

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ С СИММЕТРИЧНЫМИ МАТРИЧНЫМИ ЯДРАМИ

Ф. Э. Мелик-Адамян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 36, № 2, 2001

В статье изучаются интегральные операторы с симметричными матричными ядрами. Показано, что такие ядра могут рассматриваться как резольвентные ядра канонических дифференциальных уравнений. Спектральные функции этих операторов описываются, используя описание спектральных функций соответствующих дифференциальных уравнений.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим в пространстве $L^2(0, l; \mathbb{C}^{2n})$ интегральный оператор G , определяемый по формуле

$$(Gx)(\tau) = B(\tau) \int_0^\tau A^*(s)x(s) ds + A(\tau) \int_\tau^l B^*(s)x(s) ds, \quad x \in L^2(0, l; \mathbb{C}^{2n}),$$

где $A(\tau)$ и $B(\tau)$, определённые в интервале $(0, l)$, $l \leq \infty$ ($2n \times n$) матрицы-функции. Очевидно, что G является интегральным оператором с симметричным ядром вида

$$G(\tau, s) = \begin{cases} B(\tau)A^*(s) & \text{для } s < \tau, \\ A(\tau)B^*(s) & \text{для } s > \tau, \end{cases} \quad (1)$$

где $A(\tau)$ и $B(\tau)$ рассматриваются как матрицы-столбцы

$$A(\tau) = \begin{bmatrix} a_1(\tau) \\ a_2(\tau) \end{bmatrix}, \quad B(\tau) = \begin{bmatrix} b_1(\tau) \\ b_2(\tau) \end{bmatrix},$$

где блок-матрицы $a_k(\tau), b_k(\tau)$, ($k = 1, 2$) имеют порядок n . Предполагаем, что матрицы-функции $a_k(\tau), b_k(\tau)$, ($k = 1, 2$) – квадратично интегрируемы, если $l < \infty$, и локально квадратично интегрируемы, если $l = \infty$:

$$a_k(\tau), b_k(\tau) \in L^2(0, l; \mathbb{C}^n), \quad k = 1, 2.$$

В случае, когда операторы $A(\tau)$ и $B(\tau)$ суть обычные функции, операторы такого типа были рассмотрены в [1]. В частности, в работе [1] изучалась связь осцилляционных свойств ядра и собственных значений этих операторов, и доказано, что краевая задача Штурма–Лиувилля общего вида сводится к интегральному уравнению с ядром вида (1).

В работе [2] для одномерного случая, дано описание спектральных функций интегральных операторов с ядрами (1), определёнными на конечном интервале. Для бесконечного интервала В. Яврян в [2] рассмотрел только случай так называемого случая “точки Вейля”.

В настоящей статье изучаются интегральные операторы с матричными ядрами (1) и показано, что спектральная теория таких операторов включается в спектральную теорию канонических дифференциальных операторов. Следовательно, на эти операторы переносятся результаты работы [3], где описываются спектральные функции канонических дифференциальных уравнений.

С других позиций связи между интегральными операторами с ядрами (1) и каноническими дифференциальными уравнениями рассматривались И. Ц. Гохбергом и М. Г. Крейном (см. [4], глава 5, §3).

§2. СЛУЧАЙ КОНЕЧНОГО ИНТЕРВАЛА

Предположим, что матрицы-функции $A(\tau)$ и $B(\tau)$ удовлетворяют условию

$$\int_0^l ([A(\tau) B(\tau)]x, [A(\tau) B(\tau)]x) d\tau > 0, \quad x \in \mathbb{C}^{2n}, \quad (2)$$

равносильному тому, что вектор-столбцы матрицы-функции $X(\tau) = [A(\tau) B(\tau)]$ линейно независимы в пространстве $L^2(0, l; \mathbb{C}^{2n})$. Рассмотрим полярное представление

$$X(\tau) = H^{1/2}(\tau)[\Phi(\tau) \Psi(\tau)], \quad H(\tau) = X(\tau)X^*(\tau),$$

где

$$\Phi(\tau) = \begin{bmatrix} \phi_1(\tau) \\ \phi_2(\tau) \end{bmatrix}, \quad \Psi(\tau) = \begin{bmatrix} \psi_1(\tau) \\ \psi_2(\tau) \end{bmatrix},$$

а $[\Phi(\tau) \Psi(\tau)]$ является унитарной матрицей-функцией. Отметим, что из предположения (2) вытекает, что матрица-функция $H(\tau)$ является эрмитианом положительного типа (см. [4], глава 5, §3).

