

ПОЧТИ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ НЕ ВОЗРАСТАЮЩИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Г. Г. Казарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 36, № 2, 2001

В статье изучаются условия почти гипозеллиптичности для не эллиптических дифференциальных операторов в случае, когда их символы могут оставаться ограниченными при бесконечном возрастании аргумента. В двумерном случае получены необходимые и достаточные условия.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Многие вопросы общих дифференциальных уравнений, такие как существование, единственность, гладкость решений задачи Коши или краевых задач, поведение резольвенты и другие сводятся к априорным оценкам, к сравнению мощности или силы соответствующих дифференциальных многочленов к L_p -оценкам производных через дифференциальные операторы (проблема коэрцитивности). Основные результаты в этом направлении, в основном для эллиптических или регулярных гипозеллиптических операторов подытожены в монографиях [1] – [3].

В наиболее общей постановке, задача оценки мономов через заданный регулярный (невыврожденный) многочлен решён В. П. Михайловым в работе [4] (см. также [5], [6]). Нерегулярным гипозеллиптическим (и более общим) операторам посвящены работы [7], [8], где можно найти историю вопроса и ссылку на литературу. В частности, работа [7] содержит критерии почти гипозеллиптичности, а [8] содержит описание операторов обобщённого главного типа в случае, когда общие символы этих операторов бесконечно возрастают на бесконечности.

В настоящей статье мы находим условия почти гипозеллиптичности для негипозеллиптических дифференциальных операторов в случае, когда их символы могут

оставаться ограниченными при бесконечном возрастании аргумента. В двумерном случае получены необходимые и достаточные условия. Основные результаты здесь относятся к двумерному случаю, хотя многие результаты имеют место и для случая $n > 2$.

Начнём с необходимых обозначений и определений. Через $\mathbb{R}^n$ будем обозначать n -мерное евклидово пространство, а через N_0^n – множество n -мерных мультииндексов. Для $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in N_0^n$ положим

$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}, \quad D_j = \frac{\partial}{\partial \xi_j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Для линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами $P(D) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} D^{\alpha}$ пусть $P(\xi) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \xi^{\alpha}$ будет его характеристическим многочленом (полный символ), где сумма берётся по конечному набору мультииндексов $(P) = \{\alpha \in N_0^n : \gamma_{\alpha} \neq 0\}$. Для двух дифференциальных операторов Q и P будем писать $Q < P$, если существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$|Q(\xi)| \leq C[|P(\xi)| + 1], \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Определение 1. Оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) называется почти гипозэллиптическим, если $D^{\alpha} P < P$ для всех $\alpha \in N_0^n$.

Определение 2 (см. [2]). Оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) называется характеристически простым, если существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\sum_{|\alpha| \geq 0} |D^{\alpha} P(\xi)| \leq C \left[\sum_{|\alpha| \leq 1} |D^{\alpha} P(\xi)| + 1 \right], \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Очевидно, что почти гипозэллиптические операторы, операторы вещественного главного типа (см. [8], [9]) и операторы, локализации на бесконечности которых линейны (см. [2], том 2, глава 10 и [10]) являются характеристически простыми. Предположим, что задан многочлен, не возрастающий на бесконечности. Целью настоящей статьи является нахождение алгебраических условий на подмногочлены заданного многочлена, при которых этот многочлен будет или почти гипозэллиптическим или характеристически простым. Не оговаривая каждый раз, мы будем изучать многочлены с вещественными коэффициентами.

Определение 3. Наименьший выпуклый многогранник, содержащий множество $(P) \cup \{0\}$, называется многогранником Ньютона или характеристическим

многогранником многочлена P и будет обозначаться через $\mathcal{N}(P)$. Многогранник $\mathcal{N}$ с вершинами из N_0^n называется полным, если $\mathcal{N}$ имеет вершину в начале координат и отличные от начала координат вершины на каждой координатной оси множества N_0^n .

Пусть $\mathcal{N}$ – полный многогранник. Множество $\Gamma \subset \mathcal{N}$ называется **гранью** многогранника $\mathcal{N}$, если существуют единичный вектор $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ и число $d = d(\lambda) \geq 0$ такие, что $(\lambda, \alpha) = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_n \alpha_n = d$ для $\alpha \in \Gamma$, и $(\lambda, \beta) < d$ при $\beta \in \mathcal{N} \setminus \Gamma$. Вектор λ назовём **внешней нормалью** ($\mathcal{N}$ -нормалью) грани Γ . Множество всех $\mathcal{N}$ -нормалей грани Γ обозначим через $\Lambda(\Gamma)$.

