f_n(t)\right\|_{L^1(\rho)} = 0. \tag{3.7}$$

Используя (3.2), получаем $\left\|\Phi^+_1(rt) - \Phi^-_1(r^{-1}t) - f_n(t)\right\|_{L^1(\rho)} \le$

$$\le \left\|\left(\Phi^+_1(rt) - \Phi^+_{n,1}(rt)\right) - \left(\Phi^-_1(r^{-1}t) - \Phi^-_{n,1}(r^{-1}t)\right)\right\|_{L^1(\rho)} +$$

$$+ \left\|\Phi^+_{n,1}(rt) - \Phi^-_{n,1}(r^{-1}t) - f_n(t)\right\|_{L^1(\rho)} + \|f_n(t) - f(t)\|_{L^1(\rho)} \le$$

$$\le C\|f_n(t) - f(t)\|_{L^1(\rho)} + \left\|\Phi^+_{n,1}(rt) - \Phi^-_{n,1}(r^{-1}t) - f_n(t)\right\|_{L^1(\rho)}.$$

Из (3.6) и (3.7) следует, что $\Phi_1(z)$, определённая по (3.2), удовлетворяет (2.1).

Пусть теперь α - целое. Из (0.9) следует, что функция $\rho_1(t)$ ограничена снизу некоторым положительным числом. Поэтому, если функция $\Phi(z)$ удовлетворяет (2.1), то

$$\lim_{r\to 1-0}\left\|\Phi^+(rt)(1-t)^\gamma - \Phi^-(r^{-1}t)(1-t)^\gamma - 2f(t)(1-t)^\gamma\right\|_{L^1} = 0.$$

Повторяя рассуждения, использованные выше, будем иметь

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \frac{1}{2\pi i(1-z)^\alpha}\int_T \frac{f(t)(1-t)^\alpha}{t-z}\,dt, \quad z\in D^+\cup D^-, \tag{3.8}$$

где $\Phi_0(z)$ - общее решение однородной задачи (2.1). Учитывая Теорему 1, достаточно установить, что условию (2.1) удовлетворяет функция

$$\Phi_2(z) = \frac{1}{2\pi i(1-z)^\alpha}\int_T \frac{f(t)(1-t)^\alpha}{t-z}\,dt, \quad z\in D^+\cup D^-. \tag{3.9}$$

Докажем неравенство

$$\left\|\Phi_2^+(rt) - \Phi_2^-(r^{-1}t)\right\|_{L^1(\rho)} \le A\|f(t)\|_{L^1(\rho)}. \tag{3.10}$$

Из (3.9) имеем $\Phi_2^+(rt) - \Phi_2^-(r^{-1}t) = I_3(r,t) + I_4(r,t)$, где

$$I_3(r,t) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{(1-rt)^\alpha} - \frac{1}{(1-r^{-1}t)^\alpha}\right)\int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^\alpha}{\tau - r^{-1}t}\,d\tau,$$

$$I_4(r,t) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{(1-rt)^\alpha}\int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^\alpha(1-r^2)}{\tau|\tau - rt|^2}\,d\tau.$$

Применяя Лемму 1, будем иметь $\|I_3(r,t)\|_{L^1(\rho)} \le$

$$\le C\int_T f(\tau)\frac{\rho(t)}{\rho_1(t)}\int_T \left|\frac{1}{(1-rt)^\alpha} - \frac{1}{(1-r^{-1}t)^\alpha}\right| \frac{|1-t|^\alpha\rho_1(t)}{|\tau - r^{-1}t|}\,|dt|\,|d\tau| \le$$

$$\le C\int_T f(\tau)\frac{\rho(t)}{\rho_1(t)}\int_T \frac{1-r}{|1-rt|^2}\frac{|1-t|\rho_1(t)}{|\tau - rt|}\,|dt|\,|d\tau|.$$

По Лемме 9

$$\sup_{\tau\in T, r<1}\frac{1}{\rho_1(t)}\int_T \frac{1-r}{|1-rt|^2}\frac{|1-t|\rho_1(t)}{|\tau - rt|}\,|dt| < \infty.$$

Следовательно, $\|I_3(r,t)\|_{L^1(\rho)} < A\|f(t)\|_{L^1(\rho)}$. Далее имеем

$$\|I_2(r,t)\|_{L^1(\rho)} \le \int_T \frac{|1-t|^\alpha\rho_1(t)}{|1-rt|^\alpha}\int_T \frac{f(\tau)|1-\tau|^\alpha(1-r^2)}{|\tau - rt|^2}\,|d\tau|\,|dt| \le$$

$$\le C\int_T f(\tau)\frac{\rho(\tau)}{\rho_1(\tau)}\int_T \frac{(1-r^2)}{|\tau - rt|^2}\rho_1(t)\,|dt|\,|d\tau| \le$$

$$\le C\int_T f(\tau)\frac{\rho(\tau)}{\rho_1(\tau)}M(\rho_1(\tau))\,|d\tau| \le A\|f(t)\|_{L^1(\rho)}.$$

Тем самым неравенство (3.10) доказано. Аналогично получаем

$$\lim_{r\to 1-0}\left\|\Phi_2^+(rt) - \Phi_2^-(r^{-1}t) - f(t)\right\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Таким образом, общее решение задачи (2.1) представимо в виде (3.2). Учитывая (2.2), завершаем доказательство Теоремы А.

