АСИМПТОТИЧЕСКИ ЭФФЕКТИВНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ

М. С. Гиновян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 36, № 2, 2001

В статье рассматривается задача построения асимптотически эффективных оценок для функционалов, определённых на некотором классе спектральных плотностей. Вводятся понятия H_0– и IK– эффективности оценок, основанные на версиях теоремы Гаека–Ибрагимова–Хасьминского о свёртке и теореме Гаека–Ле Кама о локальном асимптотическом минимаксе, соответственно. Доказывается, что статистика $\Phi(I_T)$, где $I_T = I_T(\lambda)$ – периодограмма рассматриваемого стационарного гауссовского процесса $X(t)$ с неизвестной спектральной плотностью $\theta(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$, является H_0– и IK– асимптотически эффективной оценкой для линейного функционала $\Phi(\theta)$. Для нелинейного гладкого функционала $\Phi(\theta)$ оценка $\Phi(\widehat{\theta}_T)$ является H_0– и IK– асимптотически эффективной для некоторых последовательностей $T^{1/2}$–состоятельных оценок $\widehat{\theta}_T$ неизвестной спектральной плотности $\theta(\lambda)$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

В статье рассматривается задача построения асимптотически эффективных оценок для линейных и некоторых нелинейных гладких функционалов, определённых на некотором классе спектральных плотностей и приводятся точные асимптотические оценки для минимаксных среднеквадратических рисков этих оценок.

Пусть наблюдается конечная частная реализация $\mathbf{X}_T = \{X(1), \dots, X(T)\}$ действительнозначного стационарного гауссовского процесса $X(t)$ с нулевым средним и с **неизвестной** спектральной плотностью $\theta(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$. Предположим, что $\theta(\lambda)$ принадлежит заданному классу $\Theta \subset \mathbf{L}_p = \mathbf{L}_p[-\pi, \pi]$ $(p > 1)$ спектральных плотностей, удовлетворяющих некоторым условиям гладкости. Пусть $\Phi(\cdot)$ – функционал, область определения которого содержит Θ.

Задача состоит в оценке величины $\Phi(\theta)$ на основе наблюдения $\mathbf{X}_T$ и исследования асимптотических свойств этих оценок при $T \to \infty$. Основной целью является построение асимптотически эффективных оценок для $\Phi(\theta)$.

Задача асимптотически эффективного непараметрического оценивания функционалов от спектральной плотности рассматривалась в работах [22], [12], [15], [2], [6], [7]. Основное ограничение, налагаемое на спектральные плотности $\theta(\lambda)$, являлось существование постоянных C_1 и C_2 таких, что

$$0 < C_1 \leq \theta(\lambda) \leq C_2 < \infty. \tag{1}$$

Настоящая статья обобщает некоторые результаты этих статей на более широкий класс Θ, содержащий спектральные плотности, обладающие нулями и полюсами. Асимптотически эффективные оценки строятся методом, предложенным Ибрагимовым и Хасьминским (см. [12], [15]). Наш план состоит в следующем :

- Определяем понятие локально асимптотической нормальности (ЛАН) в смысле Ибрагимова и Хасьминского [15], и выводим условия, при которых рассматриваемое семейство гауссовских распределений является ЛАН в $\theta_0 \in \Theta$.
- Используя свойство ЛАН, мы доказываем версии теоремы Гаека–Ле Кама о локальном асимптотическом минимаксе и теоремы Гаека–Ибрагимова–Хасьминского о свёртке.
- Вводим понятия H_0– и IK– асимптотически эффективных оценок и доказываем, что статистика $\Phi(I_T)$, где $I_T = I_T(\lambda)$– периодограмма рассматриваемого стационарного гауссовского процесса $X(t)$ с неизвестной спектральной плотностью $\theta(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$, является H_0– и IK– асимптотически эффективной оценкой для линейного функционала $\Phi(\theta)$. Доказывается, что для нелинейного гладкого функционала $\Phi(\theta)$ оценка $\Phi(\widehat{\theta}_T)$ является H_0– и IK– асимптотически эффективной для некоторых последовательностей $T^{1/2}$-состоятельных оценок $\widehat{\theta}_T$ неизвестной спектральной плотности $\theta(\lambda)$.

§2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

2.1. Модель. Статистический анализ стационарных гауссовских процессов обычно включает два типа условий, налагаемых на спектральную плотность $\theta(\lambda)$. Условия первого типа относятся к нулям и полюсам спектральной плотности $\theta(\lambda)$. Условия второго типа относятся к свойствам гладкости $\theta(\lambda)$. Для определения модели нам нужны следующие определения.

Определение 1 [Условие Маккенхаупта (A_2)]. Будем говорить, что спектральная плотность $\theta(\lambda)$ удовлетворяет **условию Маккенхаупта** (A_2) (или имеет нули типа Маккенхаупта), если (см. [13])

$$\sup \frac{1}{|J|^2} \int_J \theta(\lambda)\, d\lambda \int_J \frac{1}{\theta(\lambda)}\, d\lambda < \infty, \qquad (A_2)$$

где супремум берётся по всем интервалам $J \subset [-\pi, \pi]$, $|J|$ - длина интервала J. Класс спектральных плотностей $\theta(\lambda)$, удовлетворяющих условию Маккенхаупта (A_2) обозначаем через $\mathcal{A}_2$.