Очевидно, что для k -мерной грани Γ полного многогранника $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$ множество $\Lambda(\Gamma)$ открыто и связано в $(n - k)$ -мерной плоскости $((n - k)$ -мерный конус), $k = 0, 1, \dots, n - 1$. Отметим, что $\mathcal{N}$ -нормаль $(n - 1)$ -мерной грани определяется однозначно.

Полный многогранник $\mathcal{N}$ называется **правильным** (вполне правильным), если внешние нормали $(n - 1)$ -мерных некоординатных граней многогранника $\mathcal{N}$ имеют неотрицательные (положительные) координаты. В работе [7] доказано, что многогранник Ньютона почти гипозэллиптического многочлена является правильным.

Определение 4. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Многочлен $R(\xi)$ называется λ -однородным (или обобщённо-однородным) λ -порядка d_R , если для любого $t > 0$

$$R(t^\lambda \xi) \equiv R(t^{\lambda_1} \xi_1, \dots, t^{\lambda_n} \xi_n) = t^{d_R} R(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

При $\lambda_1 = \dots = \lambda_n$ λ -однородный многочлен является однородным многочленом в обычном смысле.

В работе [4] доказано, что для любой грани Γ полного многогранника $\mathcal{N}(P)$ многочлена $P(\xi) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \xi^{\alpha}$ подмногочлен

$$P_{\Gamma}(\xi) = \sum_{\alpha \in \Gamma} \gamma_{\alpha} \xi^{\alpha},$$

отвечающий этой грани, является λ -однородным для любого $\lambda \in \Lambda(\Gamma)$.

Пусть $R(\xi)$ – λ -однородный многочлен и $\lambda_j > 0$, $j = 1, \dots, n$. Положим

$$\Sigma(\lambda, R) = \left\{ \eta \in \mathbb{R}^n : \prod_{i=1}^n \eta_i \neq 0, \sum_{i=1}^n |\eta_i|^{2/\lambda_i} = 1, R(\eta) = 0 \right\}, \quad (0.1)$$

$$\Delta(\eta, \lambda, R) = \min_{\nu} \{(\lambda, \nu) : \nu \in N_0^n, D^{\nu} R(\eta) \neq 0\}. \quad (0.2)$$

Для заданного многочлена P , через $\Lambda(\mathcal{N})$ обозначим множество $\mathcal{N}$ -нормалей всех граней многогранника $\mathcal{N}(P)$ со всеми положительными координатами. Тогда многочлен P можно представить в виде суммы λ -однородных многочленов :

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^M P_j(\xi) = \sum_{j=0}^M \sum_{(\lambda, \alpha)=d_j} \gamma_\alpha \xi^\alpha, \quad \lambda \in \Lambda(\mathcal{N}), \quad (0.3)$$

где постоянные M и d_j ($j = 0, 1, \dots, M$) зависят только от λ, P и $d_0 > d_1 > \dots > d_M \geq 0$. Рассмотрим множество

$$\Sigma(P) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda(\mathcal{N})} \Sigma(\lambda, P) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda(\mathcal{N})} \bigcap_{j=0}^M \Sigma(\lambda, P_j). \quad (0.4)$$

Так как добавление констант к многочлену не влияет на его почти гипозэллиптичность и характеристическую простоту, то мы можем предположить, что $P(0, \dots, 0) = 0$, и поэтому $d_M > 0$. Следовательно, не умаляя общности, можно предположить, что $P_M(\xi) \neq \text{const}$ для любого $\lambda \in \Lambda(\mathcal{N})$.

В работах, посвящённых алгебраическим условиям гипозэллиптичности, почти гипозэллиптичности или характеристической простоте, обычно предполагают, что многочлен P таков, что $|P(\xi)| \rightarrow \infty$ при $|\xi| \rightarrow \infty$ (см., например [7], где можно найти дальнейшие ссылки на литературу). Здесь мы рассматриваем случай, когда это условие не выполняется.

При $n = 2$ мы доказываем, что почти гипозэллиптические многочлены, не возрастающие на бесконечности, имеют нули в любой окрестности бесконечности (Теорема 2.1) и очень простую конструкцию (Теорема 1.1).

