ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ОБОБЩЁННЫХ ШЕЙПАХ

П. С. Геворкян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 36, № 2, 2001

В настоящей статье вводится понятие K -гомотопии для семейств K топологических пространств X . Новое понятие обобщает n -гомотопию, определённую в [3] (см. также [1], [5]) и P -гомотопию, определённую в [4]. На основе введённого понятия строится концепция обобщённых шейпов или K -шейпов. Если $K = \{X : \dim X \leq n\}$, то K -шейпы совпадают с n -шейпами, определёнными в [1]. Если K состоит из топологических пространств с обобщённой размерностью (в смысле А. Дранишникова) меньшей, чем P , то K -шейпы совпадают с P -шейпами, описанными в [4].

§1. АБСТРАКТНЫЕ K -ШЕЙПЫ

Пусть $\mathcal{T}$ – произвольная категория, а $K \subset \text{ob}(\mathcal{T})$ – некоторое семейство объектов категории $\mathcal{T}$. Рассмотрим произвольные объекты X и Y категории $\mathcal{T}$, и пусть $\text{Mor}(X, Y)$ будет множеством всех морфизмов из X в Y .

Определение 1. Морфизмы $f, g \in \text{Mor}(X, Y)$ назовём равными относительно семейства K (или K -равными $f \stackrel{K}{=} g$), если для произвольного объекта $A \in K$ и произвольного морфизма $h: A \rightarrow X$ имеем $f \circ h = g \circ h$.

Предложение 1. Отношение " $\stackrel{K}{=}$ " является отношением эквивалентности в множестве $\text{Mor}(X, Y)$.

Множество $\text{Mor}(X, Y)$ разбивается на непересекающиеся классы эквивалентности, соответствующее фактор-множество обозначим через $\text{Mor}_K(X, Y)$, а класс морфизма f обозначим через $[f]_K$. Нетрудно доказать, что все объекты категории $\mathcal{T}$ и классы K -равных морфизмов составляют новую категорию, которую

обозначим через $\mathcal{T}_K$.

Предложение 2. Если $K = \text{ob}(\mathcal{T}) =$ все объекты категории $\mathcal{T}$, то для $f, g \in \text{Mor}(X, Y)$ имеем $f = g$ тогда и только тогда, когда $f \stackrel{K}{=} g$.

Доказательство : Достаточно показать, что из $f \stackrel{K}{=} g$ вытекает $f = g$, т.е. для любого морфизма $h: A \rightarrow X$, где A – объект семейства K , имеем $f \circ h = g \circ h$. Так как $K = \text{ob}(\mathcal{T})$, то в качестве объекта A можно взять X , а в качестве h тождественный морфизм $\text{id}_X: X \rightarrow X$. Тогда имеем $f \circ \text{id}_X = g \circ \text{id}_X$, т.е. $f = g$. Доказательство завершено.

Из Предложения 2 следует, что в случае $K = \text{ob}(\mathcal{T})$ имеем $\text{Mor}_K(X, Y) = \text{Mor}(X, Y)$, т.е. $\mathcal{T} = \mathcal{T}_K$. Для полной подкатегории $\mathcal{P}$ категории $\mathcal{T}$, $\mathcal{P}_K$ есть полная подкатегория категории $\mathcal{T}_K$. Если $\mathcal{P}$ – плотная подкатегория категории $\mathcal{T}$ (т.е. для произвольного объекта $X \in \text{ob}(\mathcal{T})$ существует ассоциированная с ним обратная система $\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, \Lambda\}$, составленная из объектов подкатегории $\mathcal{P}$), то для пары $(\mathcal{T}, \mathcal{P})$ естественным образом строится шейповая категория.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{P}$ – плотная подкатегория категории $\mathcal{T}$, а $K \subset \text{ob}(\mathcal{T})$. Подкатегория $\mathcal{P}_K$ является плотной подкатегорией категории $\mathcal{T}_K$ тогда и только тогда, когда для произвольных объектов $Q, Q' \in \mathcal{P}$, $X \in \mathcal{T}$ и морфизмов $\eta_1, \eta_2: Q' \rightarrow Q$, $f: X \rightarrow Q'$ категории $\mathcal{T}$, удовлетворяющих условию: $\eta_1 \circ f \stackrel{K}{=} \eta_2 \circ f$, существует объект $Q'' \neq Q$ и морфизмы $\eta: Q'' \rightarrow Q'$ и $f': X \rightarrow Q''$ такие, что $\eta \circ f' \stackrel{K}{=} f$ и $\eta_1 \circ \eta \stackrel{K}{=} \eta_2 \circ \eta$.

Таким образом, если подкатегория $\mathcal{P}$ категории $\mathcal{T}$ и семейство K удовлетворяют условию Теоремы 1, то для пары $(\mathcal{T}_K, \mathcal{P}_K)$ естественным образом можно построить шейповую категорию.

