КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ НА ГРАНИЦЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. В. Цуцулян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 36, № 2, 2001

В статье исследуется разрешимость краевых задач для нелинейных эллиптических и параболических уравнений второго порядка, вырождающихся на границе в двух направлениях, с разными весовыми показателями. Однозначная разрешимость устанавливается в специальным образом построенных весовых функциональных пространствах.

§1. ВВЕДЕНИЕ

В статье продолжаются исследования, начатые в работах [1], [2], по разрешимости краевых задач для нелинейных уравнений с вырождением. Получены результаты по разрешимости краевых задач для двух классов нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в предположении, что их коэффициенты допускают вырождение на границе в двух направлениях. Обсуждается корректность постановки краевых задач в специальным образом построенных весовых пространствах.

Пусть Ω – ограниченная область с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$, лежащая в полупространстве $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$, где $\Omega = \Omega_0 \times (0, b)$ и $\Gamma = \Gamma^* \cup \Omega_0 \cup \Omega_b$, $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $\Gamma^* = \partial\Omega \times (0, b)$. Для нелинейного вырождающегося эллиптического уравнения второго порядка вида

$$L(u) = -\sum_{i=1}^{n} \partial_i a_i(x, \nabla u) + c(x, u) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.1}$$

рассмотрим следующую краевую задачу :

$$u|_{\Gamma'} = 0, \tag{1.2}$$

где $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $\nabla = (\partial_1, ..., \partial_n)$, $x' = (x_1, ..., x_{n-1})$, $x = (x_1, ..., x_n)$, а Γ' зависит от характера вырождения и может совпадать со всей границей Γ или её частью.

Обозначим через $C^1(\Omega)$ множество непрерывно дифференцируемых на Ω функций, удовлетворяющих условию (1.2).

Обозначим через $W_{p,\alpha,\beta}$ пополнение $C^1(\Omega)$ по норме

$$\|u\|^p = |u, W_{p,\alpha,\beta}|^p = \int_\Omega x_n^\alpha (b-x_n)^\beta |u(x)|^p\,dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega x_n^\alpha (b-x_n)^\beta |\partial_i u|^p\,dx, \quad p>2. \tag{1.3}$$

Класс $W_{p,\alpha,\beta}$ является банаховым пространством с нормой (1.3).

Что касается (1.1), то сделаем следующие предположения.

i) Функции $a_i(x,\xi) \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n)$, $i=1,...,n$; $c(x,\eta) \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^1)$, $p>2$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha \neq p-1$, $\beta \neq p-1$ и удовлетворяют следующим неравенствам :

$$|a_i(x,\xi)| \leq c\,x_n^\alpha (b-x_n)^\beta |\xi|^{p-1}, \tag{1.4}$$

$$|a_{ij}(x,\xi)| \leq c\,x_n^\alpha (b-x_n)^\beta |\xi|^{p-2}, \tag{1.5}$$

$$c_1\,x_n^\alpha (b-x_n)^\beta |u|^p \leq c(x,u)\,u \leq c_2\,x_n^\alpha (b-x_n)^\beta |u|^p, \tag{1.6}$$

где $a_{ij} = \dfrac{\partial a_i(x,\xi)}{\partial \xi_j}$, а c – некоторая постоянная.

ii) Существуют постоянные $\mu_i > 0$, $i=0,...,4$ такие, что для любых $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ справедливы оценки :

$$\mu_0\,x_n^\alpha (b-x_n)^\beta |\xi|^p \leq \sum_{i=1}^n a_i(x,\xi)\,\xi_i \leq \mu_1\,x_n^\alpha (b-x_n)^\beta |\xi|^p, \tag{1.7}$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,\xi)\,\xi_i\,\xi_j \geq \mu_2\,x_n^\alpha (b-x_n)^\beta |\xi|^p, \tag{1.8}$$

$$\mu_3\,x_n^\alpha (b-x_n)^\beta |u|^{p-2} \leq \frac{\partial c(x,u)}{\partial u} \leq \mu_4\,x_n^\alpha (b-x_n)^\beta |u|^{p-2}. \tag{1.9}$$

Предложение 1. **Для элементов** $u(x) \in W_{p,\alpha,\beta}$ **имеет место неравенство**

$$\int_{\Omega_0} |u(x)|^p\,dx \leq c\,x^{p-1-\alpha}(b-x_n)^{p-1-\beta} |u, W_{p,\alpha,\beta}|^p. \tag{1.10}$$

