О ПЕРЕСЕЧЕНИИ ШАТРОВ В БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Р. А. Хачатрян, Ф. Г. Арутюнян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 36, № 2, 2001

Настоящая статья распространяет теорию шатров на бесконечномерные банаховы пространства. При некоторых общих условиях, что если H_i есть компактный шатёр для множества M_i в точке $x_0 \in M = M_1 \cap M_2$ для $i = 1, 2$, то $H = H_1 \cap H_2$ является шатром для M в точке x_0. Аналогичные утверждения известны только для конечномерных пространств.

§1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

В настоящей статье теория шатров распространяется на бесконечномерные банаховы пространства и доказывается, что при некоторых общих условиях, что если H_i является компактным шатром для множества M_i в точке $x_0 \in M = M_1 \cap M_2$ при $i = 1, 2$, то $H = H_1 \cap H_2$ является шатром для M в точке x_0. Аналогичные утверждения известны только для конечномерных пространств. Прежде чем доказать это утверждение (§2) в этом параграфе проведём необходимую предварительную работу.

Напомним некоторые определения и обозначения. Пусть X и Y – банаховы пространства. Многозначным отображением a из X в Y называется отображение, которое сопоставляет каждому $x \in X$ множество $a(x) \subset Y$.

Положим $\mathrm{dom}\, a \equiv \{x \in X / a(x) \neq \emptyset\}$; $\mathrm{graf}\, a \equiv \{(x, y)/y \in a(x)\}$. Пусть Y^* – пространство, сопряжённое к Y, $y^* \in Y^*$, а $< y^*, x >$ – значение линейного непрерывного функционала y^* на элементе x.

Определение 1. Многозначное отображение a полунепрерывно сверху в точке $x_0 \in X$, если для любой окрестности V множества $a(x_0)$ существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что $a(x) \subseteq V$ для любого $x \in U(x_0)$.

Определение 2. Многозначное отображение a полунепрерывно снизу в точке x_0, если для любого $y_0 \in a(x_0)$ и любой окрестности $V(y_0)$ точки y_0 существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что $a(x) \cap V(y_0) \neq \emptyset$ для любого $x \in U(x_0)$.

Многозначное отображение называется непрерывным в точке x_0, если оно одновременно полунепрерывно и снизу и сверху в точке x_0.

Теорема Майкла о непрерывной селекции (см. [9]). Пусть X и Y – банаховы пространства, a – непрерывное многозначное отображение. Если $a(x)$ – непустое, выпуклое и замкнутое множество, то существует непрерывное однозначное отображение $y(\cdot) : X \to Y$ такое, что $y(x) \in a(x)$ для всех $x \in X$.

Теорема 1.1. Пусть a – многозначное отображение из X в Y, причём $\operatorname{graf} a$ есть замкнутый выпуклый конус и $\operatorname{dom} a = X$. Тогда существует непрерывное однозначное отображение $y(\cdot) : X \to Y$ и число $c > 0$ такие, что $y(x) \in a(x)$, $\|y(x)\| \le c\,\|x\|$ для всех $x \in X$.

Доказательство : В [7] показано, что при вышеуказанных условиях a является липшицевым многозначным отображением, т.е. существует число $\gamma > 0$ такое, что $a(x_2) \subseteq a(x_1) + \gamma\,\|x_1 - x_2\|\,B(0,1)$ для всех $x_1, x_2 \in X$. Рассмотрим многозначное отображение

$$F(x) \equiv a(x) \cap B(0, c\,\|x\|), \tag{1.1}$$

где $c = 2\gamma$ и покажем, что F непрерывно.

