НЕРАВЕНСТВА ТИПА ЛИТТЛВУДА–ПЭЛИ В $\mathbb{R}^n$

К. Л. Аветисян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 36, № 3, 2001

В статье определены так называемые функции типа Литтлвуда–Пэли и установлены связанные с ними L^p-неравенства. Основные Теоремы 1 и 2 обобщают некоторые результаты Стейна и Флетта на дробные производные произвольного порядка $\alpha > 0$. Они могут быть применены в теории весовых классов в верхнем полупространстве $\mathbb{R}^{n+1}_+$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство, $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|x|^2 = x_1^2 + ... + x_n^2$, $dx = dx_1....dx_n$. Обозначим через $\mathbb{R}^{n+1}_+$ верхнее полупространство пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, т.е. $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Точки этого полупространства будем представлять как $(x, y) = (x_1, ..., x_n, y)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y > 0$.

И. Стейн в [1] распространил классическую g-функцию Литтлвуда–Пэли [2] на $\mathbb{R}^{n+1}_+$ и привёл ряд приложений к ней. Для интеграла Пуассона $f(x, y)$ функции $f(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, g-функция Литтлвуда–Пэли в $\mathbb{R}^{n+1}_+$ определяется как нелинейный оператор

$$g(f)(x) = \left(\int_0^{+\infty} y\,|\nabla f(x,y)|^2\,dy\right)^{1/2}, \tag{1}$$

где ∇ – градиент.

Теорема A (Стейн [1], Гл. IV). **Пусть $1 < p < \infty$, $f(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Тогда $g(f)(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, причём существуют положительные постоянные C_1 и C_2, не зависящие от f такие, что**

$$C_1\,\|f\|_{L^p} \le \|g(f)\|_{L^p} \le C_2\,\|f\|_{L^p}. \tag{2}$$

Стейн [1] отметил, что g-функция и неравенства (2) могут быть обобщены на градиенты более высокого целого порядка $k > 1$. Изучение различных весовых пространств голоморфных и гармонических функций приводит к обобщениям g-функции и Теоремы A на производные произвольного (дробного) порядка $\alpha > 0$. Такое обобщение дал Флетт [3] для голоморфных в единичном круге функций.

В настоящей статье введены функции $g_{q,\alpha}(f)$ типа Литтлвуда–Пэли и обобщена Теорема A для полупространства $\mathbb{R}^{n+1}_+$, используя дробные производные произвольного порядка $\alpha > 0$.

§2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Для заданной измеримой комплекснозначной в $\mathbb{R}^{n+1}_+$ функции $f(x,y)$ рассмотрим оператор дробного дифференцирования Римана-Лиувилля $\mathcal{D}^{-\alpha} \equiv \mathcal{D}^{-\alpha}_y$ (потенциал Рисса) относительно y :

$$\mathcal{D}^{-\alpha} f(x,y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \sigma^{\alpha-1} f(x, y+\sigma)\, d\sigma,$$

$$\mathcal{D}^0 f = f, \quad \mathcal{D}^\alpha f(x,y) = (-1)^m\, \mathcal{D}^{-(m-\alpha)} \frac{\partial^m}{\partial y^m} f(x,y),$$

где $\alpha > 0$, а m – целое, определённое из условия $m-1 < \alpha \le m$.

Ниже

$$P(x,y) = k_n \frac{y}{(|x|^2+y^2)^{(n+1)/2}}, \quad k_n = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{(n+1)/2}}$$

есть ядро Пуассона в верхнем полупространстве, $C(\alpha, \beta, \ldots)$, c_α будут обозначать положительные постоянные. Для любого p, $1 \le p \le \infty$, через $p' = p/(p-1)$ обозначим сопряжённый индекс (полагаем $1/+\infty = 0$ и $1/0 = +\infty$). Пусть $\mathbb{Z}^{n+1}_+$ – множество всех мультииндексов с неотрицательными целыми координатами $\lambda_j \in \mathbb{Z}_+$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1}_+$. Пусть $|\lambda| = \lambda_1 + \ldots \lambda_n + \lambda_{n+1}$ и

$$\partial^\lambda = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\lambda_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\lambda_n} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\lambda_{n+1}}.$$

