СФЕРИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ КОМПЛЕКСНОГО ПОРЯДКА В ОБОБЩЁННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГЁЛЬДЕРА

Б. Г. Вакулов, Н. К. Карапетянц, Л. Д. Шанкишвили

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 36, № 2, 2001

В статье получены оценки типа Зигмунда для оператора типа сферического потенциала комплексного порядка α, $0 \leq \operatorname{Re}\alpha < 1$. Опираясь на эти оценки, действие этого оператора и связанного с ним сингулярного сферического интеграла изучаются в обобщённых классах Гёльдера $H^\omega(S_{n-1})$ и $H^\omega(S_{n-1}, \rho)$.

§0. ВВЕДЕНИЕ

В статье исследуются оператор сферического потенциала K^α и связанный с ним гиперсингулярный интеграл D^α комплексного порядка α. При $\operatorname{Re}\alpha > 0$ оператор K^α определяется как оператор сферической свёртки :

$$(K^\alpha f)(x) = \frac{1}{\gamma_{n-1}(\alpha)} \int_{S_{n-1}} \frac{f(\sigma)}{|x-\sigma|^{n-1-\alpha}}\, d\sigma, \quad x \in S_{n-1}, \tag{0.1}$$

где $\gamma_{n-1}(\alpha)$ – нормировочная константа (см. §1) и $\alpha \neq n-1, n+1, \ldots$ При $\alpha = n-1$, $n+1, \ldots$ (0.1) модифицируется обычным образом, см., например, [7], [9], [13]. Для $0 \leq \operatorname{Re}\alpha < 2$ сферический сингулярный интеграл $D^\alpha f$ определяется следующим образом :

$$(D^\alpha f)(x) = \frac{1}{\gamma_{n-1}(-\alpha)} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\substack{S_{n-1} \\ |x-\sigma| \geq \varepsilon}} \frac{f(\sigma) - f(x)}{|x-\sigma|^{n-1+\alpha}}\, d\sigma, \quad x \in S_{n-1}. \tag{0.2}$$

Для операторов (0.1), (0.2) оценки типа Зигмунда для действительных значений α были получены в [1 – 3]. В настоящей статье получены оценки типа Зигмунда для комплексных α, $0 \leq \operatorname{Re}\alpha < 1$. На основе этих оценок в обобщённых классах Гёльдера $H^\omega(S_{n-1})$ и $H^\omega(S_{n-1}, \rho)$ мы исследуем действие K^α и D^α при $\operatorname{Re}\alpha \neq 0$

Работа, описанная в этой публикации, поддержана РФФИ (Грант № 00-01-00046а.)

и $D^{i\theta}$ при любом действительном $\theta \neq 0$. Предположим, что характеристика $\omega(t)$ принадлежит классу Φ_β^δ типа Бари–Стечкина, причём β и δ зависят от n и $\mathrm{Re}\,\alpha$, а $\rho(x)$ – степенной вес в конечном числе точек сферы. Наряду с операторами K^α и D^α рассматриваются также операторы

$$\mathcal{D}^\alpha = \frac{1}{b_n} I + D^\alpha, \quad b_n = \frac{\Gamma\left(\dfrac{n-1-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n-1+\alpha}{2}\right)}. \tag{0.3}$$

Заметим, что в случае $0 \leq \mathrm{Re}\,\alpha < 2$, $\alpha \neq 0$ справедливы следующие соотношения :

$$\mathcal{D}^\alpha K^\alpha = I, \quad K^\alpha \mathcal{D}^\alpha = I, \quad \mathcal{D}^{i\theta} \mathcal{D}^{-i\theta} = I \quad \text{для любого} \quad \theta \in \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}. \tag{0.4}$$

Используя рекуррентные соотношения для мультипликаторов оператора $\mathcal{D}^\alpha$ по сферическим гармоникам, в §5 доказывается обратимость оператора $\mathcal{D}^{i\theta}$ для любого действительного $\theta \neq 0$. На основе этих результатов, при $\omega(t) = t^\lambda$ показывается, что оператор K^α с $0 < \mathrm{Re}\,\alpha < 1$ осуществляет изоморфизм

$$K^\alpha[H^\lambda(S_{n-1})] = H^{\lambda+\mathrm{Re}\,\alpha}(S_{n-1}), \quad 0 < \lambda, \mathrm{Re}\,\alpha < 1, \quad l + \mathrm{Re}\,\alpha < 1$$

и

$$\mathcal{D}^{\pm i\theta}[H^\lambda(S_{n-1})] = H^\lambda(S_{n-1}) \quad \text{для любого} \quad \theta \in \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Аналогичные утверждения в весовом случае для пространств $H_0^\omega(S_{n-1}, \rho)$, $\rho(x) = \prod_{k=1}^m |x - a_k|^{\mu_k}$, $x, a_k \in S_{n-1}$ доказаны как при обычных предположениях $0 < \mu_k < n-1$ (см. [2], [3]), так и в принципиально новом случае "больших порядков веса", когда $n-1 \leq \mu_k < n - \mathrm{Re}\,\alpha$. Приводятся некоторые свойства обобщённых классов Гёльдера, включая утверждения о плотности $C^\infty(S_{n-1})$ в $\mathrm{H}^\lambda(S_{n-1})$.

Дробные интегралы мнимого порядка на отрезке вещественной оси рассматривались в [5], [6]. Ниже предполагаем, что $n \geq 3$ и используем букву c для обозначения постоянных.

§1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Будем использовать следующие обозначения, стандартные для многомерного анализа на сфере S_{n-1} в $\mathbb{R}^n$: $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$; $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$; $x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$; $S_{n-1} = \{x : x \in \mathbb{R}^n, |x| = 1\}$; $|S_{n-1}| = 2\pi^{(n-1)/2}\Gamma^{-1}\left(\dfrac{n-1}{2}\right)$; $\gamma_{n-1}(\alpha) = 2^\alpha \pi^{(n-1)/2}\Gamma\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\dfrac{n-1-\alpha}{2}\right)$; $\omega(f,h) =$

$\sup\limits_{\substack{|x-\sigma|\leq h \\ x,\sigma\in S_{n-1}}} |f(x)-f(\sigma)|$. Отметим, что $\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ определяется при $\mathrm{Re}\,\alpha \leq 0$, $\alpha \neq 0, -2, \ldots$ по аналитическому продолжению.