Сначала покажем, что F полунепрерывно сверху в любой точке $x_0 \in X$. Так как $(0,0) \in \operatorname{graf} a$, то имеем $0 \in a(0)$. Поэтому из (1.1) следует, что для всех $x \in X$ существует $y \in a(x)$ такое, что $y \in B(0, \gamma\,\|x\|)$, т.е. $F(x) \ne \emptyset$. Следовательно, $\operatorname{dom} F = X$. Пусть $x_0 = 0$ и поэтому $F(0) = 0$. В этом случае для любого $\varepsilon > 0$ выберем $\delta = \varepsilon/c$. Из $\|x\| \le \delta$ вытекает, что $F(x) \subseteq F(0) + B(0,\varepsilon)$, а это означает, что F полунепрерывно сверху в точке O. Пусть теперь $x_0 \ne 0$ и $\varepsilon > 0$. Мы должны показать, что существует окрестность $V(x_0)$ точки x_0 такая, что $\|y - \overline{y}\| \le \varepsilon$. Положим $A = \{x \in X / \|x - x_0\| \le \dfrac{\|x_0\|}{2}\}$, $\delta = 3c\|x_0\|$ и предположим, что $\varepsilon < 2\delta$. Так как $0 \in a(x_0) - B(0, \gamma\|x_0\|)$, то получаем $0 \in \operatorname{int}\{a(x_0) - B(0, c\|x_0\|)\}$. Поэтому существует число $\tau > 0$ такое, что

$$\tau\,B(0,1) \subseteq a(x_0) - B(0, c\|x_0\|). \tag{1.2}$$

Положим $\alpha = \tau\cdot\varepsilon/(2\delta - \varepsilon)$. Число τ выберем настолько малым, чтобы $\alpha < \varepsilon/2$. Поскольку $a(x)$ и $B(0, c\|x\|)$ полунепрерывны сверху, то можно найти окрестность $U(x_0) \subseteq A$ такую, что $B(0, c\|x\|) \subseteq B(0, c\|x_0\|) + \dfrac{\alpha}{2}\,B(0,1)$ и

$$a(x) \subseteq a(x_0) + \frac{\alpha}{2}\,B(0,1) \quad \text{для всех} \quad x \in U(x_0).$$

Следовательно, для любых $y \in F(x)$, $x \in U(x_0)$ существует $\overline{y}_x \in B(0, c\|x_0\|)$ такое, что

$$\overline{y}_x \in a(x_0) + \alpha B(0,1). \tag{1.3}$$

Пусть $\theta = \dfrac{\tau}{\alpha + \tau} < 1$. Умножая (1.3) на θ и замечая, что $\theta\alpha = (1-\theta)\tau$, получим

$$\theta \cdot \overline{y_x} \in \theta \cdot a(x_0) + \theta \cdot \alpha B(0,1) = \theta \cdot a(x_0) + (1-\theta)\tau B(0,1). \tag{1.4}$$

Умножая (1.2) на $(1-\theta)$, находим $(1-\theta)\tau B(0,1) \subset (1-\theta)a(x_0) - (1-\theta)B(0, c\|x_0\|)$. Отсюда и из (1.4) следует, что

$$\theta\,\overline{y}_x \in \theta\, a(x_0) + (1-\theta)a(x_0) - (1-\theta)B(0,c\|x_0\|) = a(x_0) - (1-\theta)B(0,c\|x_0\|),$$

т.е. существует элемент $y' \in B(0, c\|x_0\|)$ такой, что $\theta\,\overline{y}_x + (1-\theta)y' \in a(x_0)$. Так как $y, y' \in B(0, c\|x_0\|)$, то имеем $\overline{y} \equiv \theta\, y_x + (1-\theta)\, y' \in B(0, c\|x_0\|)$. Следовательно, $\overline{y} \in F(x_0)$. Проверим, что $\|y - \overline{y}\| \le \varepsilon$. Действительно

$$\|y - \overline{y}\| \le \|y - (\theta\, y_x + (1-\theta)y')\| = \|\theta\, y + (1-\theta)y - \theta\, y_x - (1-\theta)y'\| \le$$

$$\le \theta\|y - y_x\| + (1-\theta)\|y - y'\| \le \alpha + \frac{\alpha}{\alpha+\tau}\delta \le \varepsilon/2 + \frac{\alpha}{\alpha+\tau}\delta = \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Таким образом, $F(x) \subseteq F(x_0) + B(0,\varepsilon)$. Аналогичным образом можно показать, что F полунепрерывно снизу. Теперь применяя теорему Майкла, получим требуемый результат. Теорема 1.1 доказана.