Для комплекснозначной функции $f(x,y)$ используем $\mathbf{C}^{n+1}$-норму для вычисления $|\nabla f|$. Для $\alpha > 0$, $0 < q \le \infty$ и $f(x,y)$, заданной в $\mathbb{R}^{n+1}_+$, введём g-функцию типа Литтлвуда–Пэли (ср. [1–3]) :

$$g_{q,\alpha}(x) \equiv g_{q,\alpha}(f)(x) = \begin{cases} \left(\int_0^\infty y^{\alpha q - 1} |\mathcal{D}^\alpha f(x,y)|^q\, dy\right)^{1/q}, & 0 < q < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{y>0} y^\alpha\, |\mathcal{D}^\alpha f(x,y)|, & q = \infty. \end{cases}$$

Легко видеть, что при $q = 2$ и $\alpha = 1$ функция $g_{q,\alpha}(f)$ соответствует классической g-функции (1) (с производной по y вместо градиента). Для формулировки основного результата нам понадобятся несколько вспомогательных лемм.

Лемма 1. **Для $\alpha > 0$ и $\lambda \in \mathbb{Z}^{n+1}_+$ справедливы следующие оценки :**

$$|\mathcal{D}^\alpha P(x,y)| \le C(\alpha, n) \frac{1}{(|x|+y)^{\alpha+n}}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y > 0,$$

$$|\mathcal{D}^\alpha P(x,y)| \le C(\lambda,n)\,\frac{1}{(|x|+y)^{\lambda+n}}, \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad y>0.$$

В частности, для $\alpha \ge 1$

$$|\mathcal{D}^\alpha P(x,y)| \le C(\alpha,n)\,\frac{P(x,y)}{y^\alpha}, \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad y>0.$$

Доказательство, осуществляемое прямыми вычислениями, опускается.

Лемма 2. Если $f(x,y)$ – гармоническая функция в $\mathbb{R}^{n+1}_+$ и $0<p,q\le\infty$, $\alpha>0$, то

$$|\mathcal{D}^\alpha f(x,y)| \le C(p,q,\alpha,n)\,\frac{\|g_{q,\alpha}(f)\|_{L^p}}{y^{\alpha+n/p}}, \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad y>0.$$

Доказательство является стандартным и сводится к неравенству Гёльдера, субгармоническому поведению функции $|u|^p$ (u гармонично, $p>0$) и неравенству Харди–Литтлвуда–Феффермана–Стейна

$$|u(x,y)|^p \le \frac{C_p}{|B|}\iint_B |u(\xi,\eta)|^p\,d\xi\,d\eta, \tag{3}$$

где B – шар объёма $|B|$ с центром в (x,y). Подробности мы опускаем.

Следующая лемма показывает, что функция $g_{q,\alpha}(f)(x)$ "существенно" возрастающая по α.

Лемма 3. Пусть $\beta>0$ и $f(x,y)$ – гармоническая функция в $\mathbb{R}^{n+1}_+$ такая, что $\mathcal{D}^\beta f(x,y)=o(1)$ при $y\to+\infty$ равномерно в $\mathbb{R}^n$. Если $1\le p\le q<\infty$, $\alpha>1/p-1/q$ либо $1<p\le q<\infty$, $\alpha=1/p-1/q$, то

$$g_{q,\beta}(f)(x) \le C(\alpha,\beta,p,q)\,g_{p,\beta+\alpha}(f)(x), \quad x\in\mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Неравенство (4) аналогично известному неравенству Харди (см., например, [1]) и позволяет свести оценки функции $g_{q,\alpha}(f)$ к случаю целых α. Доказательство получается из Теоремы B из [3], применяя замену переменных. Отметим, что условие на $\mathcal{D}^\beta f(x,y)$ в Лемме 3 обеспечивает обратимость оператора $\mathcal{D}^\alpha$.

Лемма 4. Пусть $f(x,y)$ – гармоническая функция в $\mathbb{R}^{n+1}_+$, $\alpha>0$, $\delta>0$, и пусть $f^*_\delta(x)=\sup\{|f(\xi,\eta)|;\,(\xi,\eta)\in\Gamma_\delta(x)\}$ – её некасательная максимальная функция, где $\Gamma_\delta(x)=\{(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^{n+1}_+;\,|\xi-x|<\delta\,\eta\}$ – конус Лузина с вершиной в точке $x\in\mathbb{R}^n$. Тогда

$$|\mathcal{D}^\alpha f(x,y)| \le C(\alpha,\delta)\,\frac{f^*_\delta(x)}{y^\alpha}, \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad y>0. \tag{5}$$