Наряду с необходимыми фактами, сначала напомним частный случай формулы Функа–Гекке, известный также как формула Каталана

$$\int_{S_{n-1}} f(x\cdot\sigma)\,d\sigma = C_n \int_{-1}^{1} f(t)(1-t^2)^{(n-3)/2}\,dt, \quad x\in S_{n-1}, \tag{1.1}$$

где $C_n = |S_{n-2}|$ – площадь единичной сферы в в $\mathbb{R}^{n-1}$. Рассуждениями как и в (1.1), вычисляются и оцениваются интегралы вида

$$J(a,b) = \int_{a<|x-\sigma|<b} g(|x-\sigma|)\,d\sigma, \quad x\in S_{n-1}. \tag{1.2}$$

Лемма 1.1. При $n\geq 2$

$$J(a,b) = 2^{3-n}\,C_n \int_a^b g(u)\,u^{n-2}(4-u^2)^{(n-3)/2}\,du. \tag{1.3}$$

При $n\geq 3$

$$J(a,b) \leq C_n \int_a^b |g(u)|\,u^{n-2}\,du. \tag{1.4}$$

Заметим, что $J(a,b)$ не зависит от x, а именно

$$\int_{a<|x-\sigma|<b} g(|x-\sigma|)\,d\sigma = \int_{a<|y-\sigma|<b} g(|y-\sigma|)\,d\sigma \quad \text{для любых} \quad x,y\in S_{n-1}. \tag{1.5}$$

Следующая оценка интересна при $\gamma > n-1$ (следует из (1.4))

$$\int_{|x-\sigma|>2|x-y|} \frac{d\sigma}{|\sigma-y|^\gamma} \leq \int_{|y-\sigma|>|x-y|} \frac{d\sigma}{|\sigma-y|^\gamma} \leq c\,|x-y|^{-\gamma+n-1}. \tag{1.6}$$

Нам понадобятся известные числовые неравенства, которые приведем для случая комплексного μ

$$|x^\mu - y^\mu| \leq c\,|x-y|\,x^{\mathrm{Re}\,\mu-1}, \quad x\geq y>0, \quad \mathrm{Re}\,\mu\geq 0; \tag{1.7}$$

$$|x^\mu - y^\mu| \leq c\,|x-y|\,y^{\mathrm{Re}\,\mu-1}, \quad x\geq y>0, \quad \mathrm{Re}\,\mu\leq 1; \tag{1.8}$$

$$|x^\mu - y^\mu| \leq c\,|x-y|^{\mathrm{Re}\,\mu}, \quad x>0, \quad y>0, \quad 0<\mathrm{Re}\,\mu\leq 1; \tag{1.9}$$

$$|x^\mu - y^\mu| \leq c\,|x-y|\,(x+y)^{\mathrm{Re}\,\mu-1}, \quad x>0, \quad y>0, \quad \mathrm{Re}\,\mu\geq 1. \tag{1.10}$$

Лемма 1.2. При любых $x,y\in S_{n-1}$ и $\gamma>0$ на части сферы, определяемой неравенством

$$|y-\sigma| \geq 2\,|x-y|, \tag{1.11}$$

справедлива следующяя оценка

$$||x-\sigma|^{-\gamma}-|y-\sigma|^{-\gamma}|\le c\,\frac{|x-y|}{|x-\sigma|^{\gamma}\,(|x-\sigma|+|x-y|)}. \tag{1.12}$$

Доказательство : Из неравенств (1.7)–(1.10) при $a>0$, $b>0$, $\gamma>0$, $a\ge 2\,|b-a|$, получаем

$$|a^{-\gamma}-b^{-\gamma}|\le \frac{c}{a^{\gamma}}\cdot\frac{|a-b|}{a+|a-b|}. \tag{1.13}$$

Подставляя $a=|x-\sigma|$, $b=|y-\sigma|$ в (1.13) и учитываяользуя, что $\xi/(a+\xi)$, $a>0$ монотонно возрастает по $\xi>0$, получим (1.12). Лемма 1.2 доказана.

Лемма 1.3. При $\nu\ge 1$ **и** $u,v>0$

$$\frac{|u^{\nu}-v^{\nu}|}{v^{\nu}}\le c\left[\frac{|u-v|}{v}+\left(\frac{|u-v|}{v}\right)^{\nu}\right]. \tag{1.14}$$

Определение 1.1. Будем говорить, что $\omega(t)\in W$, $t\in[0,l]$, если

1) $\omega(t)$ непрерывна на $(0,l]$;

2) $\lim\limits_{t\to+0}\omega(t)=0$, $\omega(t)\ne 0$ при $0<t\le l$;

3) $\omega(t)$ почти возрастает.

Из определения класса W следует, что $\omega(t)>0$ при $t>0$.