Определение 3. Выпуклый конус K называется шатром множества M в точке $x \in M$, если существуют отображение $r(\overline{x}) : X \to X$, определённое в окрестности нуля, и $\varepsilon > 0$ такие, что

1. $r(\overline{x})/\|\overline{x}\| \to 0$ при $\overline{x} \to 0$,
2. $x + \overline{x} + r(\overline{x}) \in M$ для $\overline{x} \in K \cap B(0,\varepsilon)$.

Шатёр называется компактным, если $r(\cdot)$ – непрерывное отображение, которое отображает ограниченное множество в предкомпактное множество пространства X. Пусть $f(x)$ – выпуклая непрерывная функция. Через $\partial f(x)$ обозначим субдифференциал функции f в точке x, а через $f'(x, \overline{x})$ – производную по направлению $\overline{x}$ в точке x.

Лемма 1.1. Пусть X – рефлексивное банахово пространство, $f(x)$ – выпуклая непрерывная функция в окрестности точки x_0. Если $\partial f(x_0)$ – компакт, то существует отображение $r(\overline{x})$, определённое в окрестности нуля такое, что

$$f(x_0 + \overline{x}) \le f(x_0) + f'(x_0, \overline{x}) + r(\overline{x}); \quad \lim_{\overline{x}\to 0} \frac{r(\overline{x})}{\|\overline{x}\|} = 0.$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству Леммы 2 из [8].

Лемма 1.2. Пусть X – равномерно выпуклое банахово пространство. H – подпространство в X. Тогда для любого элемента $x \in X$ существует единственный элемент $\Pi(x) \in H$ такой, что

$$d_H(x) \equiv \inf_{y \in H} ||y - x|| = ||x - \Pi(x)||.$$

Отображение Π непрерывно по x и $||\Pi(x)|| \leq 2||x||$.

Доказательство : Рассмотрим замкутый шар $B(x, d_H(x) + \varepsilon)$ с центром в точке x и радиусом $d_H(x) + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$). Множество $H \cap B$ непусто и

$$d_H(x) = \inf_{y \in H \cap B} ||x - y||.$$

Так как функционал $\omega(x) = ||x - y||$ слабо полунепрерывен снизу и множество $H \cap B$ слабо компактно (как ограниченная замкнутая выпуклая часть рефлексивного пространства X), то $\omega(x)$ достигает минимума на $H \cap B$, т.е. существует элемент $\Pi(x) \in H \cap B$ такой. что $d_H(x) = ||x - \Pi(x)||$.

Поскольку пространство X равномерно выпуклое, то такой элемент единственный. Поскольку $0 \in H$, то имеем $||\Pi(x)|| \leq ||x - \Pi(x)|| + ||x|| \leq 2||x||$. Покажем непрерывность отображения $\Pi(x)$. Положим

$$A(x) = \{y \in X / ||x - y|| \leq d_H(x)\}, \quad \text{получаем} \quad \Pi(x) = H \cap A(x). \tag{1.5}$$

Пусть $x_i \to x_0$, $y_i \in A(x_i)$ и $y_i \Rightarrow y_0$ (слабая сходимость). Покажем, что $y_0 \in A(x_0)$. Действительно, имеем

$$||x_i - y_i|| = \sup_{||x^*|| \leq 1} < x^*, x_i - y_i > \leq d_H(x_i).$$

Тогда для любого фиксированного функционала x^* имеет место неравенство $< x^*, x_i - y_i > \leq d_H(x_i)$. Переходя к пределу, получим $< x^*, x_0 - y_0 > \leq d_H(x_0)$. Из представления (1.5) следует, что если $x_i \to x_0$, то ограниченная последовательность $\Pi(x_i)$ имеет только одну слабо предельную точку $\Pi(x_0)$. Следовательно, $\Pi(x_i) \Rightarrow \Pi(x_0)$. С другой стороны, $||x_i - \Pi(x_i)|| \to ||x_0 - \Pi(x_0)||$. Поскольку пространство равномерно выпуклое, то имеем $x_i - \Pi(x_i) \to x_0 - \Pi(x_0)$. Отсюда получаем $\Pi(x_i) \to \Pi(x_0)$. Лемма 1.2 доказана.