Лемма 0.1. Пусть $\mathcal{N}$ – регулярный многогранник Ньютона почти гипозэллиптического многочлена P . Тогда для любых $\lambda \in \Lambda(\mathcal{N})$ и $\eta \in \Sigma(\lambda, P)$, имеем

$$d_j(\lambda) - \Delta(\eta, \lambda, P_j) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, M(\lambda). \quad (0.5)$$

Доказательство : Предположим обратное : пусть для некоторого числа k , удовлетворяющего условию $0 \leq k \leq M(\lambda)$ имеем

$$d_k(\lambda) - \Delta(\eta, \lambda, P_k) > 0, \quad d_j(\lambda) - \Delta(\eta, \lambda, P_j) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, k-1. \quad (0.6)$$

Соотношения (0.6) равносильны следующему утверждению : для некоторого мультииндекса $\nu \in N_0^n$ имеем

$$(\lambda, \nu) = \Delta(\eta, \lambda, P_k) < d_k(\lambda), \quad D^\nu P_k(\eta) \neq 0, \quad D^\nu P_j(\eta) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, k-1.$$

Тогда для последовательности $\xi^s = s^\lambda \eta = (s^{\lambda_1} \eta_1, \dots, s^{\lambda_n} \eta_n)$, $s = 1, 2, \dots$ имеем

$$P(\xi^s) = \sum_{j=0}^{M(\lambda)} s^{d_j(\lambda)} P_j(\eta) = 0, \quad (0.7)$$

$$D^\nu P(\xi^s) = \sum_{j=0}^{M(\lambda)} D^\nu P_j(\xi^s) = \sum_{j=0}^{M(\lambda)} s^{d_j - (\lambda, \nu)} D^\nu P_j(\eta) = \sum_{j=k}^{M(\lambda)} s^{d_j - (\lambda, \nu)} D^\nu P_j(\eta) = 0.$$

Следовательно, при $s \rightarrow \infty$ имеем

$$|D^\nu P(\xi^s)| = |D^\nu P_k(\eta)| s^{d_k - (\lambda, \nu)} + o(s^{d_k - (\lambda, \nu)}) \rightarrow \infty.$$

Согласно (0.7), это противоречит Определению 1. Лемма 0.1 доказана.

§1. МНОГОЧЛЕНЫ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ПРИ УСЛОВИИ $\Sigma(P) \neq \emptyset$

Пусть $R(\xi) = R(\xi_1, \xi_2)$ — λ -однородный многочлен λ -порядка $d = d_R > 0$ и $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Если R не является одночленом, то вектор λ определяется однозначно с точностью до постоянного множителя (и однозначно при $|\lambda| = 1$). Многочлен

$R(\xi) = \sum_{(\lambda, \alpha)=d} R_\alpha \xi^\alpha$ может быть представлен в виде

$$R(\xi) = \xi^\mu \tau(\xi), \quad \tau(\xi) = \sum_{(\lambda, \alpha)=d - (\lambda, \mu)} r_\alpha \xi^\alpha, \quad (1.1)$$

где ξ^μ является наибольшим общим одночленным делителем, а мультииндекс $\mu \in N_0^2$ определяется однозначно.

Лемма 1.1. Пусть $R(\xi_1, \xi_2)$ — λ -однородный многочлен λ -порядка d и $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Если $\Sigma(R) \neq \emptyset$ и $\Delta(\eta, \lambda, R) = d$ для некоторого $\eta \in \Sigma(R)$, то

- 1) в представлении (1.1) $\mu_1 = \mu_2 = 0$, 2) $\lambda_1 = \lambda_2$,
- 3) многочлен R имеет вид

$$R(\xi) = a(\xi_1 - \tau \xi_2)^n, \quad (1.2)$$

где a, τ суть действительные, а n — натуральное.

Доказательство : Утверждение 1) очевидно. Для доказательства пункта 2) положим $n_i = d/\lambda_i$ ($i = 1, 2$), $c_1 = r_{(n_1, 0)}$, $c_2 = r_{(0, n_2)}$. Отметим, что

$$c_i = \frac{1}{n_i!} D_i^{n_i} R(\eta) \neq 0, \quad i = 1, 2,$$

так как противное означало бы, что $\Delta(\eta, \lambda, R) < d$, что противоречит условию Леммы 1.1.