Определение 1.2. Для $\omega(t)\in W$ определим $H^{\omega}(S_{n-1})$ как класс функций $f\in C(S_{n-1})$, удовлетворяющих условию $\omega(f,t)\le c\,\omega(t)$. Фактически, $H^{\omega}(S_{n-1})$ является банаховой алгеброй с нормой

$$||f||_{H^{\omega}(S_{n-1})}=||f||_{C(S_{n-1})}+\sup_{t>0}\frac{\omega(f,t)}{\omega(t)}. \tag{1.15}$$

Определение 1.3. Класс $H^{\omega}(S_{n-1},\rho)=\{f\,:\,\rho f\in H^{\omega}(S_{n-1})\}$ с очевидной нормой называется обобщённым весовым пространством Гёльдера. Если $\rho(x)=|x-a|^{\mu}$ и выполняется условие $\lim\limits_{x\in a}(\rho f)(x)=0$, то будем писать $f\in H_0^{\omega}(S_{n-1},\rho)$. В случае пространств $H^{\omega}(S_{n-1})$, чтобы исключить пустые классы, предполагаем, что $\omega(t)\in W$ удовлетворяет условию $\sup\limits_{t>0}t/\omega(t)<\infty$. Будем рассматривать также классы

$$\mathrm{h}^{\omega}(S_{n-1})=\{f\,:\,f\in H^{\omega}(S_{n-1}),\ \lim_{h\to 0}\ \sup_{0<t<h}\frac{\omega(f,t)}{\omega(t)}=0\}, \tag{1.16}$$

$\mathrm{h}_0^{\omega}(S_{n-1},\rho)=\{f\in \mathrm{h}^{\omega}(S_{n-1},\rho)\,:\,\lim\limits_{x\to a}(\rho f)(x)=0\}$. В случае степенной характеристики $\omega(t)=t^{\lambda}$ соответствующие пространства $H^{\omega}(S_{n-1},\rho)$ (и $\mathrm{h}^{\omega}(S_{n-1},\rho)$) обозначаем просто через $H^{\lambda}(S_{n-1},\rho)$ (и $\mathrm{h}^{\lambda}(S_{n-1},\rho)$).

Для $\delta \geq 0$ обозначим, см. [11], [12]

$$\Phi^{\delta} = \{\omega \in W : \int_0^{\tau} (\frac{\tau}{t})^{\delta} \frac{\omega(t)}{t} dt \leq c\omega(\tau)\}, \tag{1.17}$$

а для $\beta > 0$

$$\Phi_{\beta} = \{\omega(t) \in W : \int_{\tau}^{l} (\frac{\tau}{t})^{\beta} \frac{\omega(t)}{t} dt \leq c\omega(\tau)\}. \tag{1.18}$$

Заметим, что класс $\Phi_{\beta}^{\delta} = \Phi^{\delta} \cap \Phi_{\beta}$ обычно называют классом типа Бари–Стечкина. В частности, $\Phi_0^1 = \Phi^0 \cap \Phi_1$ – класс Бари–Стечкина.

Напомним некоторые свойства класса Φ_{β}^{δ}, $\delta \geq 0$, $\beta > 0$ (см., [4], [12]).

Свойство 1.1. При любых β_1, β_2, δ_1, δ_2 справедливо равенство $\Phi_{\beta_1}^{\delta_1} \cap \Phi_{\beta_2}^{\delta_2} = \Phi_{\min(\beta_1,\beta_2)}^{\max(\delta_1,\delta_2)}$. Если дополнительно имеем $\delta_2 \geq \delta_1$, $\beta_2 \leq \beta_1$, то $\Phi_{\beta_2}^{\delta_2} \subset \Phi_{\beta_1}^{\delta_1}$.

Свойство 1.2. При $\delta \geq \beta$, класс Φ_{β}^{δ} пуст.

Свойство 1.3. Для $\omega(t) \in \Phi_{\beta}^{\delta}$, $0 \leq \delta < \beta$ существует такое $\varepsilon > 0$, что функция $\omega(t)/t^{\beta-\varepsilon}$ почти убывает, а $\omega(t)/t^{\delta+\varepsilon}$ почти возрастает и существуют постоянные $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ такие, что

$$c_1 t^{\beta} \leq \omega(t) \leq c_2 t^{\delta}. \tag{1.19}$$

Свойство 1.4. При любом $\rho \geq -\delta$ имеем $\omega(t) \in \Phi_{\beta}^{\delta} \Longleftrightarrow t^{\rho}\omega(t) \in \Phi_{\beta+\rho}^{\delta+\rho}$.

В заключении параграфа сформулируем следующие хорошо известные леммы.

Лемма 1.4. Если $\omega(t) > 0$ почти возрастает на $(0, l]$, то

$$h^{\xi}\omega(h) \leq \frac{c\,h(\xi-1)}{2^{\xi-1}-1} \int_h^l \frac{\omega(t)}{t^{2-\xi}} dt, \quad h < l/2, \quad \xi \in \mathbb{R}^1. \tag{1.20}$$

Лемма 1.5. Если $\omega(t) > 0$ и $\omega(t)/t$ почти убывает на $(0, l]$, то

$$h^{-\xi}\omega(h) \leq c\,(1-\xi) \int_0^h \frac{\omega(t)}{t^{1+\xi}} dt, \quad \xi < 1. \tag{1.21}$$

Если дополнительно потребовать, что в Лемме 1.4 $\omega(t)/t$ почти убывает и в Лемме 1.5 $\omega(t)$ почти возрастает, то при $\xi < 0$ выражения в (1.20) и (1.21) эквивалентны (правые части оцениваются левыми частями, используя константы вида $c\,|\xi|^{-1}$).

§2. СФЕРИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ $H^{\omega}(S_{n-1})$

1°. Случай $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$. В этом пункте получены безвесовые оценки типа Зигмунда.

Теорема 2.1. Для $f \in C(S_{n-1})$ и $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$ имеет место следующая оценка типа Зигмунда :

$$\omega(K^\alpha f, h) \le c\, h \int_h^2 \frac{\omega(f,t)}{t^{2-\operatorname{Re}\alpha}}\, dt, \quad 0 < h < 1. \tag{2.1}$$

Доказательство : Следуя [1], [2], приведём доказательство, опираясь на важное представление для разности $(K^\alpha f)(x) - (K^\alpha f)(y)$. Полное доказательство дадим для более интересного случая гиперсингулярного интеграла. Ясно, что нормировочный множитель $\gamma_{n-1}^{-1}(\alpha)$ войдёт мультипликативно в константу в правой части (2.1). Следовательно, достаточно рассмотреть оператор $K^\alpha f$ без этого множителя. Предположим, что $0 < h < 1$ и обозначим $|x-y| = h$. В силу (1.1), (1.5) получим

$$\int_{S_{n-1}} \frac{d\sigma}{|x-\sigma|^{n-1-\alpha}} = \int_{S_{n-1}} \frac{d\sigma}{|y-\sigma|^{n-1-\alpha}} \tag{2.2}$$