Теорема 1.2. Пусть X – равномерно выпуклое банахово пространство, а $f(x)$ – выпуклая непрерывная функция, $x_0 \in M \equiv \{x \in X / f(x) = 0\}$ и $0 \notin \partial f(x_0)$. Если $\partial f(x_0)$ – компактное множество, то подпространство

$$H = \{\overline{x} \in X / f'(x_0, \overline{x}) \leq 0, f'(x_0, -\overline{x}) \leq 0\}$$

является компактным шатром для M в точке x_0.

Доказательство : Так как $0 \notin \partial f(x_0)$, то существует вектор $w \in X$ такой, что $f'(x_0, w) < 0$. Согласно Лемме 1.1 для некоторой функции $r(\overline{x}) = o(\overline{x})$ имеет место неравенство : $f(x_0+\overline{x}) \leq f(x_0)+f'(x_0,\overline{x})+r(\overline{x})$. Положим $P(\lambda) = \sup\{r(\overline{x})/||\overline{x}|| \leq \lambda\}$. Ясно, что $P(\lambda)$ монотонно убывает и $P(\lambda)/\lambda \to 0$ при $\lambda \downarrow 0$ и $r(\overline{x}) \leq P(||\overline{x}||)$. Поэтому для $\overline{x} \in H$ и $\gamma > 0$

$$f(x_0 + \overline{x} + \gamma||\overline{x}||w) \leq f'(x_0, \overline{x} + \gamma||\overline{x}||w) + P(||\overline{x} + \gamma||\overline{x}w||) \leq f'(x_0, \overline{x})+$$
$$+ \gamma\,||\overline{x}||\, f'(x_0, w) + P(||\overline{x} + \gamma||\overline{x}||w||) \leq ||\overline{x}|| f'(x_0, w) + P(||\overline{x}||\,(1 + \gamma\,||w||)) =$$
$$= ||\overline{x}||\,\left[\gamma\, f'(x_0, w) + \frac{P(||\overline{x}||\,(1 + \gamma\,||w||))}{||\overline{x}||}\right].$$

Выберем теперь $\delta > 0$ настолько малым, чтобы выражение в квадратных скобках было бы меньше, чем $\gamma/2f'(x_0, w)$ при $||\overline{x}|| \leq \delta$. Тогда

$$f(x_0 + \overline{x} + \gamma||\overline{x}||w) \leq \frac{1}{2}\gamma||\overline{x}||f'(x_0, w) < 0 \quad \text{при} \quad ||\overline{x}|| \leq \delta.$$

С другой стороны, в силу выпуклости функции $f(x)$, для любого $x^* \in \partial f(x_0)$ имеем

$$f(x_0 + \overline{x} - \gamma||\overline{x}||w) - f(x_0) \geq < x^*, \overline{x} - \gamma||\overline{x}||w > .$$

Следовательно, для $\overline{x} \in H$ имеем $f(x_0+\overline{x}-\gamma||\overline{x}||w)-f(x_0) \geq \gamma||\overline{x}|| < x^*, -w >> 0$. Рассмотрим функцию $q(\alpha) \equiv f(x_0 + \overline{x} + \alpha||\overline{x}||w)$, $q(\gamma) < 0$ и $q(-\gamma) > 0$. Так как $q(\alpha)$ является непрерывной функцией и меняет знак на отрезке $[-\gamma, \gamma]$, то существует точка $\alpha(\overline{x}) \in (-\gamma, \gamma)$ в которой функция $q(\alpha)$ обращается в нуль. Итак, для любого $\gamma > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$f(x_0 + \overline{x} + \alpha||\overline{x}||w) = 0, \quad ||\alpha(\overline{x})|| \leq \gamma, \quad ||\overline{x}|| \leq \delta.$$