Предположим, что $\lambda_1 \neq \lambda_2$, и пусть для простоты $\lambda_1 < \lambda_2$. Тогда $n_1 > n_2$ и точка $(n_1 - 1, \alpha_2)$ не принадлежит прямой $(\lambda, \alpha) = d$ для любого $\alpha_2 \in N_0$. Поэтому степень многочлена $R(\xi) - c_1 \xi_1^{n_1}$, как многочлена от ξ_1 , строго меньше чем $n_1 - 1$. Следовательно, $D_1^{n_1-1} R(\eta) = n_1! c_1 \eta_1 \neq 0$, и имеем

$$\Delta(\eta, \lambda, R) \leq \lambda_1(n_1 - 1) < \lambda_1 n_1 = d.$$

Это противоречие доказывает утверждение 2).

Теперь докажем утверждение 3). Заметим, что из уже доказанного утверждения 2), получаем $\lambda_1 = \lambda_2$. Предположим, что $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Многочлен R представим в виде

$$R(\xi_1, \xi_2) = \xi_2^d R\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}, 1\right) = \xi_2^d \tilde{R}\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right), \quad \xi_2 \neq 0.$$

Многочлен $\tilde{R}(t)$ одной переменной в точке η_1/η_2 имеет корень порядка d , потому что для любого $k \leq d$ имеем $D_1^k R(\eta) = \eta_2^{d-k} D_1^k \tilde{R}\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right) = 0$. Следовательно, $\tilde{R}(t) = a \left(t - \frac{\eta_1}{\eta_2}\right)^d$. Обозначая $\tau = \eta_1/\eta_2$, получаем

$$R(\xi) = \xi_2^d a \left(\frac{\xi_1}{\xi_2} - \frac{\eta_1}{\eta_2}\right)^d = a(\xi_1 - \tau \xi_2)^d.$$

Это доказывает представление (1.2). Лемма 1.1 доказана.

Замечание. Утверждение 3) вытекает из представления λ -однородных многочленов, полученных в [11] и [12].

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема.

Теорема 1.1. Пусть $\mathcal{N}$ – полный многогранник Ньютона многочлена $P(\xi_1, \xi_2)$ с вещественными коэффициентами и $\Sigma(P) \neq \emptyset$. Многочлен P почти гипозэллиптичен тогда и только тогда, когда он допускает представление вида

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^m a_j (\xi_1 - \tau \xi_2)^{m-j}, \quad \tau \neq 0 \quad (1.3)$$

для некоторого натурального m и действительных чисел a_j, τ .

Доказательство : Пусть P – почти гипозэллиптический многочлен. Применяя Леммы 0.1 и 1.1 для $\lambda \in \Lambda(\mathcal{N})$, из условия $\Sigma(P) \neq \emptyset$ заключаем, что многочлен P может быть представлен в виде суммы однородных многочленов

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^m P_j(\xi) = \sum_{j=0}^m a_j (\xi_1 - \tau_j \xi_2)^{m-j}, \quad (1.4)$$

где m – натуральное число, а a_j, τ_j ($j = 0, 1, \dots, m$) – действительные числа, $a_0, \tau_0 \neq 0$. Если $\eta \in \Sigma(P)$, то $P_j(\eta) = 0$ для любого $j = 0, 1, \dots, m$. Следовательно, $\tau_0 = \tau_1 = \dots = \tau_m = \tau$, что доказывает представление (1.3). Для того, чтобы доказать почти гипозэллиптичность многочлена P вида (1.3), сделаем замену переменных $\tau = \xi_1 - \tau \xi_2$, которая приводит многочлен P к многочлену от одной переменной. А для последнего многочлена соотношение $D^k P < P$ для любого $k = 0, 1, \dots$ очевидно. Теорема 1.1 доказана.

Перейдём к нахождению алгебраических условий характеристической простоты многочлена P , удовлетворяющего условию $\Sigma(P) \neq \emptyset$. Пусть R – λ -однородный многочлен. Положим $\Sigma'(\lambda, R) = \{\eta \in \Sigma(R) : D_1 R(\eta) = \dots = D_n R(\eta) = 0\}$. Пусть $\mathcal{N}$ – полный многогранник Ньютона многочлена P и $\lambda \in \Lambda(\mathcal{N})$. Представим P в виде (0.3) и для каждого λ -однородного многочлена P_j рассмотрим множества $\Sigma'(\lambda, P_j)$, $j = 0, 1, \dots, M(\lambda)$. Если $\Sigma'(\lambda, P_0) = \emptyset$ для всех $\lambda \in \Lambda(\mathcal{N})$, то P является многочленом действительного $\mathcal{N}$ -главного типа (см. [8], [12]). Согласно Лемме 1.1 из [12] можно показать, что P характеристически простой. Поэтому мы рассмотрим лишь случай, когда $\Sigma'(\lambda, P_0) \neq \emptyset$ для некоторого $\lambda \in \Lambda(\mathcal{N})$.