и

$$(K^\alpha f)(x) - (K^\alpha f)(y) = \int_{|x-\sigma|<2h} \frac{f(\sigma)-f(x)}{|x-\sigma|^{n-1-\alpha}}\, d\sigma - \int_{|x-\sigma|<2h} \frac{f(\sigma)-f(x)}{|y-\sigma|^{n-1-\alpha}}\, d\sigma +$$
$$+ \int_{|x-\sigma|>2h} [f(\sigma)-f(x)]\left\{|x-\sigma|^{\alpha-n-1}\right\} |y-\sigma|^{\alpha-n+1}\right\} d\sigma = I_1 + I_2 + I_3. \tag{2.3}$$

Оценим каждое слагаемое в (2.3) по аналогии с A_1, A_2, A_4 в нижеследующей теореме для гиперсингулярного интеграла $D^\alpha f$.

Теорема 2.2. Для $f \in C(S_{n-1})$ и $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$ имеет место следующая оценка Зигмунда :

$$\omega(D^\alpha f, h) \le c \int_0^h \frac{\omega(f,t)}{t^{1+\operatorname{Re}\alpha}}\, dt. \tag{2.4}$$

Доказательство : Как и выше используем представление $D^\alpha f$ без множителя $\gamma_{n-1}^{-1}(-\alpha)$. Имеем

$$(D^\alpha f)(x) - (D^\alpha f)(y) = \int_{S_{n-1}} \frac{f(\sigma)-f(x)}{|x-\sigma|^{n-1+\alpha}}\, d\sigma - \int_{S_{n-1}} \frac{f(\sigma)-f(y)}{|y-\sigma|^{n-1+\alpha}}\, d\sigma =$$
$$= \int_{|x-\sigma|<2h} \frac{f(\sigma)-f(x)}{|x-\sigma|^{n-1+\alpha}}\, d\sigma - \int_{|x-\sigma|<2h} \frac{f(\sigma)-f(y)}{|y-\sigma|^{n-1+\alpha}}\, d\sigma -$$
$$- [f(x)-f(y)] \int_{|x-\sigma|>2h} \frac{d\sigma}{|\sigma-y|^{n-1+\alpha}} + \int_{|x-\sigma|>2h} [f(\sigma)-f(x)]\left\{|x-\sigma|^{-\alpha-n+1} -\right.$$
$$\left. - |y-\sigma|^{-\alpha-n+1}\right\} d\sigma = A_1 + A_2 + A_3 + A_4. \tag{2.5}$$

Используя замену переменных $t = 2u$ и неравенство $\omega(f,2u) \le 2\,\omega(f,u)$, для A_1 получим

$$|A_1| \le \int_{|x-\sigma|<2h} \frac{\omega(f,|\sigma-x|)}{|x-\sigma|^{n-1+\operatorname{Re}\alpha}}\, d\sigma \le c \int_0^{2h} \frac{\omega(f,t)}{t^{1+\operatorname{Re}\alpha}}\, dt \le c \int_0^h \frac{\omega(f,u)}{u^{1+\operatorname{Re}\alpha}}\, dt. \tag{2.6}$$

Используя $\{\sigma : |x-\sigma| < 2h\} \subset \{\sigma : |\sigma - y| < 3h\}$ и (2.6) для A_2 находим

$$|A_2| \le c \int_{|y-\sigma|<3h} \frac{\omega(f, |\sigma-y|)}{|\sigma-y|^{n-1+\mathrm{Re}\,\alpha}}\, d\sigma \le c \int_0^h \frac{\omega(f,t)}{t^{1+\mathrm{Re}\,\alpha}}\, dt. \tag{2.7}$$

Учитывая (1.6), получим

$$|A_3| \le c\,\omega(f,h)\, h^{-\mathrm{Re}\,\alpha}. \tag{2.8}$$

Используя (1.12) при $\gamma = n-1+\alpha$, из $\mathrm{Re}\,\gamma > 0$ и почти убывания $\omega(f,t)/t$, получим

$$\begin{aligned} |A_4| &\le c\,h \int_{|x-\sigma|>2h} \frac{\omega(f,|x-\sigma|)}{|x-\sigma|^{n+\mathrm{Re}\,\alpha}}\, d\sigma \le c\,h \int_{2h}^{2} \frac{\omega(f,u)}{u^{2+\mathrm{Re}\,\alpha}}\, du \le \\ &\le c\,\omega(f,h) \int_h^2 \frac{dt}{t^{1+\mathrm{Re}\,\alpha}} \le c\,h^{-\mathrm{Re}\,\alpha}\,\omega(f,h). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Учитывая (1.20) и (2.6)–(2.9), приходим к (2.4).

2°. Случай $\mathrm{Re}\,\alpha = 0$, $\alpha \ne 0$. Рассмотрим теперь оператор D^α (см. (0.2)) в случае мнимого $\alpha = i\theta$. Оператор $D^{i\theta}$ обладает как свойствами сферического потенциала, так и гиперсингулярного интеграла. Таким образом, в оценке Зигмунда для $D^{i\theta}$ участвуют оба выражения из правых частей оценок типа Зигмунда Теорем 2.1 и 2.2 при формальной подстановке $\mathrm{Re}\,\alpha = 0$.