Следовательно, $\alpha(\overline{x}) \to 0$ при $\overline{x} \to 0$. Заметим, что

$$\lim_{\Delta\downarrow 0} \frac{q(x + \Delta) - q(\alpha)}{\Delta} \leq \lim_{\Delta\downarrow 0} \frac{\varphi(x_0 + \overline{x} + (\alpha + \Delta)||\overline{x}||w) - \varphi(x_0 + \overline{x} + \alpha||\overline{x}||w)}{\Delta} =$$
$$= \varphi'(x_0 + \overline{x} + \alpha||\overline{x}||w, w) \cdot ||\overline{x}||.$$

Поэтому, в силу полунепрерывности сверху функции $f'(\alpha, w)$ в точке x_0 и условия $f'(x_0, w) < 0$, получаем

$$\lim_{\Delta\downarrow 0} \frac{q(\alpha + \Delta) - q(\alpha)}{\Delta} < 0$$

при достаточно малых $\overline{x}$. Следовательно, $q(\alpha)$ монотонно убывает и поэтому $\alpha(\overline{x})$ для достаточно малых $\overline{x}$ определяется однозначно.

Покажем непрерывность отображения $\alpha(\overline{x})$. Допустим противное. Тогда существуют последовательности $\{\overline{x}_i\}$, $\{\overline{y}_i\}$ такие, что $\overline{x}_i$, $\overline{y}_i \in H$ и $\overline{x}_i \to \overline{x}_0$, $\overline{y}_i \to \overline{y}_0$, $\alpha(\overline{x}_i) \to \overline{\alpha}$, $\alpha(\overline{y}_i) \to \alpha$, $\overline{\alpha} \neq \underline{\alpha}$. Имеем

$$f(x_0 + \overline{x}_i + \alpha(\overline{x}_i)\|\overline{x}_i\|w) = 0, \quad f(x_0 + \overline{y}_i + \alpha(\overline{y}_i)\|\overline{y}_i\|w) = 0.$$

Переходя к пределу и учитывая непрерывность функции $f(x)$ в окрестности точки x_0, получаем

$$f(x_0 + \overline{x}_0 + \overline{\alpha}\,\|\overline{x}_0\|w) = 0, \quad f(x_0 + \overline{x}_0 + \underline{\alpha}\,\|\overline{x}_0\|w) = 0, \quad |\overline{\alpha}| \leq \gamma, \quad |\underline{\alpha}| \leq \gamma.$$

В силу однозначности $\alpha(\overline{x})$ получим $\alpha(x_0) = \overline{\alpha} = \underline{\alpha}$.

Пусть $\Pi(\overline{x})$ – проекция точки $\overline{x} \in X$ на подпространство H. Согласно Лемме 1.2 отображение $\Pi(\overline{x})$ является непрерывным и $\|\Pi(\overline{x})\| \leq 2\|\overline{x}\|$. Положим $r(\overline{x}) = \alpha(\Pi(\overline{x}))\|\overline{x}\|w$. Тогда $r(\overline{x})$ является компактным отображением, определённым в окрестности нуля и

$$\frac{\|r(\overline{x})\|}{\|\overline{x}\|} = \|w\| \cdot |\Pi(\overline{x}))| \to 0 \quad \text{при} \quad \overline{x} \to 0,$$

причём $f(x_0 + \overline{x} + r(\overline{x})) = 0$ при достаточно малых $\overline{x} \in H$. Теорема 1.2 доказана.

§2. О ПЕРЕСЕЧЕНИИ ШАТРОВ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В этом параграфе доказывается теорема о пересечении шатров в банаховом пространстве X, которая распространяет хорошо известный результат для конечномерных пространств (см. [5]).

Теорема 2.1. Пусть пространства H_1 и H_2 являются компактными шатрами для M_1 и M_2 в точке $x_0 \in M_1 \bigcap M_2 \equiv M$ и $H_1 + H_2 = X$. Тогда подпространство $H = H_1 \bigcap H_2$ является шатром множества M в точке x_0.