§2. K-ГОМОТОПИЯ

Рассмотрим гомотопическую категорию $H - \text{TOP}$ всех топологических пространств и гомотопических классов непрерывных отображений. Используя Определение 1 к категории $H - \text{TOP}$, мы получим следующее понятие K -гомотопных отображений.

Определение 2. Отображения $f, g: X \rightarrow Y$ называются K -гомотопными (и обозначаем $f \stackrel{K}{\simeq} g$), если для произвольного пространства $A \in K$ и любого отображения $h: A \rightarrow X$ имеем $f \circ h \simeq g \circ h$.

В случае, когда K состоит из единственного пространства A , тогда получаем

понятие A -гомотопных отображений. Очевидно, что из обычной гомотопичности вытекает K -гомотопичность.

Предложение 3. Пусть для любых топологических пространств X и Y $\Omega = Y^X$ есть множество всех непрерывных отображений из X в Y . Отношение K -гомотопичности является отношением эквивалентности на множестве Ω .

Таким образом, множество $\Omega = Y^X$ разбивается на попарно непересекающиеся классы K -гомотопных отображений, которые назовём K -гомотопическими классами. Класс K -гомотопности отображения f обозначим через $[f]_K$.

Предложение 4. Если отображения $f_1, g_1: X \rightarrow Y$ и $f_2, g_2: Y \rightarrow Z$ удовлетворяют условиям $f_1 \stackrel{K}{\simeq} g_1$ и $f_2 \stackrel{K}{\simeq} g_2$, то $f_2 \circ f_1 \stackrel{K}{\simeq} g_2 \circ g_1$.

Доказательство : Рассмотрим произвольное пространство $A \in K$ и произвольное отображение $h: A \rightarrow X$. Мы должны доказать, что $(f_2 \circ f_1) \circ h \stackrel{K}{\simeq} (g_2 \circ g_1) \circ h$. Так как $f_1 \stackrel{K}{\simeq} g_1$, то имеем $f_2 \circ f_1 \circ h \stackrel{K}{\simeq} f_2 \circ g_1 \circ h$. С другой стороны, из $f_2 \stackrel{K}{\simeq} g_2$ следует соотношение $f_2 \circ g_1 \circ h \stackrel{K}{\simeq} g_2 \circ g_1 \circ h$. Доказательство завершено.

Для двух классов K -гомотопных отображений $[f]_K: X \rightarrow Y$ и $[g]_K: Y \rightarrow Z$ определим по формуле $[g]_K \circ [f]_K = [g \circ f]_K$ их композицию.

Теорема 2. Все топологические пространства в качестве объектов и классы K -гомотопных отображений в качестве морфизмов составляют категорию.

Эту категорию обозначим через K – *НОМОТОР*. Применяя Предложение 2 к категории H – *ТОР*, получим следующее утверждение.

Предложение 5. Пусть K – семейство всех топологических пространств. Произвольные два отображения гомотопны тогда и только тогда, когда они K -гомотопны.

Теорема 3. Пусть A и B – произвольные топологические пространства, имеющие один и тот же гомотопический тип. Тогда A -гомотопность и B -гомотопность эквивалентны.

Доказательство : Пусть $A \simeq B$, а для $f, g: X \rightarrow Y$ имеем $f \stackrel{B}{\simeq} g$. Для доказательства того, что $f \stackrel{A}{\simeq} g$, рассмотрим отображение $h: A \rightarrow X$ и докажем, что $f \circ h \simeq g \circ h$. Поскольку $A \simeq B$, то существуют отображения $h_1: A \rightarrow B$ и

$h_2: B \rightarrow A$ такие, что

$$h_2 \circ h_1 \simeq I_A, \quad h_1 \circ h_2 \simeq I_B, \quad (1)$$

где I_A и I_B - тождественные отображения пространств A и B , соответственно.

Из B -гомотопности отображений f и g и из (1) получаем

$$f \circ h = f \circ h \circ I_A \simeq f \circ h \circ h_2 \circ h_1 \simeq g \circ h \circ h_2 \circ h_1 \simeq g \circ h \circ I_A = g \circ h.$$

Аналогично можно доказать, что из A -гомотопности вытекает B -гомотопность.

Доказательство завершено.

Предложение 6. Отображения $f, g: A \rightarrow X$ являются A -гомотопными тогда и только тогда, когда топологические пространства A и X гомотопны.

Доказательство : Достаточность тривиальна, поэтому докажем необходимость. Пусть $f, g: A \rightarrow X$ A -гомотопны. В частности, для тождественного отображения $I_A: A \rightarrow A$ имеем $f \circ I_A \simeq g \circ I_A$, т.е. $f \simeq g$. Доказательство завершено. Ниже, термин "класс" будет означать класс топологических пространств.

Определение 3. Класс K удовлетворяет условию факторизации относительно класса L , если для произвольного пространства $A \in K$ и отображения $h: A \rightarrow X$, где X - любое топологическое пространство, существуют пространство $B \in L$ и отображения $h': A \rightarrow B$ и $h'': B \rightarrow X$ такие, что $h \simeq h'' \circ h'$.