Замечание 1. Спектральные плотности из класса $\mathcal{A}_2$ могут обладать нулями и полюсами. В частности, функции вида $\theta(\lambda) \sim |\lambda|^\alpha$, $-1/2 < \alpha < 1/2$ принадлежат классу $\mathcal{A}_2$.

Замечание 2. В действительности, (A_2) есть условие слабой зависимости, которое означает, что максимальный коэффициент корреляции между "прошлым" и "будущим" процесса $X(t)$ меньше единицы. Класс процессов $X(t)$, соответствующих $\mathcal{A}_2$, содержится в классе линейно регулярных процессов и содержит класс вполне регулярных процессов (см. [16]).

Для заданных чисел $p > 1$, $0 < \alpha < 1$ и $r \in \mathcal{N}_0$ ($\mathcal{N}_0$ - множество неотрицательных целых чисел), положим $\beta = r + \alpha$, и обозначим через $\mathbf{H}_p(\beta)$ класс Гёльдера, т.е. класс функций $\psi(\lambda) \in \mathbf{L}_p$, имеющих r-ые производные в $\mathbf{L}_p$ и удовлетворяющих условию $||\psi^{(r)}(\cdot + u) - \psi^{(r)}(\cdot)||_p \leq C|u|^\alpha$, где C - положительная константа. Через $\Sigma_p(\beta)$ будем обозначать множество всех спектральных плотностей, принадлежащих классу $\mathbf{H}_p(\beta)$.

Предположение 1. Рассматриваемый процесс $X(t)$ ($t \in \mathbb{Z}$) является действительнозначным стационарным гауссовским процессом со спектральной плотностью $\theta(\lambda)$, удовлетворяющей условию Маккенхаупта (A_2) и принадлежащей классу Гёльдера $\mathbf{H}_p(\beta)$ ($p > 1$, $\beta > 0$).

2.2. Локальная асимптотическая нормальность. Понятие локальной асимптотической нормальности (ЛАН) семейства распределений играет важную роль в асимптотической теории оценивания. Многие важные свойства статистических оценок (предельные распределения, точные нижние границы, асимптотическая эффективность, и т.д.) вытекают из условия ЛАН (см. [14], [15], [19]). Важность ЛАН для задач непараметрического оценивания подчёркивалась в работах [20], [21], [22], [15] и других. Условие ЛАН для семейств распределений, порождённых стационарным гауссовским процессом со спектральной плотностью, зависящей от конечномерного параметра, изучалось в работах [3], [2] и [5]. В [15] было предложено новое определение понятия ЛАН для семейств распределений в случае, когда параметрическое множество является подмножеством некоторого бесконечномерного нормированного пространства. Пусть $\mathbb{P}_{T,\theta}$ – вероятностное распределение гауссовского вектора $\mathbf{X}_T = \{X(1), ..., X(T)\}$ со спектральной плотностью $\theta(\lambda)$.

Определение 2 (см. [15] и [8]). Семейство $\{\mathbb{P}_{T,\theta},\ \theta \in \Theta\}$ называется **локально асимптотически нормальным (ЛАН)** в точке $\theta_0 \in \Theta$ в направлении $\mathbf{L}_2$ с нормировочными множителями $A_T = A_T(\theta_0)$, если существует линейное многообразие $H_0 = H_0(\theta_0) \subset \mathbf{L}_2$ с замыканием $\overline{H_0} = \mathbf{L}_2$ и семейство $\{A_T\}$ линейных операторов $A_T : \mathbf{L}_2 \longmapsto \mathbf{L}_2$, удовлетворяющих условиям :

1) для любого $h \in H_0$, при $T \to \infty$ имеем $||A_T h||_2 \to 0$, где $||\cdot||_2$ обозначает L_2–норму ;

2) для любого $h \in H_0$ существует натуральное число $T(h)$ такое, что $\theta_0 + A_T h \in \Theta$ для всех $T > T(h)$;

3) для любых $h \in H_0$ и $T > T(h)$ имеем

$$\ln \frac{d\mathbb{P}_{T,\theta_0+A_T h}}{d\mathbb{P}_{T,\theta_0}}(\mathbf{X}_T) = \Delta_T(h,\theta_0) - \frac{1}{2}||h||_2^2 + \phi(T,h,\theta_0), \qquad (2)$$

где $\Delta_T(h) = \Delta_T(h,\theta_0)$ – случайная линейная функция на H_0 асимптотически (при $T \to \infty$) $N(0, ||h||_2^2)$–нормально распределённая для любого $h \in H_0$ и

$$\phi(T,h,\theta_0) \to 0 \quad \text{при} \quad T \to \infty \quad \text{по} \quad \mathbb{P}_{T,\theta_0} \text{ – вероятности.}$$

Заметим, что свойство ЛАН зависит от точки θ_0, пространства $\mathbf{L}_2$ и семейства операторов $\{A_T\}$. Что касается $H_0 = H_0(\theta_0)$, нам понадобится только свойство $\overline{H_0} = \mathbf{L}_2$.

Определение 3 [Условие $(\mathcal{H}_1)$]. Будем говорить, что пара функций $(f(\lambda), g(\lambda))$ удовлетворяет **условию** $(\mathcal{H}_1)$, если $f(\lambda) \in \Sigma_p(\beta)$ для $1 < p \le 2$, $\beta > 1/p$ и $g(\lambda) \in \mathbf{L}_q$, где q – сопряжённый к p показатель : $1/p + 1/q = 1$.