Лемма 1.2. Пусть $\mathcal{N}$ – правильный многогранник Ньютона характеристически простого многочлена $P(\xi) = P(\xi_1, \dots, \xi_n)$ с действительными коэффициентами. Если

$$\Sigma'(\lambda, P) = \bigcap_{j=0}^{M(\lambda)} \Sigma'(\lambda, P_j) \neq \emptyset$$

для некоторого $\lambda \in \Lambda(\mathcal{N})$, то

$$d_j(\lambda) - \Delta(\eta, \lambda, P_j) = 0, \quad \eta \in \Sigma'(\lambda, P), \quad j = 0, 1, \dots, M(\lambda).$$

Доказательство : вытекает повторением рассуждений, проводимых при доказательстве Леммы 0.1 с тем лишь отличием, что здесь вместе с равенством (0.7) используем и равенства

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{M(\lambda)} |D_i P_j(\xi^s)| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{M(\lambda)} s^{d_i - \lambda_j} |D_i P_j(\eta)| = 0, \quad s = 1, 2, \dots$$

Используя теперь Леммы 1.1 и 1.2, получаем представление (1.3) также для характеристически простых многочленов с непустым множеством

$$\Sigma'(P) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda(\mathcal{N})} \Sigma'(\lambda, P).$$

Отсюда и из Теоремы 1.1 вытекает следующая теорема.

Теорема 1.2. Пусть $\mathcal{N}$ – правильный многогранник Ньютона многочлена $P(\xi_1, \xi_2)$ с действительными коэффициентами и $\Sigma'(P) \neq \emptyset$. Тогда P является характеристически простым тогда и только тогда, когда он почти гипозэллиптический.

Сравним также почти гипозэллиптические и гиперболические по Гордингу операторы. В работе [13] доказано, что многогранник Ньютона гиперболического по Гордингу (следовательно, гиперболического по Петровскому) оператора не может иметь более одной $(n - 1)$ -мерной вполне правильной грани (т.е. грани, все компоненты единичной внешней нормали которой положительны). Таким образом, если многогранник Ньютона $\mathcal{N}$ гиперболического оператора $P(D)$ является вполне правильным, то $\mathcal{N}$ является $(n - 1)$ -симплексом с вершинами на координатных осях, т.е. при $n = 2$ многочлен P представляется в виде суммы однородных многочленов.

Из теоремы Гординга–Хермандера–Свенсона (см. [14], или [2], том 2, Теорема 12.4.6) следует, что многочлен вида (1.2) с гиперболической старшей частью $P_0(\xi)$ является гиперболическим тогда и только тогда, когда многочлены P_0 и P имеют одинаковую степень (по Л. Хермандеру). Очевидно, многочлен $P_0(\xi) = a(\xi_1 - \tau\xi_2)^m$ гиперболичесен (см. [2], том 2, Теорема 12.4.3). С другой стороны, из Теоремы 1 работы [15] следует, что многочлены P_0 и P в представлении (1.3) имеют одинаковую силу. Отсюда и из Теоремы 1.1 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Теорема 1.3. Если многочлен $P(\xi_1, \xi_2)$ почти гипозэллиптивен и $\Sigma(P) \neq \emptyset$, то оператор $P(D_1, D_2)$ гиперболичесен по Гордингу.

§2. МНОГОЧЛЕНЫ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ.

НЕОБХОДИМОСТЬ УСЛОВИЯ $\Sigma(P) \neq \emptyset$

Пусть многочлен P не возрастает на бесконечности, т.е. существуют последовательность $\{\xi^s\}$ и число $C > 0$ такие, что

$$|P(\xi^s)| \leq C, \quad |\xi^s| \rightarrow \infty, \quad \text{при } s \rightarrow \infty. \quad (2.1)$$