Доказательство : Без ограничения общности предположим, что $x_0 = 0$. Тогда существуют компактные отображения r_i, $i = 1, 2$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что

$$\Psi_i(\overline{x}) = \overline{x} + r_i(\overline{x}) \in M \quad \text{при} \quad \overline{x} \in H_i \cap B(0, \varepsilon).$$

Для любого $x \in X$ обозначим

$$a(x) \equiv \{x_1 \in H_1 : \text{ существует } x_2 \in H_2, \text{ для которого } x = x_1 + x_2\}.$$

Нетрудно проверить, что a удовлетворяет всем условиям Теоремы 1.1. Следовательно, существуют непрерывные отображения P_1, P_2 и число $c > 0$ такие, что для любого $y \in X$ имеем $y = P_1 y + P_2 y$ и $P_i y \in H_i$, $||P_i y|| \leq c||y||$, $i = 1, 2$. Рассмотрим следующее уравнение :

$$g(\overline{x}, y) = \Psi_1(\overline{x} + P_1 y) - \Psi_2(\overline{x} - P_2 y) = 0.$$

Положим $r(\overline{x}, y) \equiv r_1(\overline{x} + P_1 y) - r_2(\overline{x} - P_2 y)$. При любом фиксированном $\overline{x}$ отображение $r(\overline{x}, \cdot)$ является компактным. Действительно, так как $r_1(\cdot)$, $r_2(\cdot)$, P_1 и P_2 являются непрерывными отображениями, то $r(\overline{x}, \cdot)$ также является непрерывным отображением. Так как $||P_i(x) \leq c||x||$, $i = 1, 2$, для любого ограниченного множества $G \subset X$, то множества $P_i G$ также являются ограниченными. Следовательно, множества $r_1(\overline{x} + P_1 G)$, $r_2(\overline{x} - P_2 G)$ и $r(x, G)$ предкомпактны. Рассмотрим отображение $f(\overline{x}, y) \equiv y - g(\overline{x}, y)$. Так как

$$\frac{r_i(\overline{x} + P_i y)}{\sqrt{||\overline{x}||^2 + ||y||^2}} \to 0, \quad \text{при} \quad \overline{x} \to 0, \quad y \to 0,$$

то получаем $||f(\overline{x}, y)|| = ||r(\overline{x}, y)|| \leq \overline{r}\left(\sqrt{||\overline{x}||^2 + ||y||}\right)$, где $\overline{r}(t)/t \to 0$ при $t \to 0$. Без ограничения общности можно считать, что $\overline{r}(t)$ не убывает (в противном случае можно заменить функцию $\overline{r}(t)$ на $\omega(t) = \sup\{\overline{r}(\lambda), 0 \leq \lambda \leq t\}$). Положим

$$\tau(\overline{x}) = \inf\{\tau\colon \overline{r}\left(\sqrt{||\overline{x}||^2 + \tau^2}\right) \leq \tau\}.$$

При достаточно малых $\overline{x}$ выполняется неравенство $\tau(\overline{x}) \leq ||\overline{x}||$. По определению $\tau(\overline{x})$ существует $\tau^*(\overline{x})$ такое, что

$$\tau(\overline{x}) \leq \tau^*(\overline{x}) \leq \tau(\overline{x}) + ||\overline{x}||^2, \qquad \overline{r}\left(\sqrt{||\overline{x}||^2 + (\tau^*(\overline{x}))^2}\right) \leq \tau^*(\overline{x}).$$

Покажем, что $\tau^*(\overline{x})/||\overline{x}|| \to 0$. Так как $\overline{r}(t)$ не убывает, то из неравенства $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \leq \alpha + \beta$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ получаем

$$\tau(\overline{x}) - ||\overline{x}||^2 < \overline{r}\left(\sqrt{||\overline{x}||^2 + (\tau(\overline{x}) - ||\overline{x}||^2)^2}\right) \leq \overline{r}\left(||\overline{x}|| + |\tau(\overline{x}) - ||\overline{x}||^2|\right) \leq \overline{r}(3\,||\overline{x}||).$$