Мы будем всегда предполагать, что $\Theta \subset \mathcal{A}_2 \cap \Sigma_p(\beta)$, $p > 1$, $\beta > 0$. Определим $H_0 = H_0(\theta)$ как линейное многообразие, состоящее из ограниченных на $[-\pi, \pi]$ функций $h(\lambda)$ таких, что пара $(\theta, h\theta^{-1})$ удовлетворяет условию $(\mathcal{H}_1)$. Определим также $A_T : \mathbf{L}_2 \longmapsto \mathbf{L}_2$ полагая $A_T h = [T^{-1/2}\theta] \cdot h$, т.е. A_T – оператор умножения на функцию $T^{-1/2}\theta(\lambda)$. В качестве непосредственного следствия Теоремы 1 из [8], имеем

Теорема 1. Пусть Θ, H_0 и A_T те же, что и выше. Тогда семейство распределений $\{\mathbb{P}_{T,\theta},\ \theta\in\Theta\}$ удовлетворяет условию ЛАН в произвольной точке $\theta\in\Theta$ в направлении $\mathbf{L}_2$ с нормировочными множителями A_T и

$$\Delta_T(h)=\frac{T^{1/2}}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{I_T(\lambda)-\theta(\lambda)}{\theta(\lambda)}h(\lambda)\,d\lambda, \tag{3}$$

где

$$I_T(\lambda)=\frac{1}{2\pi T}\left|\sum_{t=1}^{T}X(t)e^{-i\lambda t}\right|^2 \tag{4}$$

– периодограмма процесса $X(t)$.

2.3. Характеризация предельных распределений. H_0–эффективность. Рассмотрим задачу оценивания значения $\Phi(\theta)$ известного функционала $\Phi(\cdot)$ в неизвестной точке $\theta\in\Theta$ на основе наблюдений $\mathbf{X}_T$, имеющих распределение $\mathbb{P}_{T,\theta}$. Предположим, что семейство $\{\mathbb{P}_{T,\theta},\ \theta\in\Theta\}$ удовлетворяет условию ЛАН в точке $\theta_0=f\in\Theta$ в направлении $\mathbf{L}_2$ с нормировочными множителями A_T. Мы будем также предполагать, что функционал $\Phi(\theta)$ дифференцируем в смысле Фреше с производной $\Phi'(\theta)$, удовлетворяющей условию : для $f\in\Theta$

$$0<||\Phi'(f)f||_2<\infty. \tag{5}$$

Пусть $\widehat{\Phi}_T$ – статистическая оценка функционала $\Phi(\theta)$, т.е. измеримое отображение $\widehat{\Phi}_T=\widehat{\Phi}_T(\mathbf{X}_T)\ :\ \mathbb{R}^T\longmapsto\mathbb{R}^1$. Нам понадобится версия теоремы Гаека-Ибрагимова-Хасьминского о свёртке.

Статистическая оценка $\widehat{\Phi}_T$ функционала $\Phi(\theta)$ называется **H_0–регулярной** в точке $\theta_0\in\Theta$, если для любого $h\in H_0$ существует независящая от h собственная предельная функция распределения F случайной величины $T^{1/2}\left(\widehat{\Phi}_T-\Phi(\theta_h)\right)$, где $\theta_h=\theta_0+A_Th$, для которой в смысле слабой сходимости имеем

$$\mathcal{L}\left\{T^{1/2}\left(\widehat{\Phi}_T-\Phi(\theta_h)\right)\Big|\,\mathbb{P}_{T,\theta_h}\right\}\Longrightarrow F\quad\text{при}\quad T\to\infty.$$

Следующая теорема вытекает из Теоремы 1 и Теоремы 3.1 из [15].

Теорема 2. Пусть $\widehat{\Phi}_T$ – H_0–регулярная статистическая оценка функционала $\Phi(\theta)$ в точке $f\in\Theta$. Пусть спектральная плотность $f(\lambda)$ и функционал $\Phi(\cdot)$ такие, что пара $(f,\Phi'(f))$ удовлетворяет условию (5). Тогда в условиях Теоремы 1 предельное распределение F нормированной

разности $T^{1/2}\left(\widehat{\Phi}_T - \Phi(f)\right)$ является свёрткой некоторого вероятностного распределения G и нормального распределения со средним ноль и дисперсией $||\Phi'(f)f||_2^2$:

$$F = N(0, ||\Phi'(f)f||_2^2) * G. \tag{6}$$

По хорошо известной лемме Андерсона (см. [14], §2.10), распределение F в (6) меньше сконцентрировано в симметрических интервалах, чем $N(0, ||\Phi'(f)f||_2^2)$. Это обосновывает следующее определение H_0-эффективности (ср. [22], [2]).

Определение 4. Пусть семейство распределений $\{\mathbb{P}_{T,\theta},\ \theta \in \Theta\}$ удовлетворяет условию ЛАН в точке $f \in \Theta$. Статистическая оценка $\widehat{\Phi}_T$ функционала $\Phi(\theta)$ называется H_0–**асимптотически эффективной** в f (в классе H_0–регулярных оценок) с асимптотической дисперсией $\sigma^2 = ||\Phi'(f)f||_2^2$, если

$$\mathcal{L}\left\{T^{1/2}\left(\widehat{\Phi}_T - \Phi(\theta_h)\right)\Big|\,\mathbb{P}_{T,\theta_h}\right\} \Longrightarrow N(0,\sigma^2) \quad \text{при} \quad T \to \infty,$$

т.е. распределение G в (6) вырождено.