Вместе с оператором G рассмотрим оператор S того же типа, действующий в $L^2(0, l; \mathbb{C}^{2n})$ по формуле

$$(Sx)(\tau) = \Psi(\tau) \int_0^\tau \Phi^*(s)H(s)x(s) ds + \Phi(\tau) \int_\tau^l \Psi^*(s)H(s)x(s) ds. \quad (3)$$

Легко проверить, что операторы G и S связаны равенством

$$H^{1/2}(\tau)(Sx)(\tau) = G(H^{1/2}(\tau)x(\tau)).$$

Отсюда следует, что подпространство $\mathcal{H}$, являющееся замыканием многообразия $\{H^{1/2}(\tau)x(\tau)/x \in L^2(0, l; \mathbb{C}^{2n})\}$, инвариантно относительно оператора G , а его ортогональное дополнение

$$L^2(0, l; \mathbb{C}^{2n}) \ominus \mathcal{H} = \ker H^{1/2} = \{x \in L^2(0, l; \mathbb{C}^{2n})/H^{1/2}(\tau)x(\tau) = 0\}$$

аннулируется этим оператором. Следовательно, мы можем рассмотреть оператор G только в пространстве $\mathcal{H}$. Но тогда оператор G унитарно эквивалентен оператору S , рассматриваемому в пространстве $L^2_H(0, l; \mathbb{C}^{2n}) =$ гильбертово пространство, полученное пополнением евклидова пространства непрерывных вектор-функций, определённых на интервале $(0, l)$ со скалярным произведением

$$(f, g)_H = \int_0^l (H(\tau)f(\tau), g(\tau)) d\tau.$$

Таким образом, вместо оператора G , действующего в пространстве $\mathcal{H}$, можно рассматривать оператор S в пространстве $L^2_H(0, l; \mathbb{C}^{2n})$. Без ограничения общности, можно предположить, что матрица $[\Phi(\tau) \Psi(\tau)]$ удовлетворяет соотношению

$$\begin{bmatrix} \phi_1(\tau) & \psi_1(\tau) \\ \phi_2(\tau) & \psi_2(\tau) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1^*(\tau) & \phi_2^*(\tau) \\ \psi_1^*(\tau) & \psi_2^*(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} iI_n & 0 \\ 0 & -iI_n \end{bmatrix}.$$

Действительно, матрица-функция

$$J(\tau) = \begin{bmatrix} \phi_1(\tau) & \psi_1(\tau) \\ \phi_2(\tau) & \psi_2(\tau) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1^*(\tau) & \phi_2^*(\tau) \\ \psi_1^*(\tau) & \psi_2^*(\tau) \end{bmatrix}$$

удовлетворяет условию $J^*(\tau) = -J(\tau) = J^{-1}(\tau)$. Поэтому всегда можно заменить пару матриц-функций $\Phi(\tau), \Psi(\tau)$ на пару $N(\tau)\Phi(\tau), N(\tau)\Psi(\tau)$, где $N^*(\tau)$ есть унитарная $(2n \times 2n)$ -матрица-функция, приводящая квадратичную форму $((\Phi(\tau)\Psi^*(\tau) - \Psi(\tau)\Phi^*(\tau))x, x)$ к сумме квадратов:

$$(J(\tau)N^*(\tau)x, N^*(\tau)x) = \left(\begin{bmatrix} iI_n & 0 \\ 0 & -iI_n \end{bmatrix} x, x \right), \quad x \in \mathbb{C}^{2n}.$$

Легко проверить, что пара $[N(\tau)\Phi(\tau), N(\tau)\Psi(\tau)]$ порождает по формуле (3) оператор S_1 , который унитарно эквивалентен оператору S :

$$(S_1 f_1, f_1)_{H_1} = (Sf, f)_H, \quad f_1(\tau) = N(\tau)f(\tau), \quad H_1(\tau) = N(\tau)H(\tau)N^*(\tau).$$