Поэтому $\dfrac{\tau^*(\overline{x})}{||\overline{x}||} \to 0$ при $\overline{x} \to 0$. Следовательно, если $||y|| \leq \tau^*(\overline{x})$, то $||f(\overline{x}, y)|| \leq \tau^*(\overline{x})$. Таким образом, компактное отображение $f(\overline{x}, \cdot)$ отображает шар $||y|| \leq \tau^*(\overline{x})$ в себя. Используя Теорему Шаудера (см. [6]) получаем, что отображение $f(\overline{x}, \cdot)$ имеет неподвижную точку в этом шаре, т.е. существует отображение $y(\overline{x})$ такое, что $||f(\overline{x}, y(\overline{x})|| \leq \tau^*(\overline{x})$ и $||y(\overline{x}|| \leq \tau^*(\overline{x})$. Следовательно

$$\frac{||y(\overline{x})||}{||\overline{x}||} \to 0 \quad \text{при} \quad \overline{x} \to 0. \tag{2.1}$$

Таким образом, $g(\overline{x}, y(\overline{x})) = 0$. Положим

$$\Psi(\overline{x}) \equiv \Psi_1(\overline{x} + P_1(y(\overline{x}))) = \Psi_2(\overline{x} - P_2(y(\overline{x})). \tag{2.2}$$

Тогда $\Psi(\overline{x}) = \overline{x} + r(\overline{x})$, где $r(\overline{x}) = P_1(y(\overline{x})) + r_1(\overline{x} + P_1(y(\overline{x})))$. В силу (2.1) получаем $\frac{r_1(\overline{x})}{\|\overline{x}\|} \to 0$ и $\frac{r(\overline{x})}{\|\overline{x}\|} \to 0$ при $\overline{x} \to 0$. Пусть $Z_1(\overline{x}) = \overline{x} + P_1(y(\overline{x}))$, $Z_2(\overline{x}) = \overline{x} + P_2(y(\overline{x}))$. В силу равенства (2.2) имеем $\Psi(\overline{x}) = \Psi_1(Z_1(\overline{x})) = \Psi_2(Z_2(\overline{x}))$. Если $\overline{x} \in H_i$, то $Z_i(\overline{x}) \in H_i$, $i = 1, 2$. Теперь выберем $\varepsilon_1 > 0$ настолько малым, что $Z_i(\overline{x}) \in B(0, \varepsilon)$, когда $\|\overline{x}\| < \varepsilon_1$ и $\overline{x} \in H$. Ясно, что из $Z_i(\overline{x}) \in B(0, \varepsilon)$ вытекает $\Psi_i(Z_i(\overline{x})) \in M_i$, т.е. $\Psi(\overline{x}) \in M_1 \bigcap M_2$. Теорема 2.1 доказана.

ABSTRACT. The paper extends the theory of tents to infinite dimensional Banach spaces. Under rather general conditions, if H_i is a compact tent for the set M_i at $x_0 \in M = M_1 \cap M_2$ for $i = 1, 2$, then $H = H_1 \cap H_2$ is a tent for M at x_0. Similar statements have been known only for finite dimensional spaces.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Н. Пшеничный, Необходимые Условия Экстремума, Москва, Наука, 1982.
2. Б. Н. Пшеничный, Выпуклый Анализ и Экстремальные Задачи, Москва, Наука, 1980.
3. Б. Н. Пшеничный, Р. А. Хачатрян, "Ограничения типа равенства в негладких задачах оптимизации", Экономика и матем. методы, № 6, стр. 1133 — 1140, 1982.
4. Б. Н. Пшеничный, Р. А. Хачатрян, "О необходимых условиях экстремума для негладких функций", Изв. АН Армении, Математика, том 18, № 4, стр. 318 - 325, 1983.
5. В. Г. Болтянский, "Метод шатров в теории экстремальных задач", УМН, том 30, № 6, стр. 3 — 55, 1975.
6. В. А. Треногин, Функциональный Анализ, Москва, Наука, 1980.
7. Ж. П. Обен, И. Экланд, Прикладной Нелинейный Анализ, Москва, Мир, 1988.
8. Р. А. Хачатрян, "О необходимых условиях экстремума в задачах с ограничениями типа равенств", Межвузовский науч. сборник "Прикладная математика", ЕГУ, № 7, стр. 165 — 173, 1988.
9. R. B. Holmes, Geometric Analysis and Applications, N. Y., Springer, 1975.

17 января 2001

Ереванский государственный университет