Доказательство : В силу плотности C^1 в $W_{p,\alpha,\beta}$ достаточно доказать (1.10) при $u \in C^1$. Отметим (см. [4]), что для любого $u(x) \in W_{p,\alpha,\beta}$ существуют постоянные $c_1, c_2 > 0$ такие, что

$$\begin{aligned} c_1\,|u, W_{p,\alpha,\beta}|^p &\leq |u, W_{p,\alpha,0}(\Omega_0 \times (0,b/2))|^p + \\ &+ |u, W_{p,0,\beta}(\Omega_0 \times (b/2,b))|^p \leq c_2\,|u, W_{p,\alpha,\beta}|^p. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Теперь оценим $|u(x)|^p$ для $x_n \in (0,b/2)$ и $x_n \in (b/2,b)$ в отдельности. Для $x_n \in (0,b/2)$ и $a < p-1$ можно записать

$$|u(x)|^p = \left|\int_0^{x_n} \frac{\partial u(x',\tau)}{\partial \tau}\,d\tau\right|^p = \left|\int_0^{x_n} \tau^{-\alpha/p}\tau^{\alpha/p} \frac{\partial u(x',\tau)}{\partial \tau}\,d\tau\right|^p \leq$$

$$\leq \left(\int_0^{x_n} \tau^{-\alpha q/p}\,d\tau\right)^{p/q} \int_0^{x_n} \tau^\alpha \left|\frac{\partial u(x',\tau)}{\partial \tau}\right|^p d\tau \leq c\,x_n^{p-1-\alpha} \int_0^{x_n} \tau^\alpha \left|\frac{\partial u(x',\tau)}{\partial \tau}\right|^p d\tau.$$

Таким образом, интегрируя обе части неравенства по Ω_0, получим

$$\int_{\Omega_0} |u(x)|^p\,dx^* \le c\,x_n^{p-1-\alpha} \int_{\Omega_0}\int_0^{x_n} \tau^\alpha \left|\frac{\partial u(x^*,\tau)}{\partial\tau}\right|^p d\tau\,dx^* \le \tag{1.12}$$
$$\le c\,x_n^{p-1-\alpha}|u, W_{p,\alpha,0}(\Omega_0\times(0,b/2))|^p.$$

Пусть теперь $\alpha > p-1$. Тогда имеет место равенство

$$u(x) = u(x',b/2) - \int_{x_n}^{b/2} \frac{\partial u(x',\tau)}{\partial\tau}\,d\tau. \tag{1.13}$$

Умножая равенство (1.13) на $x_n^{\alpha/p}$, получим

$$\frac{1}{p}\int_0^{b/2} \left|u(x',b/2)\,x_n^{\alpha/p}\right|^p dx_n \le$$
$$\le \int_0^{b/2}\left[\left|u(x)\,x_n^{\alpha/p}\right|^p + \left|x_n^{\alpha/p}\int_{x_n}^{b/2}\frac{\partial u(x',\tau)}{\partial\tau}\,d\tau\right|^p\right] dx_n.$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского, можем записать

$$\int_0^{b/2}\left|x_n^{\alpha/p}\int_{x_n}^{b/2}\frac{\partial u(x',\tau)}{\partial\tau}\,d\tau\right|^p \le$$
$$\le \int_0^{b/2} x_n^\alpha\,(\int_{x_n}^{b/2}\tau^{-q\,\alpha/p}\,d\tau)^{p/q}\int_{x_n}^{b/2}\tau^\alpha\left|\frac{\partial u(x',\tau)}{\partial\tau}\right|^p d\tau\,dx_n.$$

С другой стороны

$$\left|\int_{x_n}^{b/2}\frac{\partial u(x',\tau)}{\partial\tau}\,d\tau\right|^p \le (\int_{x_n}^{b/2}\tau^{-q\,\alpha/p}\,d\tau)^{p/q}\int_{x_n}^{b/2}\tau^\alpha\left|\frac{\partial u(x',\tau)}{\partial\tau}\right|^p d\tau \le$$
$$\le (1-q\,\alpha/p)^{-p/q}(b^{p-1-\alpha} - x_n^{p-1-\alpha})\int_0^{b/2}\tau^\alpha\left|\frac{\partial u(x',\tau)}{\partial\tau}\right|^p d\tau \le$$
$$\le c\,x_n^{p-1-\alpha}\int_0^{b/2}\tau^\alpha\left|\frac{\partial u(x',\tau)}{\partial\tau}\right|^p d\tau.$$

Теперь заметим, что из (1.12) следует

$$|u(x)|^p \le p\left(|u(x',b/2)|^p + \left|\int_{x_n}^{b/2}\frac{\partial u(x',\tau)}{\partial\tau}\,d\tau\right|^p\right),$$