Пусть $\mathcal{N}$ – многогранник Ньютона многочлена P и $\lambda \in \Lambda(\mathcal{N})$. Положим для всех $s = 1, 2, \dots$

$$|\xi^s|_\lambda = \left[\sum_{i=1}^n |\xi_i^s|^{2\lambda_i} \right]^{1/2}, \quad \eta^s(\lambda) = \xi^s |\xi^s|_\lambda^\lambda = \left(\xi_1^s |\xi^s|_\lambda^{\lambda_1}, \dots, \xi_n^s |\xi^s|_\lambda^{\lambda_n} \right).$$

Так как $|\eta^s(\lambda)|_\lambda = 1$ для любого $s = 1, 2, \dots$, то существует сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{\eta^s(\lambda)\}$. Обозначим через $B_P(\lambda, \{\xi^s\})$ множество частичных пределов последовательности $\{\eta^s(\lambda)\}$, а через $B_P(\lambda)$ – объединение множеств $B_P(\lambda, \{\xi^s\})$ по всевозможным последовательностям $\{\xi^s\}$, удовлетворяющим условию (2.1). Наконец, положим

$$B_P = \bigcup_{\lambda \in \Lambda(\mathcal{N})} B_P(\lambda).$$

Сначала докажем следующее утверждение, справедливое для всех $n \geq 2$.

Лемма 2.1. Пусть $\mathcal{N}$ – полный многогранник Ньютона почти гипозэллиптического многочлена $P(\xi_1, \dots, \xi_n)$, не возрастающего на бесконечности, и пусть $\lambda \in \Lambda(\mathcal{N})$, $\eta \in B(\lambda)$. Предположим, что многочлен P допускает представление вида (0.3) по вектору λ . Тогда $D^\lambda P_0(\eta) = 0$ для любого $\nu \in N_0^n$ такого, что $(\lambda, \nu) < d_0(\lambda)$.

Доказательство : Предположим противное : для некоторого $\nu \in N_0^n$ имеем

$$(\lambda, \nu) < d_0(\lambda), \quad D^\nu P_0(\eta) \neq 0. \quad (2.2)$$

По определению $B(\lambda)$ точка η является частичным пределом последовательности $\{\eta^s(\lambda)\}$, порождённой последовательностью $\{\xi^s\}$, удовлетворяющей (2.1). За счёт выбора подпоследовательности $\{\eta^s(\lambda)\}$, можно считать, что $\eta^s(\lambda) \rightarrow \eta$ при $s \rightarrow \infty$. В силу (0.3) для всех $s = 1, 2, \dots$ имеем

$$D^\nu P(\xi^s) = \sum_{j=0}^{M(\lambda)} D^\nu P_j(\xi^s) = \sum_{j=0}^{M(\lambda)} |\xi^s|_\lambda^{d_j - (\lambda, \mu)} D^\nu P_j(\eta^s(\lambda)).$$

Так как $d_0 > d_j$, $j = 1, \dots, M(\lambda)$, то из (2.2) для $s \rightarrow \infty$ получаем

$$|D^\nu P(\xi^s)| = |\xi^s|_\lambda^{d_0 - (\lambda, \mu)} [D^\nu P_0(\eta) + o(1)] \rightarrow \infty.$$

При $\nu = (0, \dots, 0)$ это противоречит (2.1). Если же $\nu \neq (0, \dots, 0)$, то это вместе с (2.1) противоречит почти гипозэллиптичности многочлена P . Лемма 2.1 доказана.

Следствие. В условиях Леммы 2.1

а) для любого $\lambda \in \Lambda(\mathcal{N})$ имеем $B(\lambda) \cap \mathbb{R}_0^n \subset \Sigma(\lambda, P_0)$, где $\mathbb{R}_0^n = \{\eta \in \mathbb{R}^n : \prod_{i=1}^n \eta_i \neq 0\}$. Если $\eta \in B(\lambda) \cap \mathbb{R}_0^n$, то $\Delta(\eta, \lambda, P_0) = d_0(\lambda)$,

б) при $n = 2$ и любом $\lambda \in \Lambda(\mathcal{N})$ имеем $B(\lambda) \subset \Sigma(\lambda, P_0)$.

Доказательство : Утверждение а) очевидно. Что же касается б), то достаточно заметить, что в двумерном случае из Лемм 1.1 и 2.1 вытекает, что P_0 – однородный многочлен. Если такой многочлен обращается в нуль в точке η , то или $\eta_1 = \eta_2 = 0$, или $\eta_1 \eta_2 \neq 0$.