2.4. Нижняя граница для асимптотически минимаксного риска. IK–эффективность. Обозначим через Φ_T множество всех статистических оценок функционала $\Phi(\theta)$, построенных на основе наблюдений $\mathbf{X}_T$, и пусть $\mathbf{W}$ обозначает множество всех функций потерь $w : \mathbb{R}^1 \longmapsto \mathbb{R}^1$, симметричных, неубывающих на положительной полупрямой и удовлетворяющих условию $w(x) \geq 0$, $w(0) = 0$. Следующая теорема, которая является непосредственным следствием Теоремы 1 и Теоремы 4.1 из [15], содержит минимаксную нижнюю границу для риска всевозможных статистических оценок $\widehat{\Phi}_T$ функционала $\Phi(\cdot)$ в окрестности $f \in \Theta$ (ср. [5], [12]).

Теорема 3. Пусть спектральная плотность $f(\lambda)$ и функционал $\Phi(\cdot)$ такие, что пара $(f, \Phi'(f))$ удовлетворяет условию (5). Тогда в условиях Теоремы 1, для всех $w \in \mathbf{W}$ имеем

$$\liminf_{\delta\to 0}\ \lim_{T\to\infty}\ \inf_{\widehat{\Phi}_T \in \Phi_T}\ \sup_{||\theta - f||_2 < \delta} \mathbb{E}_\theta\{w(T^{1/2}(\widehat{\Phi}_T - \Phi(f)))\} \geq \mathbb{E}w(\xi), \tag{7}$$

где ξ – центрированная нормальная случайная величина с дисперсией $||\Phi'(f)f||_2^2$, а $\mathbb{E}_\theta\{\cdot\}$ обозначает математическое ожидание относительно меры, соответствующей спектральной плотности $\theta(\lambda)$.

Теперь дадим определение понятия асимптотически эффективных оценок в смысле Ибрагимова и Хасьминского (IK–эффективность) [12], [15].

Определение 5. Пусть семейство распределений $\{\mathbb{P}_{T,\theta},\ \theta \in \Theta\}$ удовлетворяет условию ЛАН в $f \in \Theta$. Статистическая оценка $\widehat{\Phi}_T$ функционала $\Phi(\theta)$ называется **IK–асимптотически эффективной** в точке f для функции потерь $w(x) \in \mathbf{W}$ с асимптотической дисперсией $\sigma^2 = \|\Phi'(f)f\|_2^2$, если

$$\liminf_{\delta\to 0} \lim_{T\to\infty} \sup_{\|\theta - f\|_2<\delta} \mathbb{E}_\theta\{w(T^{1/2}(\widehat{\Phi}_T - \Phi(f)))\} = \mathbb{E}w(\xi), \tag{8}$$

где ξ – центрированная нормальная случайная величина с дисперсией $\|\Phi'(f)f\|_2^2$.

§3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Прежде заметим, что в отличие от конечномерного случая, где задача построения асимптотически эффективных оценок имеет относительно простое решение, для бесконечномерного параметрического множества Θ асимптотически эффективные оценки могут не существовать (при обычной нормировке, см. [15]).

В этом параграфе мы покажем, что статистика $\Phi(I_T)$, где $I_T = I_T(\lambda)$ – периодограмма, определённая по формуле (4), является H_0– и IK– асимптотически эффективной оценкой для линейного функционала $\Phi(f)$. Аналогичные свойства для нелинейного функционала $\Phi(f)$ имеет оценка $\Phi(\widehat{f}_T)$, где $\widehat{f}_T$ – подходящая последовательность $T^{1/2}$–состоятельных оценок неизвестной спектральной плотности $f(\lambda)$. Отметим, что в нелинейном случае статистика $\Phi(I_T)$, вообще говоря, не является состоятельной оценкой для функционала $\Phi(f)$ (см. [2], [12], [25]).

3.1. Асимптотически эффективные оценки для линейных функционалов. Предположим, что функционал $\Phi(f)$ линеен и непрерывен в $\mathbf{L}_p[-\pi,\pi]$, $p>1$. Известно, что (см. [24]) $\Phi(f)$ допускает представление

$$\Phi(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)g(\lambda)\,d\lambda, \tag{9}$$

где $g(\lambda) \in L_q$, $1/p + 1/q = 1$. В качестве статистической оценки для функционала $\Phi(f)$ рассмотрим статистику усреднённой периодограммы :

$$\widehat{\Phi}_T = \Phi(I_T) = \int_{-\pi}^{\pi} I_T(\lambda)g(\lambda)\,d\lambda, \tag{10}$$

где $I_T(\lambda)$ – периодограмма процесса $X(t)$, определённая по формуле (4). Обозначим через $\mathbf{W}_e$ подмножество функций потерь $w \in \mathbf{W}$, которые для некоторых постоянных $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ удовлетворяют условию $w(x) \le C_1 \exp\{C_2|x|\}$.