Доказательство : Расстояние от точки $(x,y)\in\mathbb{R}^{n+1}_+$ до границы конуса $\Gamma_\delta(x)$ равно $\delta\, y/\sqrt{1+\delta^2}$. Рассмотрим интеграл Пуассона от f в шаре $B=B_R$ с центром в (x,y) и радиусом $R=\delta\, y/2\sqrt{1+\delta^2}$:

$$f(x,y)=\int_{\partial B}P_B(x,y,\zeta)\,f(\zeta)\,dm_n(\zeta),$$

где P_B – ядро Пуассона в шаре B, а m_n - поверхностная мера Лебега на сфере ∂B. Дифференцируя с порядком α и используя оценки ядра Пуассона, получаем неравенство (5).

Лемма 5 (см. [1]). Пусть $\delta>0$, $1<p<\infty$ **и** $f(x)\in L^p(\mathbb{R}^n)$. **Тогда** $\|f^*_\delta\|_{L^p}\le C(\delta,p)\,\|f\|_{L^p}$.

Рассмотрим вариант интеграла площадей Лузина :

$$S_\delta(f)(x)=\left(\iint_{\Gamma_\delta(x)}\eta^{1-n}\left|\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial\eta}\right|^2 d\xi\,d\eta\right)^{1/2},\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

где $\delta>0$, а $u(x,y)$ обозначает интеграл Пуассона функции $f(x)$. Рассмотрим также функцию

$$g^*_\lambda(f)(x)=\left[\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\eta}{|\xi|+\eta}\right)^{\lambda n}|\nabla u(x+\xi,\eta)|^2\,\eta^{1-n}\,d\xi\,d\eta\right]^{1/2},\quad x\in\mathbb{R}^n.$$

Следующая лемма доказана в [1] для случая $k=\delta=1$.

Лемма 6. При любых целых $k\ge 1$, $\delta>0$, $\lambda>0$, $1<p<\infty$ **справедливы следующие оценки :**

$$g_{2,k}(f)(x)\le C(n,k,\delta)\,S_\delta(f)(x),\quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{6}$$

$$S_\delta(f)(x)\le C(\lambda,\delta)\,g^*_\lambda(f)(x),\quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{7}$$

$$\|S_\delta(f)\|_{L^p}\le C(n,\delta,p)\,\|f\|_{L^p}, \tag{8}$$

$$\|g_{2,k}(f)\|_{L^p}\le C(n,k,p)\,\|f\|_{L^p}. \tag{9}$$

Доказательство : Рассмотрим шар $B=B_R$ с центром в (x,y) и радиусом $R=\delta\, y/2\sqrt{1+\delta^2}$. Неравенство

$$|\partial^k u(x,y)|^2\le\frac{C(n,k,\delta)}{y^{n+2k-1}}\iint_{B_R}|\partial^1 u(\xi,\eta)|^2\,d\xi\,d\eta,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad y>0$$

является следствием неравенства Харди–Литтлвуда-Фефферманa–Стейна (3), (см. [1]). Здесь полагаем $\partial^1 = \partial/\partial\xi$ или $\partial^1 = \partial/\partial\eta$. Отсюда

$$y^{2k-1}\,|\partial^k u(x,y)|^2 \le C(n,k,\delta) \iint_{\substack{|\xi-x|<R\\ |\eta-y|<R}} |\partial^1 u(\xi,\eta)|^2\, \frac{d\xi\, d\eta}{\eta^n}.$$

Интегрируя по y, получаем

$$\int_0^{+\infty} y^{2k-1}\,|\partial^k u(x,y)|^2\, dy \le$$

$$\le C(n,k,\delta) \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \mathcal{X}_{|\xi|<R}(\xi)\ \mathcal{X}_{|\eta-y|<R}(\eta)\, dy\right) |\partial^1 u(x+\xi,\eta)|^2\, \frac{d\xi\, d\eta}{\eta^n},$$

где $\mathcal{X}$ – характеристическая функция множества, указанного в индексе. Ясно, что

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{X}_{|\xi|<R}(\xi)\ \mathcal{X}_{|\eta-y|<R}(\eta)\, dy \le \begin{cases} C(\delta)\,\eta, & \text{если} \quad |\xi| < \dfrac{\delta\,\eta}{2\sqrt{1+\delta^2}-\delta}, \\ 0, & \text{если} \quad |\xi| \ge \dfrac{\delta\,\eta}{2\sqrt{1+\delta^2}-\delta}. \end{cases}$$