Учитывая равенство

$$J = \begin{bmatrix} iI_n & 0 \\ 0 & -iI_n \end{bmatrix} = V^* \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \cdot V,$$

где

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I_n & -I_n \\ iI_n & iI_n \end{bmatrix},$$

мы можем предполагать, что унитарная матрица-функция $N^*(\tau)$ нормирована условием

$$N^*(0) = \begin{bmatrix} \phi_1^*(\tau) & \phi_2^*(\tau) \\ \psi_1^*(\tau) & \psi_2^*(\tau) \end{bmatrix}^{-1} V.$$

Рассмотрим матрицу-функцию $U(\tau) = [\Phi(\tau), \Psi(\tau)]$. Легко проверить, что эта функция J -унитарна, т.е. $U(\tau)JU^*(\tau) = J$. При этом, без ограничения общности можно считать, что $U(0) = I_{2n}$.

Сопоставим оператору S каноническое дифференциальное уравнение. Положим $W(\tau) = U^*(\tau)J$ и рассмотрим уравнение вида

$$W^*(\tau)J \frac{d}{d\tau} [W(\tau)x(\tau)] - \lambda H(\tau)x(\tau) = H(\tau)f(\tau), \quad \tau \in (0, l).$$

Пусть $U(\tau, \lambda)$ – матрицант этого уравнения, т.е.

$$W^*(\tau)J \frac{d}{d\tau} [W(\tau)U(\tau, \lambda)] - \lambda H(\tau)U(\tau, \lambda) = 0, \quad U(0, \lambda) = I_{2n}.$$

Рассмотрим матрицы-функции $\Phi(\tau, \lambda)$ и $\Psi(\tau, \lambda)$, определённые по формулам

$$\Phi(\tau, \lambda) = \begin{bmatrix} \phi_1(\tau, \lambda) \\ \phi_2(\tau, \lambda) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} U(\tau, \lambda) \begin{bmatrix} I_n \\ -I_n \end{bmatrix},$$

$$\Psi(\tau, \lambda) = \begin{bmatrix} \psi_1(\tau, \lambda) \\ \psi_2(\tau, \lambda) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} U(\tau, \lambda) \begin{bmatrix} -iI_n \\ -iI_n \end{bmatrix}.$$

Так как $U(\tau, 0) = U(\tau)$, то имеем $\Phi(\tau, 0) = \Phi(\tau)$ и $\Psi(\tau, 0) = \Psi(\tau)$. Рассмотрим краевую задачу с симметричным граничным условием

$$\begin{aligned} W^*(\tau)J \frac{d}{d\tau} [W(\tau)x(\tau, \lambda)] - \lambda H(\tau)x(\tau, \lambda) &= H(\tau)f(\tau), \\ P_+x(0, \lambda) + P_-x(0, \lambda) &= 0, \quad x(l, \lambda) = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

где P_+x и P_-x суть первая и вторая компоненты вектора x в разложении

$$\mathbb{C}^{2n} = P_+\mathbb{C}^{2n} \oplus P_-\mathbb{C}^{2n},$$

а $P_{\pm} = (I_{2n} \mp iI)/2$ – взаимно дополнительные ортопроекторы. Непосредственно проверяется, что решение задачи (4) при $\lambda = 0$ задаётся сужением $\hat{S}$ оператора S на многообразии функций $f \in L^2(0, l; \mathbb{C}^{2n})$, удовлетворяющих условию

$$Sf(l) = \Psi(l) \int_0^l \Phi^*(s) H(s) f(s) ds = 0 \iff \int_0^l \Phi^*(s) H(s) f(s) ds = 0. \quad (5)$$

Поэтому исследование спектральных свойств оператора $\hat{S}$ равносильно исследованию краевой задачи (4).