Теорема 4. Пусть функционал $\Phi(f)$ и оценка $\widehat{\Phi}_T$ определены по формулам (9) и (10), соответственно. Предположим, что пара функций $(f(\lambda), g(\lambda))$ удовлетворяет условиям $(\mathcal{H}_1)$ и $0 < \|fg\|_2 < \infty$. Тогда в условиях Теоремы 1 статистика $\widehat{\Phi}_T$ обладает следуэщими свойствами :

а) H_0-регулярной и H_0-асимптотически эффективной оценкой для функционала $\Phi(f)$ с асимптотической дисперсией $\|fg\|_2^2$,

b) IK–асимптотически эффективной оценкой для функционала $\Phi(f)$ для $w(x) \in \mathbf{W}_e$ с асимптотической дисперсией $\|fg\|_2^2$.

3.2. Асимптотически эффективные оценки для гладких нелинейных функционалов. Задача асимптотически эффективного оценивания является более сложной для нелинейных функционалов. В этом случае статистика $\Phi(I_T)$ необязательно является состоятельной оценкой для функционала $\Phi(f)$, и поэтому вместо периодограммы $I_T(\lambda)$ мы должны использовать подходящую последовательность состоятельных оценок $\widehat{f}_T$ неизвестной спектральной плотности f (см. [2], [12], [25]). С другой стороны, если $\widehat{f}_T$ является последовательностью состоятельных оценок для спектральной плотности f, то последовательность оценок $\Phi(\widehat{f}_T)$, вообше говоря, сходятся к $\Phi(f)$ слишком медленно, чтобы быть асимптотически эффективными (ср. [12]).

Рассмотрим последовательность $\{\widehat{f}_T\}$ статистических оценок для f, которые состоятельны порядка $T^{2\alpha}$ ($\alpha \leq 1/2$), и выведем условия, при которых статистика $\widehat{\Phi}_T = \Phi(\widehat{f}_T)$ является асимптотически эффективной оценкой для $\Phi(f)$. Напомним, что оценка $\widehat{f}_T$ для f называется $T^{2\alpha}$**–состоятельной** с асимптотической дисперсией σ^2, если (ср. [23]) $\lim\limits_{T\to\infty} T^{2\alpha}\mathbb{E}(\widehat{f}_T - f)^2 = \sigma^2$. Предположим, что $f \in \Sigma_p(\beta)$ и в качестве статистической оценки для неизвестной спектральной плотности f рассмотрим статистику

$$\widehat{f}_T(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} W_T(\lambda - \mu) I_T(\mu)\, d\mu. \tag{11}$$

Мы будем предполагать, что ядро $W_T(\lambda)$ удовлетворяет следуюшим условиям (ср. [2], [12], [23], [25]).

Предположение 2. $W_T(\lambda) = M_T W(M_T\lambda)$, где $M_T = O(T^\alpha)$. Выбор числа α $(0 < \alpha < 1)$ зависит от предварительной информации относительно f и Φ.

Предположение 3. $W(\lambda)$ – ограниченная, чётная, неотрицательная функция такая, что $W(\lambda) \equiv 0$ для $|\lambda| > 1$ и

$$\int_{-1}^{1} W(\lambda)\,d\lambda = 1, \quad \int_{-1}^{1} \lambda^k W(\lambda)\,d\lambda = 0, \quad k = 1, \ldots, r,$$

где $r = [\beta]$ – целая часть числа β.

Предположим, что функционал $\Phi(\cdot)$ дифференцируем в смысле Фреше с производной $\Phi'(\cdot)$, удовлетворяющей условию (5) и условию Гёльдера : существуют положительные постоянные C и δ такие, что для любых $f_1, f_2 \in \mathbf{L}_2$ имеем

$$||\Phi'(f_1) - \Phi'(f_2)|| \le C||f_1 - f_2||_2^{\delta}. \tag{12}$$

Теорема 5. Пусть спектральная плотность $f(\lambda)$ и функционал $\Phi(\cdot)$ такие, что

(i) пара $(f, \Phi'(f))$ удовлетворяет условиям $(\mathcal{H}_1)$ и (5),

(ii) $\Phi(\cdot)$ удовлетворяет условию (12) с $\delta \ge (2\beta - 1)^{-1}$.

Пусть оценка $\widehat{f}_T$ определена по формуле (11) с ядром $W_T(\lambda)$, удовлетворяющим Предположениям 2 и 3 с $\frac{1}{2\beta} < \alpha < \frac{\delta}{\delta+1}$. Тогда в условиях Теоремы 1 статистика $\Phi(\widehat{f}_T)$ является :

a) H_0-регулярной и H_0-асимптотически эффективной оценкой для $\Phi(f)$ с асимптотической дисперсией $||\Phi'(f)f||_2^2$,

b) IK-асимптотически эффективной оценкой для функционала $\Phi(f)$ для $w(x) \in \mathbf{W}_e$ с асимптотической дисперсией $||\Phi'(f)f||_2^2$.

3.3. Точные асимптотические границы для минимаксного среднеквадратического риска. В этом пункте мы возвращаемся к задаче оценивания линейного, непрерывного в $\mathbf{L}_p$ $(p > 1)$ функционала $\Phi(f)$. Если $p \le 2$, то функционал $\Phi(f)$ является непрерывным в $\mathbf{L}_2$ и мы можем применить Теорему 4 для построения асимптотически эффективной оценки для $\Phi(f)$. Если же $p > 2$, то правая часть формулы (7) стремится к бесконечности, и интересно оценить скорость убывания минимаксного риска : $\Delta_T(\Phi_T, \Sigma, w) = \inf_{\widehat{\Phi}_T \in \Phi_T} \sup_{f \in \Sigma} \mathbb{E}_f\{w(\widehat{\Phi}_T - \Phi(f))\}$, где Σ – заданный класс спектральных плотностей, а Φ_T – множество всех оценок $\Phi(f)$, построенных по наблюдениям $\mathbf{X}_T$. Следующая теорема даёт точные асимптотические границы для минимаксного среднеквадратического риска $\Delta_T^2 = \Delta_T(\Phi_T, \Sigma, |x|^2)$ при $T \to \infty$ (см. [6], [9]).