Лемма 2.1. Для $\theta \in \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$ и $h = |x-y|$

$$\sup_{h>0} |I(h)| < \infty, \quad \text{где} \quad I(h) = \int_{|x-\sigma|>2h} \frac{d\sigma}{|y-\sigma|^{n-1+i\theta}}. \tag{2.10}$$

Доказательство : Обозначение $I(h)$ корректно, так как интеграл в (2.10) инвариантен относительно всех вращений и, следовательно, зависит только от $h = |x-y|$. Запишем

$$I(h) = \int_{\substack{|x-\sigma|>2h \\ |y-\sigma|>2h}} \frac{d\sigma}{|y-\sigma|^{n-1+i\theta}} + \int_{\substack{|x-\sigma|>2h \\ h<|y-\sigma|<2h}} \frac{d\sigma}{|y-\sigma|^{n-1+i\theta}} = \widetilde{I}_1 + \widetilde{I}_2.$$

В силу (1.4) имеем $|\widetilde{I}_2| = c \int_h^{2h} du/u = c \ln 2$. Для оценки $\widetilde{I}_1$ запишем его в виде

$$|\widetilde{I}_1| = \int_{|y-\sigma|>2h} \frac{d\sigma}{|y-\sigma|^{n-1+i\theta}} - \int_{\substack{h<|x-\sigma|<2h \\ |y-\sigma|>2h}} \frac{d\sigma}{|y-\sigma|^{n-1+i\theta}} = \widetilde{I}_1' + \widetilde{I}_1''.$$

Подобно случаю $\widetilde{I}_2$, имеем $|\widetilde{I}_1''| \le c \ln 2$. Итак, остаётся оценить $\widetilde{I}_1'$. В силу (1.3)

$$\widetilde{I}_1' = 2^{3-n} C_n \int_{2h}^{2} u^{-1+i\theta} \left[(4-u^2)^{(n-3)/2} - 2^{n-3}\right] du + C_n \int_{2h}^{2} u^{-1+i\theta}\, du = \widetilde{\widetilde{I}}_1' + \widetilde{\widetilde{I}}_1''.$$

Интеграл $\widetilde{\widetilde{I}}_1'$ сходится абсолютно ($n \ge 2$). Для $\widetilde{\widetilde{I}}_1''$ имеем $|\widetilde{\widetilde{I}}_1''(h)| \le (2C_n)/|\theta|$. Лемма 2.1 доказана.

Теорема 2.3. **Для** $f \in C(S_{n-1})$ **и** $\theta \in \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$ **имеет место следующая оценка Зигмунда :**

$$\omega(D^{i\theta} f, h) \le c \left(\int_0^h \frac{\omega(f,t)}{t}\, dt + h \int_h^2 \frac{\omega(f,t)}{t^2}\, dt \right). \tag{2.11}$$

Доказательство : Так как из (2.12) вытекает $\omega(D^{i\theta} f, h) \to 0$ при $h \to 0$, заключаем, что $D^{i\theta} f \in C(S_{n-1})$. Можно использовать представление (2.5) при $\alpha = i\theta$. Ясно, что оценки $|A_1|$ и $|A_2|$ сохраняются. Оценивая $|A_4|$ приходим к (2.9). Наконец, оценивая A_3 находим $|A_3| \le \omega(f,h)\,|I(h)|$. Применяя Лемму 2.1, получаем $|A_3| \le c\,\omega(f,h)$. Объединяя все оценки, с учётом (1.21) получим (2.11).

§3. СФЕРИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ $H^\omega(S_{n-1}, \rho)$

1°. Случай $0 < \mu < n-1$ **и** $0 \le \operatorname{Re}\alpha < 1$. Рассмотрим теперь весовые оценки типа Зигмунда для степенного веса $\rho(x) = |x-a|^\mu$. Как и выше, $|x-y| = h$ и, не умаляя общности предполагаем, что $|x-a| > |y-a|$. Для определённости положим $\psi(\sigma) = f(\sigma)\,\rho(\sigma)$ и предположим, что $\psi(a) = 0$, так что имеет место оценка $|\psi(\sigma)| \le \omega(\psi, |\sigma - a|)$.

Теорема 3.1. **Пусть** $\rho(x) = |x-a|^\mu$, $0 < \mu < n-1$ **и** $\rho(x)\, f(x) \in C(S_{n-1})$. **Если** $(\rho f)(a) = 0$, **то при** $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$ **имеет место следующая оценка типа Зигмунда :**

$$\omega(\rho K^\alpha f, h) \le c\, h^\nu \int_h^2 \frac{\omega(\rho f, t)}{t^{1-\operatorname{Re}\alpha+\nu}}\, dt, \quad \nu = \min(1, \mu). \tag{3.1}$$

Теорема 3.2. **Пусть** $\rho(x) = |x-a|^\mu$, $0 < \mu < n-1$ **и** $\rho(x)\, f(x) \in C(S_{n-1})$. **Если** $(\rho f)(a) = 0$, **то при** $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$ **имеет место следующая оценка типа Зигмунда :**

$$\omega(\rho D^\alpha f, h) \le c \left\{ \int_0^h \frac{\omega(\rho f, t)}{t^{1+\operatorname{Re}\alpha}}\, dt + h^\nu \int_h^2 \frac{\omega(\rho f, t)}{t^{1+\operatorname{Re}\alpha+\nu}}\, dt \right\}, \quad \nu = \min(1, \mu). \tag{3.2}$$

Замечание 3.1. В общем случае оценка (3.2) содержит два слагаемых. Однако, при $1 - \operatorname{Re}\alpha < \mu$ второй интеграл в (3.2) можно оценить через первый, так что оценка (3.2) аналогична той, которую мы имеем в безвесовом случае. Анализ доказательства Теоремы 3.2 показывает, что правая граница для μ может быть расширена за пределы $n-1$. В условиях Теоремы 3.2 имеем оценку

$$\omega(\rho D^\alpha f, h) \le c \int_0^h \frac{\omega(\rho f, t)}{t^{1+\operatorname{Re}\alpha}}\, dt, \quad 1 - \operatorname{Re}\alpha < \mu < n - 1 + \operatorname{Re}\alpha. \tag{3.3}$$

Действительно, при $1 - \mathrm{Re}\,\alpha < \mu$ с учётом почти убывания $\omega(f,t)/t$ второе слагаемое в (3.2) оценивается по $c\,\omega(f,h)\,h^{-\mathrm{Re}\,\alpha}$ и остаётся воспользоваться (1.21).