Спектральные функции краевых задач с распадающимися граничными условиями описаны в работе [3]. В частности, в [3] была рассмотрена краевая задача с условием $P_+x(l) + K_l P_-x(l) = 0$, где K_l – произвольный нерастягивающий оператор в $\mathbb{C}^n$. Оказывается, что решение такой задачи задаётся интегральным оператором с ядром вида

$$R_K(\tau, s, \lambda) = \begin{cases} [\Psi(\tau, \lambda) + \Phi(\tau, \lambda)\omega_+(\lambda)] \Phi^*(s, \bar{\lambda}) H(s) & \text{для } s < \tau, \\ \Phi(\tau, \lambda) [\Psi(s, \bar{\lambda}) + \Phi^*(s, \lambda)\omega_+(\lambda)] H(s) & \text{для } s > \tau, \end{cases}$$

где $\omega(\lambda)$ определяется дробно-линейным преобразованием

$$\omega(\lambda) = -[\phi_1(l, \lambda) + K_l \phi_2(l, \lambda)]^{-1} [\psi_1(l, \lambda) + K_l \psi_2(l, \lambda)]. \quad (6)$$

Отметим, что матрица-функция $\omega(\lambda)$ является аналитической в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ и удовлетворяет условию $\text{Im } \omega(\lambda) \geq 0$.

Матрицы-функции, обладающие этими свойствами, называются матричными R -функциями. Они допускают известное интегральное представление

$$\omega(\lambda) = A + \lambda B = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\xi - \lambda} - \frac{\xi}{1 + \xi^2} \right) d\sigma(\xi),$$

где A является эрмитовой, B – положительная матрица, а $\sigma(\xi)$ – неубывающая матрица-функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\xi)}{1 + \xi^2} < \infty.$$

Матрица-функция $\sigma(\xi)$ называется спектральной функцией матричной R -функции $\omega(\lambda)$.

Заметим, что если в (6) заменить матрицу K_l на аналитическую в верхней полуплоскости нерастягивающую матрицу-функцию $K_l(\lambda)$, то матрица-функция $\omega(\lambda)$ будет R -функцией.

Пусть $\Omega(\lambda, l)$ обозначает множество матриц-функций $\omega(\lambda)$, задаваемых дробно-линейным преобразованием (6), когда $K_l(\lambda)$ пробегает множество всех аналитических в верхней полуплоскости нерастягивающих матриц-функций. Следующее утверждение было доказано в [3].

Теорема 1. Множество спектральных функций граничной задачи (4) совпадает с множеством спектральных функций матричных R -функций $\omega(\lambda) \in \Omega(\lambda, l)$. Спектральная функция ортогональна тогда и только тогда, когда функция $\omega(\lambda)$ определена по (6) с постоянной унитарной матрицей K_l .

Неубывающая матричная мера $\sigma(\xi)$ называется спектральной функцией граничной задачи (4) (или оператора $\hat{S}$), если для всех $f \in L_H^2(0, l; \mathbb{C}^{2n}) \ominus \mathcal{F}$ выполняется равенство Парсеваля

$$(f, f)_H = \int_{-\infty}^{\infty} (F(\xi, f), d\sigma(\xi) F(\xi, f)), \quad (7)$$

где

$$F(\lambda, f) = \int_0^l \Phi^*(s, \bar{\lambda}) H(s) f(s) ds, \quad \mathcal{F} = \{f \in L_H^2(0, l; \mathbb{C}^{2n}) : F(\lambda, f) \equiv 0\}.$$

Если преобразование (7) отображает $L_H^2(0, l; \mathbb{C}^{2n}) \ominus \mathcal{F}$ на всё пространство $L_{d\sigma}^2(-\infty, \infty; \mathbb{C}^{2n})$, то $\sigma(\xi)$ называется ортогональной спектральной функцией.

Замечание. Определение 1 спектральных функций канонических уравнений в [3] содержит неточность. Нужно требовать выполнение равенства Парсеваля для всех $f \in L_H^2(0, l; \mathbb{C}^{2n}) \ominus \mathcal{F}$, а не для $f \in L_H^2(0, l; \mathbb{C}^{2n})$. Результаты работы [3] остаются в силе.