Согласно Лемме 1.1 заключаем, что не возрастающий на бесконечности многочлен $P(\xi_1, \xi_2)$ может быть почти гипозэллиптическим, если имеет вид

$$P(\xi) = a_0(\xi_1 - \tau\xi_2)^m + \sum_{j=1}^m P_j(\xi), \quad (2.3)$$

где m – натуральное число и $a_0, \tau \neq 0$ суть действительные.

Лемма 2.2. Пусть $P(\xi_1, \xi_2)$ – не возрастающий на бесконечности почти гипозэллиптический многочлен, и пусть $\eta \in B_R$. Если $P_j(\eta) = 0$ при $j = 0, 1, \dots, k$ и $P_{k+1}(\eta) \neq 0$ ($k \leq m-1$), то

$$D^\nu P_j(\eta) = 0, \quad |\nu| < m - j, \quad j = 0, 1, \dots, k. \quad (2.4)$$

Доказательство : Проведём его методом индукции по k . При $k = 0$ равенства (2.4) для P_0 следуют из Леммы 2.1 (см также (2.3)). Предполагая, что (2.4) имеет место при $k \leq k_0$, докажем (2.4) для $k = k_0 + 1$. По определению множества B_R существует последовательность $\{\xi^s\}$, удовлетворяющая (2.1) такая, что точка $\eta \in B_R$ является точкой сгущения множества $\{\eta^s\} = \{\xi^s | \xi^s|\}$, и по предположению индукции (2.4) имеет место при $k \leq k_0$. Покажем теперь, что существует постоянная $C > 0$ такая, что при любом $\nu \in N_0^2$ имеем

$$|D^\nu P_j(\xi^s)| < C, \quad s = 1, 2, \dots, \quad j = 0, 1, \dots, k_0. \quad (2.5)$$

Для этого заметим, что из (2.4) при $k \leq k_0$ и из Леммы 1.1 следует, что однородные многочлены P_j имеют вид

$$P_j(\xi) = a_j(\xi_1 - \tau\xi_2)^{m-j}, \quad \tau = \frac{\eta_1}{\eta_2}, \quad j = 0, 1, \dots, k_0. \quad (2.6)$$

Так как многочлен P почти гипозэллиптивен, то для любого мультииндекса $\nu \in N_0^2$ имеем $D^\nu P < P$. В частности, $D^\nu P < P$ при $\nu = (m-1, 0)$. Это означает, что для нашей последовательности $\{\xi^s\}$ числа

$$D^\nu P(\xi^s) = a_0 m! (\xi_1^s - \tau \xi_2^s)^m + \text{const}, \quad s = 1, 2, \dots$$

образуют ограниченное множество. Это вместе с представлениями (2.6) доказывают (2.5). Пусть $P_j(\eta) = 0$ при $j = 0, 1, \dots, k_0 + 1$ и $P_{k_0+2}(\eta) \neq 0$, но тем не менее существует мультииндекс $\nu^0 \in N_0^2$ такой, что

$$D^{\nu^0} P_{k_0+1}(\eta) \neq 0, \quad |\nu^0| < m - k_0 - 1. \quad (2.7)$$

Тогда из (2.3) для всех $s = 1, 2, \dots$ имеем

$$\begin{aligned} D^{\nu^0} P(\xi^s) &= \sum_{j=0}^{k_0} D^{\nu^0} P_j(\xi^s) + |\xi^s|^{m-k_0-1-|\nu^0|} D^{\nu^0} P_{k_0+1}(\eta^s) + \\ &+ \sum_{j=k_0+2}^m |\xi^s|^{m-j-|\nu^0|} D^{\nu^0} P_j(\xi^s). \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.5), (2.7) следует

$$|D^{\nu^0} P(\xi^s)| = |D^{\nu^0} P_{k_0+1}(\eta)| \cdot |\xi^s|^{m-k_0-1-|\nu^0|} (1 + o(1)) \rightarrow \infty, \quad \text{при } s \rightarrow \infty.$$

Это вместе с (2.1) противоречит тому, что $D^{\nu^0} P < P$. Лемма 2.2 доказана.

Теорема 2.1. Если $P(\xi_1, \xi_2)$ является не возрастающим на бесконечности почти гипозэллиптическим многочленом, то $\Sigma(P) \neq \emptyset$.