Теорема 6. Предположим, что $\Sigma = \Sigma_p(\beta)$, и пусть линейный функционал $\Phi(f)$ непрерывен в L_p $(p > 2)$. Тогда при $T \to \infty$

$$\Delta_T^2 \asymp \begin{cases} T^{(-2p\beta)/(p+2p\beta-2)} & \text{для } \beta > 1/p, \\ T^{-2\beta} & \text{для } \beta \le 1/p. \end{cases}$$

§4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Доказательства утверждений а) в Теоремах 4 и 5 существенно используют следующую характеризацию H_0–регулярных и H_0–асимптотически эффективных оценок (см. [2]) :

Лемма 1. Предположим, что семейство распределений $\{\mathbb{P}_{T,\theta},\ \theta \in \Theta\}$ удовлетворяет условию ЛАН в точке $f \in \Theta$. Тогда оценка $\widehat{\Phi}_T$ функционала $\Phi(f)$ является H_0–регулярной и H_0–асимптотически эффективной в f с асимптотической дисперсией $\|f\Phi'(f)\|_2^2$ тогда и только тогда, когда она допускает стохастическую аппроксимацию

$$T^{1/2}[\widehat{\Phi}_T - \Phi(f)] - \Delta_T(f\Phi'(f)) = o_P(1) \quad \text{при} \quad T \to \infty, \tag{13}$$

где $\Delta_T(f\Phi'(f))$ определена по формуле (3) с $h = f\Phi'(f)$.

Лемма 2. Пусть функционал $\Phi(f)$ и оценка $\widehat{\Phi}(I_T)$ определены по формулам (9) и (10), соответственно. Предположим, что пара функций $(f(\lambda), g(\lambda))$ удовлетворяет условиям $(\mathcal{H}_1)$ и $0 < \|fg\|_2 < \infty$. Тогда для $w(x) \in \mathbf{W}_e$ имеем

$$\lim_{T\to\infty} \mathbb{E}_f\{w(T^{1/2}(\widehat{\Phi}(I_T) - \Phi(f)))\} = \mathbb{E}w(\xi), \tag{14}$$

где ξ – нормально распределённая случайная величина со средним 0 и дисперсией $\|fg\|_2^2$.

Доказательство : повторяет доказательство Теоремы 3 из [6].

Лемма 3. Предположим, что $f \in \Sigma_p(\beta)$ и пусть оценка $\widehat{f}_T$, определена по (11) с ядром $W_T(\lambda)$, удовлетворяет Предположениям 2 и 3 с $\frac{1}{2\beta} < \alpha < \frac{\delta}{\delta+1}$. Тогда

$$T^{1/2}\|\widehat{f}_T - f\|_2^{1+\delta} = o_P(1) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{15}$$

Доказательство : Используя доказательство Теоремы 3.1 работы [1] (см. также [25]), нетрудно показать, что

$$\|\widehat{f}_T - f\|_2 = O_P\left(M_T^{1/2}T^{-1/2}\right) + O_P\left(M_T^{-\beta}\right). \tag{16}$$

Следовательно, принимая во внимание, что $M_T = O\left(T^{\alpha}\right)$, можем записать

$$T^{1/2}\|\widehat{f}_T - f\|_2^{1+\delta} = O_P\left(T^{\frac{1}{2}+\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\right)(1+\delta)}\right) + O_P\left(T^{\frac{1}{2}-\alpha\beta(1+\delta)}\right). \tag{17}$$

Легко проверить, что в условиях леммы $\frac{1}{2}+\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\right)(1+\delta) < 0$ и $\frac{1}{2}-\alpha\beta(1+\delta) < 0$. Поэтому оба слагаемых в правой части (17) имеют порядок $o_P(1)$ при $T \to \infty$. Доказательство завершено.

Лемма 4. Предположим, что $f \in \Sigma_p(\beta)$, и выполнены Предположения 2 и 3. Пусть $\psi(\lambda)$ – непрерывная, чётная функция на $[-\pi, \pi]$ такая, что пара $(f(\lambda), \psi(\lambda))$ удовлетворяет условиям $(\mathcal{H}_1)$ и $0 < ||f\psi||_2 < \infty$. Тогда распределение случайной величины

$$\eta_T = T^{1/2} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\lambda) \left[\widehat{f}_T(\lambda) - f(\lambda)\right] d\lambda \tag{18}$$

при $T \to \infty$ стремится к нормальному распределению $N(0, \sigma^2)$, где

$$\sigma^2 = 4\pi \int_{-\pi}^{\pi} \psi^2(\lambda) f^2(\lambda)\, d\lambda. \tag{19}$$

Доказательство : Из Леммы 2 (ср. [7]) следует, что при $T \to \infty$ распределение случайной величины

$$\xi_T = T^{1/2} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\lambda) \left[I_T(\lambda) - f(\lambda)\right] d\lambda \tag{20}$$

стремится к нормальному распределению $N(0, \sigma^2)$. Поэтому для завершения доказательства достаточно показать, что

$$|\xi_T - \eta_T| = o_P(1) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{21}$$