Теорема 4. Пусть класс K удовлетворяет условию факторизации относительно класса L . Тогда из L -гомотопности произвольных двух отображений вытекает их K -гомотопность.

Доказательство : Пусть $f, g: X \rightarrow Y$ - два L -гомотопных отображения. Рассмотрим произвольное пространство $A \in K$ и отображение $h: A \rightarrow X$. Мы должны доказать, что $f \circ h \simeq g \circ h$. Существуют пространство $B \in L$ и отображения $h': A \rightarrow B$ и $h'': B \rightarrow X$ такие, что

$$h \simeq h'' \circ h'. \quad (2)$$

Так как отображения f, g являются L -гомотопными, то имеем

$$f \circ h'' \simeq g \circ h''. \quad (3)$$

Учитывая (2) и (3) получаем $f \circ h \simeq f \circ h'' \circ h' \simeq g \circ h'' \circ h' \simeq g \circ h$. Доказательство завершено.

Следствие 1. Если пространство A удовлетворяет условию факторизации относительно пространства B , то из B -гомотопности двух отображений вытекает их A -гомотопность.

Доказательство : следует из Теоремы 4, так как пространство можно рассматривать как класс, состоящий из единственного пространства.

Следствие 2. Пусть K – семейство топологических пространств и $L \subset K$. Тогда из K -гомотопности отображений следует их L -гомотопность.

Предложение 7. Пусть B – топологическое пространство, а A – его ретракт. Тогда из B -гомотопности двух отображений следует их A -гомотопность.

Доказательство вытекает из Следствия 1 и следующего утверждения.

Предложение 8. Пусть B – топологическое пространство, а A – его ретракт. Тогда пространство A удовлетворяет условию факторизации относительно пространства B .

Доказательство : Пусть $i: A \hookrightarrow B$ есть отображение вложения, а $r: B \rightarrow A$ – ретракция. По определению ретракта имеем $r \circ i = \text{id}_A$. Рассмотрим отображение $h: A \rightarrow X$, где X – топологическое пространство. Так как $(h \circ r) \circ i = h \circ (r \circ i) = h \circ \text{id}_A = h$, то получаем, что h факторизуется через пространство B с помощью отображений $i: A \hookrightarrow B$ и $h \circ r: B \rightarrow X$. Доказательство завершено.

Из Теоремы 4 следует, что если класс L удовлетворяет условию факторизации относительно класса K (в частности, если $L \subset K$), то существует ковариантный функтор $F_{LK}: K\text{-НОМОТОР} \rightarrow L\text{-НОМОТОР}$, который тождественен на объектах и переводит класс K -гомотопности $[f]_K$ в класс L -гомотопности $[f]_L$.

§3. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ K -ШЕЙПЫ

Вопрос : При каких условиях на семейство K подкатегория $\mathcal{P}$ была бы плотной в категории $K\text{-НОМОТОР}$? Из Теоремы 1 следует такой критерий.

Теорема 5. Подкатегория $\mathcal{P}$ будет плотной подкатегорией категории $K\text{-НОМОТОР}$ тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие :

Для произвольного топологического пространства X , ANR -пространств $Q, Q' \in \mathcal{P}$ и непрерывных отображений $\eta_1, \eta_2: Q' \rightarrow Q$, $f: X \rightarrow Q'$,

удовлетворяющих условию $\eta_1 \circ f \stackrel{\kappa}{\simeq} \eta_2 \circ f$, существуют такое ANR -пространство $Q'' \in \mathcal{P}$ и такие непрерывные отображения $\eta: Q'' \rightarrow Q'$ и $f': X \rightarrow Q''$, что $\eta \circ f' \stackrel{\kappa}{\simeq} f$ и $\eta_1 \circ \eta \stackrel{\kappa}{\simeq} \eta_2 \circ \eta$.

Простым примером семейства $\mathcal{K}$, для которого имеет место Теорема 5, является семейство всех топологических пространств TOP . В этом случае теория $\mathcal{K}$ -шейпов совпадает с классической теорией шейпов топологических пространств. Другие примеры таких пространств были построены в [1], [4], [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Чягогидзе, "Теория n -шейпов", Мат. заметки, том 44, стр. 145 — 174, 1989.
2. А. Dranishnikov, J. Dudak, "Extension dimension and extension types", Trudy Matem. Ins. im Steklov Inst., vol. 212, pp. 61 — 94, 1996.
3. R. Fox, "On the Lusternic-Schnirelmann category", Ann. of Math., vol. 42, pp. 333 — 370, 1990.
4. I. Ivansic, L. Rubin, P. Schapiro, Extension Shape Theory, 1993.
5. R. Jimenez, L. Rubin, "The existence of n -shape theory for arbitrary compacta, Glasnic Mat., vol. 33 (53), pp. 123 — 132, 1998.

30 марта 2001

Ереванский государственный университет