Доказательство : Сначала заметим (см. (2.3)), что множество $\Sigma(P_0)$ состоит из двух точек $\eta^0 = (\tau/\sqrt{1+\tau^2}, 1/\sqrt{1+\tau^2})$ и $\eta^1 = -\eta^0$. Следовательно, множество $B_P \subset \Sigma(P_0)$ содержит не более двух точек. Через η обозначим одну из этих точек. Предположим теперь, что для невозрастающего ($B_P \neq \emptyset$) почти гипозэллиптического многочлена P вида (2.3) имеем $\Sigma(P) = \emptyset$. По определению множества $\Sigma(P)$, существует целое $0 \leq k < m$ такое, что $P_j(\eta) = 0$ при $j = 0, 1, \dots, k$ и $P_{k+1}(\eta) \neq 0$. Используя Леммы 1.1, 2.2 и представление (2.3), получаем, что многочлен P имеет вид

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^k a_j (\xi_1 - \tau \xi_2)^{m-j} + \sum_{j=k+1}^m P_j(\xi). \quad (2.8)$$

Рассуждениями, аналогичными рассуждениям при доказательстве Леммы 2.2, можно показать, что существует постоянная $C > 0$ такая, что для любой последовательности $\{\xi^s\}$, удовлетворяющей (2.1), имеем

$$|P_j(\xi^s)| < C, \quad s = 1, 2, \dots, \quad j = 0, 1, \dots, k. \quad (2.9)$$

С другой стороны, при $s \rightarrow \infty$ получаем

$$\sum_{j=k+2}^m |P_j(\xi^s)| = o(|\xi^s|^{m-k-1}).$$

Это вместе с условием $P_{k+1}(\eta) \neq 0$, представлением (2.8) и неравенствами (2.9) показывает, что при $z \rightarrow \infty$ имеем

$$|P(\xi^s)| = |P_{k+1}(\eta)| \cdot |\xi^s|^{m-k-1} (1 + o(1)) \rightarrow \infty,$$

что противоречит (2.1). Теорема 2.1 доказана.

ABSTRACT. The paper studies conditions of almost hypoellipticity for non-hypoelliptic differential operators in the case, where their symbols can remain bounded under infinite argument increase. In two-dimensional case conditions that are both necessary and sufficient are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, Интегральные Представления Функций и Теоремы Вложения, Наука, Москва, 1996.
2. Л. Хермандер, Анализ Линейных Дифференциальных Операторов с Частными Производными, тома 1—4, Мир, Москва, 1986.
3. Х. Трибель, Теория Интерполяции. Функциональные Пространства, Дифференциальные Операторы, Мир, Москва, 1980.
4. В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов", Труды МИАН СССР, том 91, стр. 59 – 81, 1967.
5. Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин, "Об одном классе гипозэллиптических полиномов", Мат. Сборник, том 75, № 3, стр. 400 – 416, 1968.
6. E. Pehkonen, "Ein hypoelliptisches Dirichlet problem", Comm. Physico-Math., vol. 48, no. 3, pp. 131 – 143, 1978.
7. Г. Г. Казарян, "Об оценках производных многочленов многих переменных", Изв. АН Армении, Математика, том 34, № 3, стр. 44 – 63, 1999.
8. Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин, "Многогранник Ньютона и локальная разрешимость линейных дифференциальных уравнений", Труды Моск. Мат. Общ., том 48, стр. 227 – 276, 1985.
9. Ю. В. Егоров, Линейные Дифференциальные Уравнения Главного Типа, Наука, Москва, 1984.
10. Г. Г. Казарян, "О локализациях на бесконечности дифференциальных многочленов с постоянными коэффициентами", Изв. АН Армении. Математика, том 29, № 3, стр. 64 – 79, 1994.
11. B. Pini, "Osservazioni sulla ipoelliptica", Boll. Univ. Mat. Ital., ser. III, vol. 18, no. 4, pp. 420 – 433, 1963.
12. Г. Г. Казарян, "Оценки дифференциальных операторов и гипозэллиптические операторы", Труды МИАН СССР, том 140, стр. 130 – 161, 1976.
13. Г. Г. Казарян, "Гиперболические операторы с данной старшей частью", Дифф. Урав., том 15, № 6, стр. 1059 – 1069, 1979.
14. L. Svensson, "Necessary and sufficient conditions for the hyperbolicity of polynomials with hyperbolic principal part", Ark. Mat., vol. 8, pp. 145 – 162, 1968.
15. Г. Г. Казарян, "Сравнение мощности многочленов и их гипозэллиптичность", Труды МИАН СССР, том 150, стр. 143 – 159, 1979.