Полагая $M_T(\lambda - \mu) = t$, после простых вычислений получаем

$$\eta_T = \eta_T^{(1)} + S_T, \tag{22}$$

где

$$\eta_T^{(1)} = T^{1/2} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_T(\lambda)(I_T(\lambda) - f(\lambda))\, d\lambda,$$

$$S_T = T^{1/2} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\lambda) \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(\mu) W_T(\lambda - \mu)\, d\mu - f(\mu)\right] d\lambda,$$

$$\Psi_T(\lambda) = \int_{M_T(-\pi-\lambda)}^{M_T(\pi-\lambda)} \psi\left(\lambda + \frac{t}{M_T}\right) W_T(t)\, dt - \psi(\lambda).$$

Используя рассуждения приведённые в доказательстве Теоремы 3 из [25], согласно Лемме 2, получаем

$$\left|\xi_T - \eta_T^{(1)}\right| = o_P(1) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{23}$$

Далее, в силу неравенства Гёльдера и обобщённого неравенства Минковского имеем

$$|S_T| \le T^{1/2} ||\psi||_q (1 + ||W_T||_1) E_{M_T,p}(f), \tag{24}$$

где $E_{m,p}(f)$ – наилучшая аппроксимация f многочленами порядка m в метрике пространства L_p. Из предположения $f \in \Sigma_p(\beta)$ вытекает $E_{m,p}(f) \le Cm^{-\beta}$. Следовательно, согласно (24) имеем

$$S_T = O\left(T^{1/2}M_T^{-\beta}\right) = O\left(T^{1/2-\alpha\beta}\right) \to 0 \tag{25}$$

при $T \to \infty$, так как по предположению $\alpha > \frac{1}{2\beta}$. Комбинируя (23) и (25) получаем (21). Этим завершается доказательство Леммы 4.

Доказательство Теоремы 4 : Из (3), (8) и (10) имеем

$$T^{1/2}[\widehat{\Phi}_T - \Phi(f)] = T^{1/2}\int_{-\pi}^{\pi}[I_T(\lambda) - f(\lambda)]\,g(\lambda)\,d\lambda = \Delta_T(fg). \tag{26}$$

Так как в рассматриваемом случае $\Phi'(f) = g$, то утверждение a) следует из (26), Теоремы 1 и Леммы 1. Доказательство утверждения b) непосредственно следует из Теорем 1, 3 и Леммы 2. Теорема 4 доказана.

Доказательство Теоремы 5 : Из (12) следует, что (ср. [17], стр. 454)

$$\left|\Phi(\widehat{f}_T) - \Phi(f) - \int_{-\pi}^{\pi}\Phi'(f)(\lambda)(\widehat{f}_T(\lambda) - f(\lambda))\,d\lambda\right| \le$$

$$\le ||\widehat{f}_T - f|| \sup_{0\le\theta\le1} ||\Phi'(f + \theta(\widehat{f}_T - f)) - \Phi'(f)|| \le C||\widehat{f}_T - f||^{1+\delta}. \tag{27}$$

Следовательно

$$T^{1/2}[\Phi(\widehat{f}_T) - \Phi(f)] =$$

$$= T^{1/2}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi'(f)(\lambda)\left[\widehat{f}_T(\lambda) - f(\lambda)\right]\,d\lambda + O\left(T^{1/2}||\widehat{f}_T - f||^{1+\delta}\right). \tag{28}$$

Используя рассуждения доказательства Леммы 4 для $\psi(\lambda) = \Phi'(f)(\lambda)$, заключаем, что при $T \to \infty$ имеем

$$T^{1/2}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi'(f)(\lambda)\left[\widehat{f}_T(\lambda) - f(\lambda)\right]\,d\lambda =$$

$$= T^{1/2}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi'(f)(\lambda)\,[I_T(\lambda) - f(\lambda)]\,d\lambda + o_P(1). \tag{29}$$

Из Леммы 3 и (28), (29) находим

$$T^{1/2}[\Phi(\widehat{f}_T) - \Phi(f)] = T^{1/2}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi'(f)(\lambda)\,[I_T(\lambda) - f(\lambda)]\,d\lambda + o_P(1). \tag{30}$$

Из (3) и (30) имеем

$$T^{1/2}[\widehat{\Phi}_T - \Phi(f)] - \Delta_T(f\Phi'(f)) = o_P(1) \quad \text{при} \quad T \to \infty,$$

где $\Delta_T(\cdot)$ определена по формуле (3). Применяя Лемму 1, заключаем, что $\widehat{\Phi}_T$ является H_0-регулярной и H_0-асимптотически эффективной оценкой для $\Phi(f)$ с асимптотической дисперсией $\|f\Phi'(f)\|_2^2$. Этим завершается доказательство утверждения a). Далее, принимая во внимание (30) и используя Лемму 2 при $g(\lambda) = \Phi'(f)(\lambda)$, для $w(x) \in \mathbf{W}_e$ получаем

$$\lim_{T\to\infty} \mathbb{E}_f\{w(T^{1/2}(\widehat{\Phi}_T - \Phi(f)))\} = \mathbb{E}w(\xi), \tag{31}$$

где ξ – нормально распределённая случайная величина со средним 0 и дисперсией $\|f\Phi'(f)\|_2^2$. Следовательно, утверждение b) вытекает из (31) и Теорем 1 и 3. Теорема 5 доказана.