и используя условие $\alpha > p-1$, получим

$$|u(x)|^p \le c\,x_n^{p-1-\alpha}\int_0^{b/2}\tau^\alpha\left|\frac{\partial u(x',\tau)}{\partial\tau}\right|^p d\tau. \tag{1.14}$$

Интегрируя обе части (1.14) по Ω_0, получим, что для любого $\alpha \ge 0$, $\alpha \ne p-1$ имеем

$$\int_{\Omega_0}|u(x)|^p\,dx' \le c\,x_n^{p-1-\alpha}\int_{\Omega_0}\int_0^{b/2}\tau^\alpha\left|\frac{\partial u(x',\tau)}{\partial\tau}\right|^p d\tau\,dx' \le \tag{1.15}$$
$$\le c\,x_n^{p-1-\alpha}\,|u, W_{p,\alpha,0}(\Omega_0\times(0,b/2))|^p.$$

Аналогичными рассуждениями при $x_n \in (b/2, b)$ получаем

$$\int_{\Omega_0} |u(x)|^p \, dx' \le c\,(b - x_n)^{p-1-\alpha} \, |u, W_{p,0,\beta}(\Omega_0 \times (b/2, b))|^p. \qquad (1.16)$$

Теперь (1.10) вытекает из неравенств (1.11), (1.15) и (1.16). Доказательство завершено.

Из Предложения 1 следует, что

1. для $\alpha < p-1$ и $\beta < p-1$ имеем $\Gamma' = \Gamma^*$,
2. для $\alpha < p-1$ и $\beta > p-1$ имеем $\Gamma' = \Gamma^* \cup \Omega_b$,
3. для $\alpha > p-1$ и $\beta < p-1$ имеем $\Gamma' = \Gamma^* \cup \Omega_0$,
4. для $\alpha > p-1$ и $\beta > p-1$ имеем $\Gamma' = \Gamma$.

Замечание 1. Для $\alpha < p-1$ (или $\beta < p-1$) в определении нормы (1.3) в $W_{p,\alpha,\beta}$ можно взять только одно слагаемое. Действительно, из $|u, W_{p,\alpha,\beta}| = 0$ следует, что $u(x)$ является постоянной. Поэтому $u(x', 0) = 0$ (или $u(x', b) = 0$) и следовательно, $u(x) \equiv 0$. Итак, для $\alpha < p-1$ (или $\beta < p-1$) пространство $W_{p,\alpha,\beta}$ не содержит постоянных функций, отличных от нуля.

§2. РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

В этом параграфе будет доказана однозначная разрешимость задачи (1.1), (1.2). Определим оператор $L\colon W_{p,\alpha,\beta} \to W^*_{p,\alpha,\beta}$ по формуле

$$< L(u), \nu >= \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} a_i(x, \nabla u)\, \partial_i \nu \, dx + \int_{\Omega} c(x, u)\, \nu \, dx, \qquad (2.1)$$

где $u, \nu \in W_{p,\alpha,\beta}$, $< L(u), \nu >$ есть значение функционала $L(u)$ на ν, а $W^*_{p,\alpha,\beta}$ – пространство, сопряжённое к $W_{p,\alpha,\beta}$. Мы будем использовать следующую теорему о монотонных операторах из [3].

Пусть X – действительное сепарабельное рефлексивное банахово пространство, X^* – сопряжённое пространство, т.е. пространство линейных непрерывных функционалов над X. Значение функционала $\omega \in X^*$ на элементе $u \in X$ обозначим через $< \omega, u >$.

Теорема А (Теорема 11, [3]). Пусть монотонный оператор $A\colon X \to X^*$ удовлетворяет следующим двум условиям :

1°. Оператор A коэрцитивен, т.е. для любого $u \in X$ справедливо неравенство $< A(u), u > \ge c\,(\|u\|)\, \|u\|$, где $c(r)$ – функция вещественного переменного такая, что $\lim\limits_{r \to \infty} c(r) = +\infty$, а $\|u\|$ – норма в X ;

2°. Оператор A полунепрерывен, т.е. он переводит всякую сильно сходящуюся последовательность $u_n \to u$ в X в слабо сходящуюся последовательность $A(u_n) \to A(u)$ в X^*.
Тогда для любого $h \in X^*$ уравнение $A(u) = h$ имеет по крайней мере одно решение в пространстве X.

Теорема 2.1. Пусть оператор L, действующий из пространства $W_{p,\alpha,\beta}$ в $W^*_{p,\alpha,\beta}$, удовлетворяет условиям i), ii). Тогда оператор L является коэрцитивным, полунепрерывным и монотонным.