Доказательства Теорем 3.1 и 3.2 аналогичны доказательству весовых оценок типа Зигмунда для сферического гиперсингулярного оператора действительного порядка (см. [3]), но несколько видоизменяется случай оператора $D^{i\,\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$.

Теорема 3.3. Пусть $\rho(x) = |x-a|^{\mu}$, $0 < \mu < n-1$, и пусть $\rho(x)\,f(x) \in C(S_{n-1})$. Если $(\rho\,f)(a) = 0$, то для $\theta \in \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$ имеет место следующая оценка типа Зигмунда :

$$\omega(\rho\,D^{i\,\theta} f, h) \le c\left\{\int_0^h \frac{\omega(\rho\,f,t)}{t}\,dt + h^{\nu}\int_h^2 \frac{\omega(\rho\,f,t)}{t^{1+\nu}}\,dt\right\}, \quad \nu = \min(1,\mu). \tag{3.4}$$

Доказательство : Используя обозначение $\psi(x) = |x-a|^{\mu}\,f(x)$, имеем

$$\rho(x)(D^{i\,\theta} f)(x) = (D^{i\,\theta}\psi)(x) + g(x), \tag{3.5}$$

где

$$g(x) = \int_{S_{n-1}} \frac{|x-a|^{\mu} - |\sigma-a|^{\mu}}{|\sigma-a|^{\mu}\,|x-\sigma|^{n-1+i\,\theta}}\,\psi(\sigma)\,d\sigma. \tag{3.6}$$

Оценка модуля непрерывности оператора $(D^{i\,\theta}\psi)(x)$ получена для безвесового случая (см. Теорему 2.3). Остаётся оценить $\omega(g,h)$. Полагая

$$\Delta(x,\sigma) = \frac{|x-a|^{\mu} - |\sigma-a|^{\mu}}{|\sigma-a|^{\mu}\,|x-\sigma|^{n-1+i\,\theta}}, \tag{3.7}$$

представим $g(x) - g(y)$ в виде

$$\begin{aligned} g(x) - g(y) = &\int_{|x-\sigma|<2h} \Delta(x,\sigma)\,\psi(\sigma)\,d\sigma - \int_{|x-\sigma|<2h} \Delta(y,\sigma)\,\psi(\sigma)\,d\sigma + \\ &+ \int_{|x-\sigma|>2h} \{\Delta(x,\sigma) - \Delta(y,\sigma)\}\,\psi(\sigma)\,d\sigma = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Оценим теперь каждое слагаемое в (3.8).

а) Случай $1 \le \mu < n-1$. В силу (1.7) и (1.14) имеем

$$|\Delta(x,\sigma)| \le c\begin{cases} \dfrac{1}{|\sigma-a|\,|x-\sigma|^{n-2}} & \text{при} \quad |x-\sigma| \le |\sigma-a|, \\ \dfrac{1}{|\sigma-a|^{n-1}} & \text{при} \quad |x-\sigma| > |\sigma-a|, \end{cases} \tag{3.9}$$

и поэтому оценка в правой части (3.9) не зависит от μ.

При $|x-\sigma| \le |\sigma - a|$, с учётом (3.9), (1.4) и поскольку $\omega(f,t)/t$ почти убывает, имеем

$$|I_1| \le c \int_{\substack{|x-\sigma|<2h \\ |x-\sigma|<|\sigma-a|}} \frac{\omega(\psi, |\sigma-a|)}{|\sigma-a|\,|x-\sigma|^{n-2}}\,d\sigma \le c\int_0^h \frac{\omega(\psi,t)}{t}\,dt.$$

При $|x-\sigma| > |\sigma-a|$, в силу второго неравенства (3.9), $\{|\sigma-a|<|\sigma-x|<2h\} \subset \{|\sigma-a|<2h\}$ и (1.4), получаем

$$|I_1| \le c\int_{|\sigma-a|<2h} \frac{\omega(\psi,|\sigma-a|)}{|\sigma-a|^{n-1}}\,d\sigma \le c\int_0^h \frac{\omega(\psi,t)}{t}\,dt. \tag{3.10}$$

Аналогично I_1 оценивается и I_2. Перейдём к оценке I_3.

Сначала оценим $|\Delta(x,\sigma)-\Delta(y,\sigma)|$. Используя неравенства (1.7), (1.10), (1.12), простые оценки $|x-a| \le |x-\sigma|+|\sigma-a|$, $|y-\sigma|\le h+|x-\sigma|$ и предположение $|y-a|<|x-a|$, находим

$$|\Delta(x,\sigma)-\Delta(y,\sigma)| \le \frac{c\,h}{|\sigma-a|\,|x-\sigma|^{n-1}} + \frac{c\,h}{|\sigma-a|^{\mu}\,|x-\sigma|^{n-\mu}}. \tag{3.11}$$

Последнее неравенство перепишем по аналогии с (3.9) :

$$|\Delta(x,\sigma)-\Delta(y,\sigma)| \le c\,h \begin{cases} \dfrac{1}{|\sigma-a|\,|x-\sigma|^{n-1}} & \text{при} \quad |x-\sigma|\le|\sigma-a|, \\ \dfrac{1}{|\sigma-a|^{\mu}\,|x-\sigma|^{n-\mu}} & \text{при} \quad |x-\sigma|>|\sigma-a|. \end{cases} \tag{3.12}$$

Для I_3 при $|x-\sigma|<|\sigma-a|$, с учётом почти убывания $\omega(f,t)/t$ в (3.12) и (1.4), имеем

$$|I_3| \le c\,h\int_{|x-\sigma|>2h} \frac{\omega(\psi,|x-\sigma|)}{|x-\sigma|^n}\,d\sigma \le c\,h\int_h^2 \frac{\omega(\psi,u)}{u^2}\,du. \tag{3.13}$$

Если же $|x-\sigma|>|\sigma-a|$, то рассматриваем два возможных случая $\{|x-\sigma|>|\sigma-a|>2h\}$ и $\{|x-\sigma|>2h>|\sigma-a|\}$. В силу (3.12) имеем

$$|I_3| \le c\,h\int_{|a-\sigma|>2h} \frac{\omega(\psi,|\sigma-a|)}{|\sigma-a|^n}\,d\sigma + c\,h^{\mu-n+1}\,\omega(\psi,h)\int_{|\sigma-a|<2h} \frac{d\sigma}{|\sigma-a|^{\mu}}. \tag{3.14}$$

Отсюда с учётом (1.4) и условия $\mu<n-1$ легко получить (3.13).