§4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ B И C

Доказательство Теоремы B. Достаточность следует из Теоремы A. Нам остаётся доказать необходимость. Так как согласно Лемме 12 семейство функций $A_r(\theta)$ не является равномерно ограниченным, то существует функция $f_0(t) \geq 0$, $f_0(t) \in L^1(\rho)$ такая, что

$$\overline{\lim_{r\to 1-0}} \int_{-\pi}^{\pi} f_0(e^{i\theta}) A_r(\theta) \rho(e^{i\theta})\, d\theta = \infty. \tag{4.1}$$

Положим $f_1(t) = f_0(t)\exp(-i\arg(1-e^{i\theta}))$. Покажем, что задача (2.1) при $f(t) = f_1(t)$ не имеет решения. Допуская обратное, решение этой задачи для функции $f_1(t)$ как и при доказательстве Теоремы A, представим в виде

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i(1-z)} \int_T \frac{f_1(t)(1-t)}{t-z}\, dt + \Phi_0(z), \quad z \in D^+ \cup D^-, \tag{4.2}$$

где $\Phi_0(z)$ – некоторое решение однородной задачи (2.1). По Теореме 1 функция $\Phi_0(z)$ удовлетворяет однородному условию (2.1). Поэтому из (4.2) при $\Phi_0(z) = 0$ получаем $\Phi^+(rt) - \Phi^-(r^{-1}t) =$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_T f_1(\tau)(1-\tau) \frac{r^2((1-r^{-1}t)(\tau - r^{-1}t) - (1-rt)(\tau - rt))}{t^2\tau|1-rt|^2|\tau - rt|^2}\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(e^{i\theta})(1-e^{i\theta}) \frac{(1-r^2)\big((1-r^2) + r(1-e^{i\theta}) - (1+r^2)(1-e^{i\phi})\big)}{e^{i\phi}|1-re^{i\phi}|^2|e^{i\theta} - re^{i\phi}|^2}\, d\tau.$$

Следовательно

$$\left\|\Phi^+(rt) - \Phi^-(r^{-1}t)\right\|_{L^1(\rho)} = \sup_{\|g\|_{L^\infty(\rho^{-1})}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_0(e^{i\theta})\rho(e^{i\theta}) \frac{|1-e^{i\theta}|^{1-\alpha}}{\rho_1(e^{i\theta})}\, d\theta =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-r^2)\big((1-r)^2 + r(1-e^{i\theta}) - (1+r^2)(1-e^{i\phi})\big)|1-e^{i\phi}|^{\alpha}}{e^{i\phi}|1-re^{i\phi}|^2|e^{i\theta} - re^{i\phi}|^2} g(e^{i\phi})\, d\phi\, d\theta. \tag{4.3}$$

Подставляя в (4.3) функцию $g(e^{i\phi}) = ie^{i\phi}$, получаем

$$\left\|\Phi^+(rt) - \Phi^-(r^{-1}t)\right\|_{L^1(\rho)} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f_0(e^{i\theta})\rho(e^{i\theta}) \frac{|1-e^{i\theta}|^{1-\alpha}}{\rho_1(e^{i\theta})} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{Re} iA_1(r,\theta,\phi)|1-re^{i\phi}|^{\alpha}\rho_1(e^{i\phi})}{|1-re^{i\phi}|^2|e^{i\theta} - re^{i\phi}|^2}\, d\phi\, d\theta \right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_0(e^{i\theta})\rho(e^{i\theta}) \frac{|1-e^{i\theta}|^{1-\alpha}}{\rho_1(e^{i\theta})} \times$$

$$\times \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\big(\operatorname{Re} iA_1(r,\theta,\phi) + A_{a,b}(r,\theta,\phi)\big)|1-re^{i\phi}|^{\alpha}\rho_1(e^{i\phi})}{|1-re^{i\phi}|^2|e^{i\theta} - re^{i\phi}|^2}\, d\phi\, d\theta +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_0(e^{i\theta})\rho(e^{i\theta})\frac{|1-e^{i\theta}|^{1-\alpha}}{\rho_1(e^{i\theta})}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{A_{a,b}(r,\theta,\phi)|1-re^{i\phi}|^{\alpha}\rho_1(e^{i\phi})}{|1-re^{i\phi}|^2|e^{i\theta}-re^{i\phi}|^2}\,d\phi\,d\theta, \quad (4.4)$$