Далее, (6) следует из неравенств

$$\frac{\delta\,\eta}{2\sqrt{1+\delta^2}-\delta} < \delta\,\eta,$$

$$\int_0^{+\infty} y^{2k-1}\,|\partial^k u(x,y)|^2\, dy \le C(n,k,\delta) \iint_{|\xi|<\delta\,\eta} \eta^{1-n}\,|\partial^1 u(x+\xi,\eta)|^2\, d\xi\, d\eta.$$

Неравенство (7) очевидно ввиду $\dfrac{\eta}{|\xi|+\eta} \ge \dfrac{1}{\delta+1}$, $(\xi,\eta)\in\Gamma_\delta(0)$. Неравенства (8), (9) получаются из (6), (7) и (см. [1]) $\|g_\lambda^*(f)\|_{L^p} \le C(\lambda,p)\,\|f\|_{L^p}$, $\lambda>1$, $p>2/\lambda$. Таким образом, доказательство Леммы 6 завершено.

§3. ТЕОРЕМЫ ТИПА ЛИТТЛВУДА–ПЭЛИ

Теорема 1. **Пусть** $\alpha>0$, $1<p<\infty$, $2\le q<\infty$, **и** $f(x,y)$ **– интеграл Пуассона функции** $f(x)\in L^p(\mathbb{R}^n)$. **Тогда**

$$\|g_{q,\alpha}(f)\|_{L^p} \le C(p,q,\alpha,n)\,\|f\|_{L^p}. \tag{10}$$

Доказательство : В силу Леммы 3 достаточно дать доказательство лишь для $\alpha\ge 1$. Применяя оператор $\mathcal{D}^\alpha$ к $f(x,y)$, по Лемме 1 имеем

$$|\mathcal{D}^\alpha f(x,y)| \le \frac{C}{y^\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} P(x-t,y)\,|f(t)|\, dt.$$

Используя хорошо известные теоремы об интеграле Пуассона и максимальной функции Харди–Литтлвуда

$$M\,f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\omega_n\, r^n} \int_{|\xi - x| < r} |f(\xi)|\, d\xi$$

(ω_n обозначает объём n-мерного единичного шара), получим (см. [1], Гл. I и III)

$$\|g_{\infty,\alpha}(f)\|_{L^p} \le C\, \|Mf\|_{L^p} \le C\, \|f\|_{L^p}. \tag{11}$$

С другой стороны, по Лемме 6 неравенство

$$\|g_{2,\alpha}(f)\|_{L^p} \le C \|f\|_{L^p} \tag{12}$$

справедливо для целых α и, следовательно, по Лемме 3 справедливо для всех $\alpha \ge 1$. Согласно одному варианту интерполяционной теоремы Рисса–Торина для пространств со смешанной нормой (см. [5], стр. 316) неравенства (11) и (12) влекут (10) для всех q, $(2 \le q \le \infty)$ и $\alpha \ge 1$, что доказывает теорему. Отметим, что (10) выполняется при $\alpha \ge 1$ и $q = \infty$.

Теорема 2. Если функция $f(x, y)$ гармонична в $\mathbb{R}^{n+1}_+$ и стремится к нулю при $y \to +\infty$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$, и $g_{q,\alpha}(f) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ для $\alpha > 0$, $1 < p < \infty$ и $0 < q \le 2$, то $f(x, y)$ является интегралом Пуассона некоторой функции $f(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, причём

$$\|f\|_{L^p} \le C(p, q, \alpha, n)\, \|g_{q,\alpha}(f)\|_{L^p}. \tag{13}$$

Доказательство : Пусть сперва $1 < q \le 2$. Для произвольного фиксированного $y > 0$ рассмотрим линейный функционал на $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, порождённый функцией $f(x, y)$:

$$T_f(v) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y)\, v(x)\, dx, \quad v(x) \in L^{p'}(\mathbb{R}^n).$$

Если $v(x, y)$ – интеграл Пуассона функции $v(x)$, то для произвольного $\delta > 0$

$$T_f(v) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + \gamma)} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_0^{+\infty} \sigma^{\alpha+\gamma-1}\, \mathcal{D}^{\alpha+\gamma} f(x, y + \sigma)\, d\sigma \right] v(x)\, dx. \tag{14}$$