Используя оценки для I_1, I_2 и I_3, получаем (3.4) при $1\le\mu<n-1$.

б) Случай $0<\mu\le 1$. В силу (1.7), (1.8)

$$|\Delta(x,\sigma)| \le \frac{c}{|\sigma-a|\,|x-\sigma|^{n-2}},$$

т.е. получаем правую часть (3.9) при $|x-\sigma|<|a-\sigma|$. То же самое выражение оценивается по $c\,|\sigma-a|^{1-n}$ как и в случае (3.9) при $|x-\sigma|>|a-\sigma|$. Следовательно, оценки $|I_1|$ и $|I_2|$ сохраняются. Чтобы оценить $|I_3|$ отметим, что с учётом (1.7), (1.8) и (1.12) имеем

$$|\Delta(x,\sigma)-\Delta(y,\sigma)|\le\frac{c\,h^{\mu}}{|\sigma-a|\,|x-\sigma|^{n-2+\mu}}. \tag{3.15}$$

Поскольку $\omega(f,t)/t$ почти убывает, из (3.15) и (1.4) при $|x-\sigma|<|a-\sigma|$ получаем

$$|I_3|\le c\,h^{\mu}\int_{|x-\sigma|>2h}\frac{\omega(\psi,|x-\sigma|)}{|x-\sigma|^{n-1+\mu}}\,d\sigma\le c\,h^{\mu}\int_h^2\frac{\omega(\psi,t)}{t^{1+\mu}}\,dt. \tag{3.16}$$

Аналогично, если $|x-\sigma|>|a-\sigma|$, то при $|x-\sigma|>|a-\sigma|>2\,h$ получаем

$$|I_3|\le c\,h^{\mu}\int_{|x-\sigma|>|a-\sigma|>2h}\frac{\omega(\psi,|\sigma-a|)}{|\sigma-a|^{n-1+\mu}}\,d\sigma\le c\,h^{\mu}\int_h^2\frac{\omega(\psi,t)}{t^{1+\mu}}\,dt.$$

Наконец, если $|x-\sigma|>2h>|\sigma-a|$, то правая часть (3.15) оценивается как $c\,h^{2-n}\,|\sigma-a|^{-1}$, и имеем

$$|I_3|\le c\,h^{2-n}\int_{|a-\sigma|<2h}\frac{\omega(\psi,|\sigma-a|)}{|\sigma-a|}\,d\sigma\le c\,\omega(\psi,h). \tag{3.17}$$

Собирая полученные выше оценки при $0<\mu\le 1$, в силу (1.21) получим (3.4). Теорема 3.3 доказана.

2°. Случай $\mu\ge n-1$ и $0<\mathrm{Re}\,\alpha<1$. Рассмотрим теперь случай "больших" μ ($\mu\ge n-1$). Рассуждая как и при доказательстве предыдущих теорем можно установить следующие утверждения.

Теорема 3.4. **Пусть $\rho(x)=|x-a|^{\mu}$, $n-1\le\mu<n-\mathrm{Re}\,\alpha$ и $\rho(x)\,f(x)\in C(S_{n-1})$, причём $(\rho\,f)(a)=0$. Тогда для $0<\mathrm{Re}\,\alpha<1$ имеет место следующая оценка типа Зигмунда :**

$$\omega(\rho\,K^{\alpha}f,h)\le c\,h\int_h^2\frac{\omega(\rho\,f,t)}{t^{2-\mathrm{Re}\alpha}}\,dt+h^{\mu+\mathrm{Re}\,\alpha-n+1}\int_0^h\frac{\omega(\rho\,f,t)}{t^{\mu-n+2}}\,dt. \tag{3.18}$$

Теорема 3.5. **Пусть $\rho(x)=|x-a|^{\mu}$, $n-1+\mathrm{Re}\,\alpha\le\mu<n$ и $\rho(x)\,f(x)\in C(S_{n-1})$, причём $(\rho\,f)(a)=0$. Тогда для $0<\mathrm{Re}\,\alpha<1$ имеет место следующая оценка типа Зигмунда :**

$$\omega(\rho\,D^{\alpha}f,h)\le c\,h^{\mu-\mathrm{Re}\,\alpha-n+1}\int_0^h\frac{\omega(\rho\,f,t)}{t^{\mu-n+2}}\,dt. \tag{3.19}$$

Ниже, в случае оператора сферической свёртки мнимого порядка, сравним оценки при "малых" и "больших" μ.

Пусть $f(x)\in H_0^{\lambda}(S_{n-1},\rho)$. Известно (см., например, [3]), что если $\lambda+\mathrm{Re}\,\alpha<1$, то первое слагаемое в правой части (3.18) оценивается как $c\,h^{\lambda+\mathrm{Re}\alpha}$. Аналогичная оценка для второго слагаемого в (3.18) будет выполнена при условии

$$\mu<n-1+\lambda. \tag{3.20}$$

Приходим к следующей лемме.

Лемма 3.1. **Пусть** $\rho(x) = |x-a|^\mu$, $n-1 \le \mu < n-1+\lambda$, $0 < \lambda, \mathrm{Re}\,\alpha < 1$ **и** $\lambda + \mathrm{Re}\,\alpha < 1$. **Если** $f \in H_0^\lambda(S_{n-1}, \rho)$, **то** $K^\alpha f \in H_0^{\lambda+\mathrm{Re}\,\alpha}(S_{n-1}, \rho)$.