где $A_1(r,\theta,\phi)=(1-r^2)\big((1-r)^2+r(1-e^{i\theta})-(1+r^2)(1-e^{i\phi})\big)$ и

$$A_{a,b}(r,\theta,\phi)=\begin{cases} a|1-e^{i\theta}|+b|1-e^{i\phi}|, & \text{при } a|1-e^{i\theta}|\le|1-e^{i\phi}|,\\ 0, & \text{при } a|1-e^{i\theta}|>|1-e^{i\phi}|.\end{cases}$$

Отметим, что числа $a, b>0$ можно выбрать так, чтобы имела место оценка

$$\mathrm{Re}\; iA_1(r,\theta,\phi)+A_{a,b}(r,\theta,\phi)>c|1-e^{i\phi}|, \quad (4.5)$$

где $c>0$ – постоянная, не зависящая от ϕ. Из (4.4) и (4.5) получаем

$$\left\|\Phi^+(rt)-\Phi^-(r^{-1}t)\right\|_{L^1(\rho)}\ge\frac{c}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_0(e^{i\theta})A_r(\theta)\rho(e^{i\theta})\,d\theta+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_0(e^{i\theta})\rho(e^{i\theta})\frac{|1-e^{i\theta}|^{1-\alpha}}{\rho_1(e^{i\theta})}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{A_{a,b}(r,\theta,\phi)|1-re^{i\phi}|^{\alpha}\rho_1(e^{i\phi})}{|1-re^{i\phi}|^2|e^{i\theta}-re^{i\phi}|^2}\,d\phi\,d\theta.$$

Последнее слагаемое согласно Лемме 11 равномерно ограничено. Из (4.1) получаем

$$\overline{\lim_{r\to1-0}}\left\|\Phi^+(rt)-\Phi^-(r^{-1}t)\right\|_{L^1(\rho)}=\infty.$$

Не ограничивая общности, можно предположить, что функция $f_1(t)$ является вещественной и положительной. Рассмотрим подмножество $L_0\subset L^1(\rho)$, состоящее из вещественных функций класса $L^1(\rho)$ и обращающихся в ноль в некоторой окрестности $t=1$. Так как задача Дирихле (0.1) разрешима для любой $f(t)\in L_0$ и класс L_0 всюду плотен в $L^1(\rho)$, то Теорема B доказана.

Доказательство Теоремы C. Ясно, что функция $\rho(t)$ удовлетворяет условиям Леммы 12. Если функция $\Phi_0(z)$ из (4.2) удовлетворяет (0.10), то

$$\sup\left\|\Phi_0^+(rt)-\Phi_0^-(r^{-1}t)\right\|_{L^1(\rho)}<\infty.$$

Следовательно, доказательство аналогично доказательству необходимости в Теореме B.

ABSTRACT. The paper considers Dirichlet problem in the weight space $L^1(\rho)$, where the weight function ρ satisfies some regularity properties. A sufficient condition of solvability is obtained for weight functions, that vanish at a finite number of points. That condition is necessary, if the order of zero of the weight function is less than 1. Assuming the problem is solvable, the corresponding index is computed.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. М. Айрапетян, "Разрывная задача Римана–Привалова со смещением в классе L^1", Изв. АН Армении, серия Математика, том 25, № 1, стр. 3 – 20, 1990.
2. Б. В. Хведелидзе, "О разрывной задаче Римана–Привалова для нескольких функций", Сообщение АН Гр.ССР, том 17, № 10, стр. 865 – 872, 1956.
3. Б. В. Хведелидзе,, "Методы интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной", Совр. Пробл. Матем., том 7, Москва, 1975.
4. И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, Введение в Теорию Одномерных Сингулярных Интегральных Операторов, Кишинёв, 1973.
5. З. Прёсдорф, Некоторые Классы Сингулярных Уравнений, Мир, Москва, 1979.
6. Н. Е. Товмасян, "О существовании и единственности решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в классе функций, имеющих особенности на границе", Сибир. Матем. Журнал, том 2, № 2, стр. 25 – 57, 1961.
7. R. A. Hunt, B. Muckenhaupt, R. L. Wheeden, "Weighted norm inequalities for the conjugate functions and Hilbert transform", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 176, pp. 227– 251, 1973.
8. Дж. Гарнет, Ограниченные Аналитические Функции, Мир, Москва, 1984.
9. M. Rosenblum, "Summability of Fourier series in $L_p(d\mu)$", TAM Soc., vol. 165, pp. 326– 342, 1962.
10. К. С. Казарян, "Суммирование по Абелю подсистем тригонометрической системы в пространствах $L_p(d\mu)$", Докл. АН Арм.ССР, том 71, № 5, стр. 257 – 261, 1980.
11. K. S. Kazarian, "Weighted norm inequalities for some classes of singular integrals", Studia Math., vol. 86, pp. 97 – 130, 1987.
12. Е. Сенета, Правильно Меняющиеся Функции, Наука, Москва, 1985.

17 сентября 2000

Армянский государственный
инженерный университет