Доказательство Теоремы 6 дано в [9].

ABSTRACT. The paper considers the problem of construction of asymptotically efficient estimators for functionals defined on a class of spectral densities. The concepts of H_0- and IK– efficiency of estimators are introduced, based on the variants of Hájek–Ibragimov–Khas'minskii convolution theorem and Hájek–Le Cam local asymptotic minimax theorem, respectively. We prove that the statistic $\Phi(I_T)$, where $I_T = I_T(\lambda)$ is the periodogram of the underlying stationary Gaussian process $X(t)$ with an unknown spectral density function $\theta(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$, is H_0- and IK– asymptotically efficient estimator for a linear functional $\Phi(\theta)$. For a nonlinear smooth functional $\Phi(\theta)$ the estimator $\Phi(\widehat{\theta}_T)$ is H_0- and IK– asymptotically efficient for suitable sequences of $T^{1/2}$–consistent estimators $\widehat{\theta}_T$ of unknown spectral density $\theta(\lambda)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Ю. Бенткус, Р. А. Рудзкис, "О распределениях некоторых статистических оценок спектральной плотности", Теория вероятн. и ее примен., том 27, стр. 739 – 756, 1982.
2. R. Dahlhaus, W. Wefelmeyer, "Asymptotically optimal estimation in misspecified time series models", Annals of Statistics, vol. 24, pp. 952 – 974, 1996.
3. B. R. Davies, "Asymptotic inference in stationary time-series", Adv. Appl. Probab., vol. 5, pp. 469–497, 1973.
4. K. O. Dzhaparidze, Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Spectral Analysis of Stationary Time Series, Springer–Verlag, New York, Berlin, 1986.
5. М. С. Гиновян, "Локальная асимптотическая нормальность семейств гауссовских распределений", Записки Научных Семинаров ЛОМИ, том 136, стр. 13 — 27, 1984.
6. М. С. Гиновян, "Асимптотически эффективное непараметрическое оценивание функционалов от спектральной плотности, имеющей нули", Теория вероятн. и ее примен., том 33, стр. 315 — 322, 1988.
7. M. S. Ginovian, "On Toeplitz type quadratic functionals in Gaussian stationary process", Probab. Theory Relat. Fields, vol. 100, pp. 395 – 406, 1994.
8. М. С. Гиновян, "Локально асимптотически нормальные семейства гауссовских распределений", Изв. АН Армении, Математика, том 34, № 4, стр. 18 – 29, 1999.

9. М. С. Гиновян, "Асимптотически точные границы для минимаксного риска оценок линейных функционалов", Изв. АН Армении, Математика, том 35, № 3, стр. 10 – 20, 2000.
10. J. Hajek, "A characterization of limiting distributions of regular estimates", Z. Wahrshchein. and verw. Geb., vol. 14, pp. 323 – 330, 1970.
11. J. Hajek, " Local asymptotic minimax and admissibility in estimation", Proc. Sixth Berkelet Sympos. Math. Statist. and Probab., vol. 1, pp. 175 – 194, 1972.
12. R. Z. Has'minskii, I. A. Ibragimov, "Asymptotically efficient nonparametric estimation of functionals of a spectral density function", Probab. Theory Relat. Fields, vol. 73, pp. 447 – 461, 1986.
13. R. A. Hunt, B. Muckenhoupt, R. L. Wheeden, "Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform", Trans. of the AMS, vol. 76, pp. 227 – 251, 1973.
14. I. A. Ibragimov, R. Z. Khasminskii, Statistical Estimation : Asymptotic Theory, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1981.
15. I. A. Ibragimov, R. Z. Khasminskii, "Asymptotically normal families of distributions and efficient estimation", Annals of Statistics, vol. 19, pp. 1681 – 1724, 1991.
16. И. А. Ибрагимов, Ю. А. Розанов, Гауссовские Случайные Процессы, Наука, Москва, 1970.
17. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, Элементы Функционального Анализа, Москва, Наука, 1973.
18. L. Le Cam, "Locally asymptotically normal families of distributions", Univ. Calif. Publ. Statist., vol. 3, pp. 37 – 98, 1960.
19. L. Le Cam, Asymptotic Methods in Statistical Decision Theory, Springer–Verlag, New York, 1986.
20. B. Ya. Levit, "On optimality of some statistical estimates", Proc. Prague Symp. Asymptotic. Statistics, vol. II, pp. 215 – 238, 1974.
21. Б. Я. Левит, "Бесконечномерные информационные неравенства", Теория вероятн. и ее примен., том. 23, вып. 2, стр. 371 — 377, 1978.
22. P. W. Millar, "Non-parametric applications of an infinite dimensional convolution theorem", Z. Wahrshchein. and verw. Geb., vol. 68, pp. 545 – 556, 1985.
23. E. Parzen, "On consistent estimates of the spectrum of a stationary time series", Ann. Math. Statist, vol. 28, pp. 329 – 348, 1957.
24. F. Riesz, B. Sz. Nagy, Lecons d'analyse functionnelle, Akademiai Kiado, Budapest, 1972.
25. M. Taniguchi, "Minimum contrast estimation for spectral densities of stationary processes", J. R. Statist Soc. Series B, vol. 49, pp. 315 – 325, 1987.

30 января 2000

Институт математики
Национальной Академии Наук Армении
E-mail : mamgin@sci.am