Доказательство : Сперва докажем, что оператор L корректно определён. Оценим первое слагаемое в левой части уравнения (1.1). Так как $u, \nu \in W_{p,\alpha,\beta}$, то имеем

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega a_i(x,\nabla u)\,\partial_i\nu\,dx\right| \le \sum_{i=1}^{n}\left[\int_\Omega x_n^a\,(b-x_n)^\beta\,|\partial_i\nu|^p\,dx\right]^{1/p}\times$$
$$\times\left[\int_\Omega x_n^{-qa/p}\,(b-x_n)^{-q\beta/p}\,|a_i(x,\nabla u)|^q\,dx\right]^{1/q}\le$$
$$\le c\sum_{i=1}^{n}\left[\int_\Omega x_n^a\,(b-x_n)^\beta\,|\partial_i\nu|^p\,dx\right]^{1/p}\left[\int_\Omega x_n^a\,(b-x_n)^\beta\,|\nabla u|^p\,dx\right]^{1/q}<\infty,$$

а для второго слагаемого имеем следующую оценку :

$$\left|\int_\Omega c(x,u)\,\nu\,dx\right|\le$$
$$\le\left[\int_\Omega x_n^a\,(b-x_n)^\beta\,|\nu|^p\,dx\right]^{1/p}\left[\int_\Omega x_n^{-qa/p}\,(b-x_n)^{-q\beta/p}\,|c(x,u)|^q\,dx\right]^{1/q}\le$$
$$\le c\left[\int_\Omega x_n^a\,(b-x_n)^\beta\,|\nu|^p\,dx\right]^{1/p}\left[\int_\Omega x_n^a\,(b-x_n)^\beta\,|u|^p\,dx\right]^{1/q}<\infty.$$

Из (1.6), (1.7) следует коэрцитивность оператора L. Действительно

$$\begin{aligned}
&< L(u),u >=\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega a_i(x,\nabla u)\,\partial_i\nu\,dx+\int_\Omega c(x,u)\,\nu\,dx\ge\\
&\ge\mu_0\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega x_n^a\,(b-x_n)^\beta\,|\partial_i u|^p\,dx+c_1\int_\Omega x_n^a\,(b-x_n)^\beta\,|u(x)|^p\,dx\ge\\
&\ge c_0\,||u||^p=h(||u||)\,||u||,
\end{aligned}\tag{2.2}$$

где $c_0 = min\{\mu_0, c_1\}$, а $h(\tau) = c_0\,\tau^{p-1}\to\infty$ при $\tau\to\infty$.

Для доказательства полунепрерывности L рассмотрим $u \in W_{p,\alpha,\beta}$ и последовательность $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, $u_k \in W_{p,\alpha,\beta}$ такую, что $||u_k - u|| \to 0$ при $k\to\infty$. Для любого $\nu \in W_{p,\alpha,\beta}$, используя (1.5), (1.9), находим

$$
\begin{aligned}
&| < L(u_k), \nu > - < L(u), \nu > | = \left| \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega [a_i(x, \nabla u_k) - a_i(x,u)]\, \partial_i \nu \, dx + \right.\\
&\left. + \int_\Omega [c(x, u_k) - c(x,u)]\, \nu(x)\, dx \right| = \left| \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \int_0^1 \frac{\partial a_i(x, \nabla u + \tau \nabla(u_k - u))}{\partial \zeta_j} \times \right.\\
&\left. \times\, \partial_j (u_k - u)\, \partial_i \nu \, d\tau\, dx + \int_\Omega \int_0^1 \frac{\partial c(x, u + \tau\,(u_k - u))}{\partial \tau} (u_k - u)\, u\, d\tau\, dx \right| \le \\
&\le c \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \int_0^1 x_n^a\, (b - x_n)^\beta\, |\nabla u + \nabla (u_k - u)|^{p-2} |\partial_j (u_k - u)|\, |\partial_i \nu|\, d\tau\, dx + \\
&+ \int_\Omega \int_0^1 x_n^a\, (b - x_n)^\beta\, |u + \tau\,(u_k - u)|^{p-2}\, |u_k - u|\, |\nu(x)|\, d\tau\, dx.
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Оценим интегралы

$$
\begin{aligned}
&I = \int_\Omega \int_0^1 x_n^a\, (b - x_n)^\beta\, |\nabla u + \nabla (u_k - u)|^{p-2} |\partial_j (u_k - u)|\, |\partial_i \nu|\, d\tau\, dx \le \\
&\le c_1 \int_\Omega x_n^a\, (b - x_n)\, \left[|\nabla u|^{p-2} + |\nabla (u_k - u)|^{p-2} \right] \partial_j (u_k - u) || \partial_i \nu|\, dx \le \\
&\le c_2 \int_\Omega x_n^a\, (b - x_n)^\beta\, \left[|\nabla u|^{p-1} + |\partial_i \nu|^{p-1} \right] \partial_j (u_k - u)\, dx + \\
&+ c_2 \int_\Omega x_n^a\, (b - x_n)^\beta\, |\nabla (u_k - u)|^{p-1} |\partial_i \nu|\, dx.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Оценим теперь интеграл в правой части (2.4) :