Таким образом, Теорема 1 даёт описание всех спектральных функций оператора $\hat{S}$, включая ортогональные. Одна из этих функций является спектральной функцией исходного оператора S . Для доказательства этого утверждения, выберем унитарный оператор K_l , задающий граничное условие в точке $r = l$ так, чтобы $\omega(0) = 0$. В силу (6) этому условию удовлетворяет оператор $K_l = -\psi_1(l)\psi_2^{-1}(l)$. Легко проверить, что в этом случае

$$R_K(r, s, 0) = S(r, s) = \begin{cases} \Psi(r)\Phi^*(s)H(s) & \text{для } s < r, \\ \Phi(r)\Phi^*(s)H(s) & \text{для } s > r. \end{cases}$$

§3. СЛУЧАЙ ПОЛУПРЯМОЙ

При исследовании оператора G на полупрямой $(0, \infty)$, необходимо рассмотреть другое описание множества $\Omega(\lambda, l)$. Как было доказано в [3] множество $\Omega(\lambda, l)$ является матричным кругом в верхней матричной полуплоскости $\text{Im } \omega(\lambda) = (\omega(\lambda) - \omega(\lambda)^*)/2i$, задаваемым неравенством

$$\frac{2 \text{Im } \omega(\lambda)}{\text{Im } \lambda} \geq \int_0^l [\Psi(r, \lambda) + \Phi(r, \lambda)\omega(\lambda)]^* [\Psi(r, \lambda) + \Phi(r, \lambda)\omega(\lambda)] dr. \quad (8)$$

В этом случае, когда K_l пробегает множество унитарных матриц, получается окружность $\Omega(\lambda, l)$, задаваемая равенством

$$\frac{2 \operatorname{Im} \omega(\lambda)}{\operatorname{Im} \lambda} = \int_0^l [\Psi(\tau, \lambda) + \Phi(\tau, \lambda)\omega(\lambda)]^* [\Psi(\tau, \lambda) + \Phi(\tau, \lambda)\omega(\lambda)] d\tau. \quad (8a)$$

Положим

$$\begin{aligned} A &= A_l = \operatorname{Im} \lambda \int_0^l \Phi^*(\tau, \lambda) H(\tau) \Phi(\tau, \lambda) d\tau, \\ B &= B_l = \operatorname{Im} \lambda \int_0^l \Phi^*(\tau, \lambda) H(\tau) \Psi(\tau, \lambda) d\tau, \\ D &= D_l = \operatorname{Im} \lambda \int_0^l \Psi^*(\tau, \lambda) H(\tau) \Psi(\tau, \lambda) d\tau. \end{aligned} \quad (9)$$

Очевидно, что матричный круг $\Omega(\lambda, l)$ можно представить в виде

$$\omega^*(\lambda) A \omega(\lambda) + \omega^*(\lambda) (B - iP_+) + (B^* + iP_+) \omega(\lambda) + D \leq 0, \quad (10)$$

или в параметрическом виде $\omega(\lambda) = O + R_l Z R_r$, $Z^* Z \leq I_n$, где $O = -A^{-1}(B - iP_+)$ — центр, $R_l = A^{-1}$ — левый полурадиус, а $R_r = [(B^* + iP_+) A^{-1} (B - iP_+) - C]^{1/2}$ является правым полурадиусом круга $\Omega(\lambda, l)$. Ясно, что при возрастании l круги стягиваются к предельному кругу $\Omega(\lambda) = \Omega(\lambda, \infty)$ при $l \rightarrow \infty$. Поэтому существует предел

$$\omega(\lambda) = - \lim_{l \rightarrow \infty} [\phi_1(l, \lambda) + K_l \phi_2(l, \lambda)]^{-1} [\psi_1(l, \lambda) + K_l \psi_2(l, \lambda)].$$

Из (8) следует, что предельный круг $\Omega(\lambda)$ задаётся неравенством

$$\frac{2 \operatorname{Im} \omega(\lambda)}{\operatorname{Im} \lambda} \geq \int_0^\infty [\Psi(\tau, \lambda) + \Phi(\tau, \lambda)\omega(\lambda)]^* H(\tau) [\Psi(\tau, \lambda) + \Phi(\tau, \lambda)\omega(\lambda)] d\tau, \quad (11)$$