После применения теоремы Фубини преобразование внутреннего интеграла даёт

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} v(x)\, \mathcal{D}^{\alpha+\gamma} f(x, y + \sigma)\, dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} v(x) \left[\mathcal{D}^{\gamma} \int_{\mathbb{R}^n} P(x - t, y + \sigma/2)\, \mathcal{D}^{\alpha} f(t, \sigma/2)\, dt \right] dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{D}^{\alpha} f(t, \sigma/2) \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{D}^{\gamma} P(x - t, y + \sigma/2)\, v(x)\, dx \right] dt = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{D}^{\alpha} f(t, \sigma/2)\, \mathcal{D}^{\gamma} v(t, y + \sigma/2)\, dt.
\end{aligned}$$

Подставляя в (14) получим

$$T_f(v) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\gamma)} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_0^{+\infty} \sigma^{\alpha+\gamma-1} \mathcal{D}^\alpha f(x,\sigma/2)\, \mathcal{D}^\gamma v(x, y+\sigma/2)\, d\sigma \right] dx.$$

Обозначая

$$h_{q',\gamma}(x,y) = \left(\int_0^{+\infty} \sigma^{\gamma q'-1} \left|\mathcal{D}^\gamma v(x,y+\sigma/2)\right|^{q'} d\sigma \right)^{1/q'}$$

и дважды применяя неравенство Гёльдера, а затем Теорему 1, получаем

$$|T_f(v)| \le C \int_{\mathbb{R}^n} g_{q,\alpha}(f)(x)\, h_{q',\gamma}(x,y)\, dx \le C\, \|g_{q,\alpha}(f)\|_{L^p}\, \|h_{q',\gamma}(x,y)\|_{L^{p'}(dx)} \le$$
$$\le C\, \|g_{q,\alpha}(f)\|_{L^p}\, \|v\|_{L^{p'}}.$$

В силу двойственности $(L^{p'})^* = L^p$ имеем

$$\|f(x,y)\|_{L^p(dx)} = \sup\left\{ |T_f(v)|;\ \|v\|_{L^{p'}} = 1 \right\} \le C\, \|g_{q,\alpha}(f)\|_{L^p}.$$

Теперь пусть $0 < q < 1$ (при $q = 1$ теорема очевидна). По Лемме 4

$$|f(x,y)| \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \sigma^{\alpha-1} |\mathcal{D}^\alpha f(x,y+\sigma)|\, d\sigma \le$$
$$\le C\left(f_\delta^*(x)\right)^{1-q} \int_0^{+\infty} \frac{\sigma^{\alpha-1}}{(y+\sigma)^{\alpha(1-q)}} |\mathcal{D}^\alpha f(x,y+\sigma)|^q\, d\sigma,$$

где $f_\delta^*(x)$ – некасательная максимальная функция функции f. Применяя неравенство Гёльдера с индексами $1/q$ и $1/(1-q)$, получим $\|f(x,y)\|_{L^p(dx)}^p \le C\, \|f_\delta^*\|_{L^p}^{p(1-q)}\, \|g_{q,\alpha}(f)\|_{L^p}^{pq}$. Итак, по Лемме 5 $\|f\|_{L^p} \le C\, \|f_\delta^*\|_{L^p}^{1-q}\, \|g_{q,\alpha}(f)\|_{L^p}^q \le C\, \|f\|_{L^p}^{1-q}\, \|g_{q,\alpha}(f)\|_{L^p}^q$. Доказательство завершено.

ABSTRACT. The paper introduces so called Littlewood–Paley type functions and establishes related L^p-inequalities. The main Theorems 1 and 2 generalize some results of Stein and Flett to fractional derivatives of arbitrary order $\alpha > 0$. They can be applied in the theory of weighted classes on the upper half-space $\mathbb{R}^{n+1}_+$.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Стейн, Сингулярные Интегралы и Дифференциальные Свойства Функций, Мир, М., 1973.
2. А. Зигмунд, Тригонометрические Ряды, том II, Мир, М., 1965.
3. T. M. Flett, "Mean values of power series", Pacific J. Math., vol. 25, pp. 463 — 494, 1968.
4. C. Fefferman, E. M. Stein, "H^p spaces of several variables", Acta Math., vol. 129, pp. 137 — 193, 1972.
5. A. Benedek, R. Panzone, "The spaces L^P with mixed norm", Duke Math. J., vol. 28, pp. 301 — 324, 1961.

17 января 2001

Институт математики
НАН Армении