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega x_n^a\, (b - x_n)^\beta\, |\nabla u|^{p-1} |\partial_j (u_k - u)|\, dx = \\
&= \int_\Omega x_n^{a/q}\, (b - x_n)^{\beta/q}\, |\nabla u|^{p-1}\, x_n^{a/p}\, (b - x_n)^{\beta/p}\, |\partial_j (u_k - u)|\, dx \le \\
&\le \left[\int_\Omega x_n^a\, (b - x_n)^\beta\, |\nabla u|^p\, dx \right]^{1/q} \left[\int_\Omega x_n^a\, (b - x_n)^\beta\, |\partial_j (u_k - u)|^p\, dx \right]^{1/p} \le \\
&\le ||u_k - u||\, ||u||^{p-1} \to 0, \quad k \to \infty.
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Остальные интегралы оцениваются аналогично. Из (2.3), (2.5) следует, что $| < L(u_k), \nu > - L(u), \nu > | \to 0$ при $k \to \infty$. Полунепрерывность оператора L доказана. Установим теперь монотонность оператора L. Для любых $u, \nu \in W_{p,\alpha,\beta}$, в силу (1.8), (1.9) имеем

$$
< L(u) - L(\nu), u - \nu > = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega [a_i(x, \nabla u) - a_i(x, \nabla \nu)]\, \partial_i (u - \nu)\, dx +
$$

$$+\int_\Omega [c(x,u)-c(x,\nu)]\,(u-\nu)\,dx=\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega\int_0^1 \frac{\partial a_i(x,\nabla\nu+\tau\nabla(u-\nu))}{\partial\xi_j}\times$$

$$\times\,\partial_j(u-\nu)\,\partial_i(u-\nu)\,dx\,d\tau+\int_\Omega\int_0^1\frac{\partial c(x,\nu+\tau\,(u-\nu))}{\partial\xi}\,|u-\nu|^2\,dx\,d\tau\geq$$

$$\geq\mu_2\int_\Omega x_n^a\,(b-x_n)^\beta\,|\nabla(u-\nu)|^p\,dx+\mu_3\int_\Omega x_n^a\,(b-x_n)^\beta\,|u-\nu|^p\,dx\geq\mu\|u-\nu\|^p, \tag{2.6}$$

где $\mu=\min\{\mu_1,\mu_2\}$, и монотонность оператора L доказана. Теорема 2.1 доказана.

Определение 1. Элемент $u\in W_{p,\alpha,\beta}$ является обобщённым решением задачи (1.1), (1.2), если для любого $\nu\in W_{p,\alpha,\beta}$ имеем

$$<L(u),\nu>=\sum_{i=1}^n\int_\Omega a_i(x,\nabla u)\,\partial_i\nu\,dx+\int_\Omega c(x,u)\,\nu\,dx=\int_\Omega f(x)\,\nu(x)\,dx, \tag{2.7}$$

где $f(x)\in L_{q,-\alpha,-\beta}$.

Теорема 2.2. Для любого $f\in L_{q,-\alpha,-\beta}$ обобщённое решение задачи (1.1), (1.2) существует и единственно.

Доказательство : Существование обобщённого решения следует из Теоремы 2.1 и Теоремы А. Для доказательства единственности обобщённого решения рассмотрим два обобщённых решения $u_1(x)$, $u_2(x)\in W_{p,\alpha,\beta}$ уравнения (1.1). Имеем $<L(u_1),\nu>=<f,\nu>$ и $<L(u_2),\nu>=<f,\nu>$. Следовательно

$$<L(u_1)-L(u_2),\nu>=0\quad\text{для любого}\quad\nu\in W_{p,\alpha,\beta}. \tag{2.8}$$

Подставляя $\nu(x)=u_1(x)-u_2(x)$ в (2.8) и учитывая коэрцитивность оператора L, получаем $0=<L(u_1)-L(u_2),u_1-u_2>\geq c_0\,\|u_1-u_2\|^p$. Следовательно, $u_1\equiv u_2$. Доказательство завершено.