где $K_l(\lambda)$ пробегает множество аналитических в верхней полуплоскости нерастягивающихся матриц-функций. Аналогично, из (8a) следует, что предельная окружность $\Omega_0(\lambda)$ определяется равенством

$$\frac{2 \operatorname{Im} \omega(\lambda)}{\operatorname{Im} \lambda} = \int_0^\infty [\Psi(\tau, \lambda) + \Phi(\tau, \lambda)\omega(\lambda)]^* H(\tau) [\Psi(\tau, \lambda) + \Phi(\tau, \lambda)\omega(\lambda)] d\tau,$$

где $K_l(\lambda)$ пробегает множество унитарных матриц. Из неравенства (11) следует, что при $\omega(\lambda) \in \Omega(\lambda)$ и произвольном $x \in \mathbb{C}^n$ имеем $[\Psi(\tau, \lambda) + \Phi(\tau, \lambda)\omega(\lambda)]x \in L_H^2(0, l; \mathbb{C}^{2n})$. Следовательно, при $l \rightarrow \infty$ интегралы, определяющие квадратичные формы $(A_l x, x)$, $(B_l x, x)$ и $(D_l x, x)$, где матрицы A_l , B_l и D_l определены равенствами (9), сходятся или расходятся одновременно. Вычисляя пределы этих

интегралов при $l \rightarrow \infty$, получаем предельные матрицы A_∞ , B_∞ и D_∞ . Согласно (10) они определяют предельный круг $\Omega(\lambda)$:

$$\omega^*(\lambda)A_\infty\omega(\lambda) + \omega^*(\lambda)(B_\infty - iP_+) + (B_\infty^* + iP_+)\omega(\lambda) + D_\infty \leq 0.$$

Отметим, что если для всех $x \in \mathbb{C}^n$ имеет место равенство $\lim_{l \rightarrow \infty} (A_l x, x) = \infty$, то предельный круг $\Omega(\lambda)$ вырождается в точку, и мы имеем случай точки Вейля.

Пусть теперь Φ является многообразием финитных на бесконечности вектор-функций из пространства $L^2(0, \infty; \mathbb{C}^{2n})$, а S – оператор с ядром вида (1), заданным на $(0, \infty)$ и с областью определения Φ . Рассмотрим граничную задачу (4), в которой условие $x(l, \lambda) = 0$ заменено на условие $x(r, \lambda) \in \Phi$. Пусть оператор $\hat{S}$ есть сужение S на многообразии вектор-функций $f \in \Phi$, удовлетворяющих условию (5), с заменой l на ∞ . Легко проверить, что и в этом случае решение граничной задачи (4) при $\lambda = 0$ даётся оператором $\hat{S}$.

В случае полупрямой $(0, \infty)$, в определении спектральных функций требуется выполнение равенства Парсеваля для вектор-функций $f \in \Phi \ominus \{f \in \Phi : F(\lambda, f) \equiv 0\}$. Мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. Множество всех спектральных функций оператора $\hat{S}$, заданного на полупрямой $(0, \infty)$, совпадает с множеством спектральных функций $\sigma(\xi)$ матричных R -функций $\omega(\lambda)$, принадлежащих предельному кругу $\Omega(\lambda)$. В случае, когда $\omega(\lambda)$ принадлежит предельной окружности $\Omega_0(\lambda)$, спектральные функции $\sigma(\xi)$ являются ортогональными.

ABSTRACT. The paper studies the integral operators with symmetric matrix kernels and shows, that such kernels can be considered as resolvent kernels of canonical differential equations. The spectral functions of these operators are described using the description of spectral functions of corresponding differential equations.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Крейн, Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, Гос. Изд. Тех.-Теор. Лит., Ленинград, 1950.
2. В. А. Яврян, "К спектральной теории однопарных интегральных операторов", Изв. АН Армении, Математика, том 22, № 1, стр. 75 – 93, 1987.
3. Ф. Э. Мелик-Адамян, "Описание спектральных функций канонических дифференциальных уравнений", Изв. АН Армении, Математика, том 35, № 2, стр. 42 – 60, 2000.
4. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Теория Вольтерровых Операторов в Гильбертовом Пространстве и её Применение, Наука, Москва, 1967.