§3. РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНО–КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

В этом параграфе исследуется смешанная краевая задача для вырождающегося параболического уравнения

$$u_t+L(u)=f(t,x) \tag{3.1}$$

в цилиндре $Q_T=(0,T)\times\Omega$, а оператор L определён выражением (1.1). Рассматривается следующая задача :

$$u|_{t=0}=u_0(x),\quad x\in\Omega, \tag{3.2}$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad 0 \le t \le T. \tag{3.3}$$

Разрешимость задачи (3.1) — (3.3) опирается на одну общую теорему существования, доказанную в [3]. Для полноты изложения приведём её формулировку. С этой целью введём обозначения.

Пусть X – банахово пространство, X^* – пространство линейных непрерывных функционалов над X. Обозначим через $L_p(0,T,X)$, $p > 2$ пространство функций $u(t)\colon [0,T] \to X$ с нормой

$$|||u|||^p = \int_0^T \|u\|_X^p \, dt, \tag{3.4}$$

где $\|\cdot\|_X$ – норма банахова пространства X.

Далее, пусть $A(t,u)$ – нелинейный, монотонный оператор, зависящий от параметра $t \in [0,T]$, действующий из пространства $L_p(0.T,X)$ в сопряжённое пространство $L_q(0,T,X^*)$, $1/p + 1/q = 1$. Рассмотрим следующую задачу Коши :

$$u' + A(t,u) = h, \qquad u|_{t=0} = u_0(x), \tag{3.5}$$

где $h(t)$ – произвольно заданный элемент пространства $L_q(0.T.X^*)$. Наконец, через $H(u_0)$ обозначим пространство функций $u(t) \in L_p(0.T,X)$ таких, что $u' \in L_q(0,T,X^*)$, $u(0) = u_0$, $u_0 \in X$.

Теорема B ([3], Теорема 13). Пусть выполнены следующие два условия :

1) для почти всех $t \in [0.T]$ и любого $u(t) \in L_p(0,T,X)$ существует постоянная $c_0 > 0$ и ограниченная функция $k(t)$ такая, что $< A(t,u), u > \ge c_0 \|u\|_X^p - k(t)$;

2) Оператор $A(t,u)\colon L_p(0.T.X) \to L_q(0,T.X^*)$ ограничен и полунепрерывен.

Тогда отображение $L(u) = u' + A(t,u)\colon H(u_0) \to L_q(0,T,X^*)$ есть эпиморфизм, т.е. для любого $h \in L_q(0,T,X^*)$ задача (3.5) разрешима.

Пусть в Теореме B имеем $X = W_{p,\alpha,\beta}$.

Теорема 3.1. Пусть оператор L удовлетворяет условиям i), ii) и $f \in L_q(0,T;(W_{p,\alpha,\beta})^*)$. Тогда для любого $u_0 \in W_{p,\alpha,\beta}$ задача (3.1) — (3.3) имеет единственное решение $u \in L_p(0,T;W_{p,\alpha,\beta})$.

Доказательство : Существование. Сначала докажем, что оператор L ограничен. Пусть B – следующее ограниченное подмножество : $B = \{u \in L_p(0,T;) :$

$|||u||| \le R < \infty\}$. Пусть $u^* \in B$, $t \in [0, T]$. Рассмотрим линейный функционал

$$\begin{aligned} l(\nu) =&< L(u^*, \nu >= \int_0^T L(u^*, \nu)\, dt = \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_\Omega a_i(x, \nabla u^*)\, \partial_i \nu\, dx\, dt + \\ &+ \int_0^T \int_\Omega c(x, u^*)\, \nu\, dx\, dt \le c \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left[\int_0^T x_n^a\, (b - x_n)^\beta\, |\partial_i \nu|^p\, dt \right]^{1/p} \times \\ &\times \left[\int_0^T x_n^{-q\,a/p}\, (b - x_n)^{-q\,\beta/p}\, |a_i(x, \nabla u^*)|^q\, dt \right]^{1/q} dx + \\ &+ c_1 \int_\Omega \left[\int_0^T x_n^a\, (b - x_n)^\beta\, |\nu|^p\, dt \right]^{1/p} \times \\ &\quad \times \left[\int_0^T x_n^{-q\,a/p}\, (b - x_n)^{-q\,\beta/p}\, |c(x, u^*)|^q\, dt \right]^{1/q} dx \le \\ &\le c \sum_{i=1}^n \int_0^T \left[\int_\Omega x_n^a\, (b - x_n)^\beta\, |\nabla u^*|^p\, dx \right]^{1/q} \left[\int_\Omega x_n^a\, (b - x_n)^\beta\, |\partial_i \nu|^p\, dx \right]^{1/p} dt + \\ &+ c_1 \int_0^T \left[\int_\Omega x_n^a\, (b - x_n)^\beta\, |u^*|^p\, dx \right]^{1/q} \left[\int_\Omega x_n^a\, (b - x_n)^\beta\, |\nu|^p\, dx \right]^{1/p} dt \le \\ &\le c_0 \left(\int_0^T \|\nu\|^p\, dt \right)^{1/p} |||u^*|||^{1/q} \le c_0\, R^{1/q}\, |||\nu|||. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Из (3.6) следует, что $|||L(u^*)|||'_q \le c\, R^{1/q}$, где $|||u|||'_q = \left(\int_0^T \|u\|^q_{(W_{p,\alpha,\beta})^*} \right)^{1/q}$. Следовательно, L ограничен.

Теперь установим монотонность L. Коэффициенты оператора L не зависят от t. Поэтому для $t \in [0, T]$ и $u, \nu \in L_p(0, T; W_{p,\alpha,\beta})$ из (2.6) имеем

$$\begin{aligned} &< L(u) - L(\nu), u - \nu >= \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_\Omega [a_i(x, \nabla u) - a_i(x, \nabla \nu)]\, \partial_i(u - \nu)\, dx\, dt + \\ &+ \int_0^T \int_\Omega [c(x, u) - c(x, \nu)]\, (u - \nu)\, dx\, dt \ge \mu \int_0^T \|u - \nu\|\, dt \ge 0, \end{aligned} \tag{3.7}$$

с некоторой постоянной $\mu > 0$. Следовательно, L монотонен.

Установим полунепрерывность оператора L. Рассмотрим $u, \nu \in L_p(0, T; W_{p,\alpha,\beta})$ и последовательность $\{u_k\}$ такую, что $\|u_k - u\| \to 0$ при $k \to \infty$. Имеем

$$\begin{aligned} &< L(u_k) - L(u), \nu >= \sum_{i,j=1}^n \int_0^T \int_\Omega \int_0^1 \frac{\partial a_i(x, \nabla u + \tau\, \nabla(u_k - u))}{\partial \xi_j}\, \partial_j(u_k - u) \times \\ &\times \partial_i \nu\, dx\, dt\, d\tau + \int_0^T \int_\Omega \int_0^1 \frac{\partial c(x, u + \tau\, (u_k - u))}{\partial \xi}\, |u_k - u|\, \nu\, dx\, dt\, d\tau \le \\ &\le c \sum_{i,j=1}^n \int_0^T \int_\Omega \int_0^1 x_n^a\, (b - x_n)^\beta\, |\nabla u + \tau\, \nabla(u_k - u)|^{p-2}\, |\partial_j(u_k - u)|\, |\partial_i \nu|\, dx\, dt\, d\tau + \end{aligned}$$

$$+ \mu_4 \int_0^T \int_\Omega \int_0^1 x_n^a (b-x_n)^\beta |u + \tau(u_k - u)|^{p-2} |u_k - u| |\nu| \, dx\, dt\, d\tau \le$$

$$\le c \sum_{i,j=1}^n \int_0^T \int_\Omega x_n^a (b-x_n)^\beta \left[|\nabla u|^{p-2} + |\nabla(u_k - u)|^{p-2} \right] |\partial_j (u_k - u)| |\partial_i \nu| \, dx\, dt +$$

$$+ \mu_4 \int_0^T \int_\Omega x_n^a (b-x_n)^\beta \left[|u|^{p-2} + |u_k - u|^{p-2} \right] |u_k - u| |\nu| \, dx\, dt \le$$

$$\le c_0 \sum_{i,j=1}^n \int_0^T \int_\Omega x_n^a (b-x_n)^\beta \left[|\nabla u|^{p-1} + |\partial_i \nu|^{p-1} \right] |\partial_j (u_k - u)| \, dx\, dt +$$

$$+ c_0 \sum_{i,j=1}^n \int_0^T \int_\Omega x_n^a (b-x_n)^\beta |\partial_j (u_k - u)|^{p-1} |\partial_i \nu| \, dx\, dt +$$

$$+ \mu_4 \int_0^T \int_\Omega x_n^a (b-x_n)^\beta \left[|u|^{p-1} + |\nu|^{p-1} \right] |u_k - u| \, dx\, dt +$$

$$+ \mu_4 \int_0^T \int_\Omega x_n^a (b-x_n)^\beta |u_k - u|^{p-1} |\nu| \, dx\, dt. \tag{3.8}$$

В силу (2.5) получаем

$$\int_0^T \int_\Omega x_n^a (b-x_n)^\beta |\nabla u|^{p-1} |\partial_j (u_k - u)| \, dx\, dt \le$$

$$\le \int_0^T \left[\int_\Omega x_n^a (b-x_n)^\beta |\nabla u|^p \, dx \right]^{1/q} \left[\int_\Omega x_n^a (b-x_n)^\beta |\partial_j (u_k - u)|^p \, dx \right]^{1/p} dt \le$$

$$\le \int_0^T \|u\|^{p-1} \|u_k - u\| \, dt \le c_3 \left(\int_0^T \|u_k - u\|^p \, dt \right)^{1/p} \left(\int_0^T \|u\|^p \, dt \right)^{1/q} =$$

$$= c_3 |||u_k - u||| \, |||u|||^{p-1}. \tag{3.9}$$

Остальные интегралы в (3.8) оцениваются аналогично. Возвращаясь к неравенству (3.8), в силу (3.9), при $k \to \infty$ получим

$$| < L(u_k) - L(u), \nu > | \le$$

$$\le c' |||u_k - u||| \left(|||u|||^{p-1} + |||\nu|||^{p-1} + |||u_k - u|||^{p-2} |||\nu||| \right) \to 0.$$

Таким образом, $\lim\limits_{k \to \infty} < L(u_k), \nu > = < L(u), \nu >$, а это означает, что последовательность $\{u_k\}$ слабо сходится в пространстве $L_q(0, T; (W_{p,\alpha,\beta})^*)$. Следовательно, полунепрерывность оператора L доказана.

Теперь применяя Теорему B, получим, что задача (3.1) — (3.3) разрешима.

Единственность. Пусть $u_1, u_2 \in H(u_0)$ - два решения задачи (3.1) — (3.3), отвечающие одному и тому же начальному условию $u_0 \in W_{p,\alpha,\beta}$. Тогда их разность удовлетворяет следующему тождеству :

$$(u_1 - u_2)_t + L(u_1) - L(u_3) = 0, \tag{3.10}$$

и

$$(u_1 - u_2)|_{t=0} = 0. \qquad (3.11)$$

Из (3.10) следует, что для почти всех $\tau \in [0, T]$ имеем

$$\int_0^\tau < (u_1 - u_2)_t, u_1 - u_2 > dt = \int_0^\tau < L(u_1) - L(u_2), u_1 - u_2 > dt = 0. \qquad (3.12)$$

Так как $u_1 - u_2$ и $L(u)$ принадлежат $L_q(0, T; (W_{p,\alpha,\beta})^*)$, то интегралы в (3.12) сходятся. В силу монотонности оператора L из (3.12) получаем

$$\int_0^\tau < (u_1 - u_2)_t, u_1 - u_2 > dt = \frac{1}{2}\int_0^\tau \frac{\partial}{\partial t}||u_1 - u_2||^2_{L_2} dt \leq 0.$$

Поскольку $p > 2$, имеем $u_1 - u_2 \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$. Из (3.11) и из последнего неравенства имеем $\int_\Omega |u_1(x,\tau) - u_2(x,\tau)|^2 dx = 0$. В силу произвольности τ отсюда заключаем, что $u_1 \equiv u_2$ в цилиндре Q_T. Теорема 3.1 доказана.

ABSTRACT. The paper investigates solvability of a boundary-value problems for second order nonlinear elliptical and parabolic equations, degenerate on the boundary in two directions with different weight coefficients. Unique solvability is proved in special weighted functional spaces.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. С. Акопян и Р. Л. Шахбагян, "Краевая задача для нелинейных уравнений, вырождающихся на части границы", Изв. АН Армении, Математика, том 33, № 6, стр. 3 — 12, 1998.
2. Г. С. Акопян и Л. П. Тепоян, "Единственность обобщенного решения нелинейного дифференциального уравнения с вырождением", Изв. АН Армении, Математика, том 35, № 6, стр. 74 — 79, 2000.
3. Ю. А. Дубинский, "Квазилинейные эллиптические и параболические уравнения любого порядка", УМН, том 23, № 1(139), стр. 45 — 90, 1968.
4. Л. Д. Кудрявцев, Об эквивалентных нормах в весовых пространствах", Труды Мат. Института АН СССР, том 70, стр. 161 - 190, 1984.

17 января 2001

Ереванский государственный университет,
Иджеванский филиал