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Лемма 3.2. **Пусть** $\rho(x) = |x-a|^\mu$ **и** $0 < \mathrm{Re} < \lambda < 1$. **Если** $1 \le \mu < n-1+\lambda$ **и** $f \in H_0^\lambda(S_{n-1}, \rho)$, **то** $D^\alpha f \in H_0^{\lambda-\mathrm{Re}\,\alpha}(S_{n-1}, \rho)$.

В случае $1 \le \mu < n-1+\mathrm{Re}\,\alpha$ можно использовать (3.3) и проверить, что в условиях Леммы 3.2 получим $\omega(\rho\, D^\alpha\, f, h) \le c\, h^{\lambda-\mathrm{Re}\,\alpha}$. В случае $n-1+\mathrm{Re}\,\alpha \le \mu < n-1+\lambda$ используем (3.19), где сходимость интеграла приводит к ограничению $\mu < n-1+\lambda$, а условие $\lambda - \mathrm{Re}\,\alpha > 0$ нужно для положительности степени в оценке $\omega(\rho\, D^\alpha\, f, h) \le c\, h^{\lambda-\mathrm{Re}\,\alpha}$.

3°. Случай $\mu \ge n-1$ **и** $\mathrm{Re}\,\alpha = 0$. При $\rho(x) = 1$ оценка Зигмунда Теоремы 2.3 похожа на оценку для сингулярного оператора.

Теорема 3.6. **Пусть** $\rho(x) = |x-a|^\mu$, $n-1 \le \mu < n$ **и** $\rho(x)\, f(x) \in C(S_{n-1})$, **причём** $(\rho\, f)(a) = 0$. **Тогда для** $\theta \in \mathbb{R}^1 \setminus \{O\}$ **имеет место следующая оценка типа Зигмунда :**

$$\omega(\rho\, D^{i\,\theta} f, h) \le c \left\{ h^{\mu-n+1} \int_0^h \frac{\omega(\rho\, f, t)}{t^{\mu-n+2}}\, dt + h \int_h^2 \frac{\omega(\rho\, f, t)}{t^2}\, dt \right\}. \tag{3.21}$$

Следствие 3.1. Пусть $\rho(x) = |x-a|^\mu$, $0 < \mu < n$ и $\max(0, \mu-n+1) < \lambda < \min(1, \mu)$. Тогда

$$D^{i\,\theta}(H_0^\lambda(S_{n-1}, \rho)) \subset H_0^\lambda(S_{n-1}, \rho). \tag{3.22}$$

Если $\mu < n-1$, то оценки (3.4) и (3.22) справедливы при $0 < \lambda < \min(1, \mu)$. При $\mu \ge n-1$ из условия $\mu - n + 1 - \lambda > 0$ следует сходимость первого интеграла в (3.21). Итак, приходим к (3.22).

4°. Поведение в окрестности весовой точки.

Теорема 3.7. **Пусть** $\rho(x) = |x-a|^\mu$ **и** $\rho(x)\, f(x) \in C(S_{n-1})$. **Если** $(\rho\, f)(a) = 0$, **то в условиях теорем настоящего параграфа, оценки Зигмунда можно дополнить соотношениями** $\lim\limits_{x \to a}(\rho K^\alpha\, f)(x) = 0$ **или** $\lim\limits_{x \to a}(\rho D^\alpha\, f)(x) = 0$, **соответственно.**

Доказательство : Рассмотрим Теорему 3.3 в чисто мнимом случае и покажем, что $\lim\limits_{x \to a}(\rho D^\alpha\, f)(x) = 0$. Можно считать, что $\rho(x)\, f(x) \in L_\infty(S_{n-1})$. Следовательно, функция в левой части равенства (3.5) непрерывна и непосредственная подстановка $x = 0$ даёт $(\rho\, D^{i\,\theta}\, f)(a) = 0$. Доказательство завершено.

В некоторых частных случаях Теорема 3.7 имеет место без предположения $(\rho f)(a) = 0$.

Теорема 3.8. **Если** $\rho(x) = |x-a|^{\mu}$, $0 < \mu < n-1$, $0 < \mathrm{Re}\,\alpha < 1$ **и** $\rho(x) f(x) \in C(S_{n-1})$, **то** $\lim\limits_{x \to a} (\rho K^{\alpha} f)(x) = 0$.

Доказательство Теоремы 3.8 предварим следующей леммой.

Лемма 3.3. **Пусть** $\xi < n-1$, $\eta < n-1$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$. **Тогда**

$$\int_{S_{n-1}} \frac{(|x-\sigma| + |y-\sigma|)^{\lambda}}{|x-\sigma|^{\xi}\,|y-\sigma|^{\eta}}\, d\sigma \le c \begin{cases} |x-y|^{-(\xi+\eta-\lambda-n+1)}, & \xi+\eta-\lambda > n-1, \\ \ln \dfrac{2}{|x-y|}, & \xi+\eta-\lambda = n-1, \\ 1, & \xi+\eta-\lambda < n-1, \end{cases} \tag{3.23}$$

$$\int_{S_{n-1}} \frac{(|x-\sigma| + |y-\sigma|)^{\lambda}}{|x-\sigma|^{\xi}\,|y-\sigma|^{\eta}}\, d\sigma \ge c_1 \begin{cases} |x-y|^{-(\xi+\eta-\lambda-n+1)}, & \xi+\eta-\lambda > n-1, \\ \ln \dfrac{2}{|x-y|}, & \xi+\eta-\lambda = n-1, \\ 1, & \xi+\eta-\lambda < n-1. \end{cases} \tag{3.24}$$

Доказательство : Доказательство (3.23) с помощью техники вращений можно найти в [13]. Здесь мы дадим прямое доказательство для обеих оценок (3.23), (3.24). Для этого рассмотрим следующее представление :

$$I = I_1 + I_2 + I_3 =$$

$$= \left(\int_{|x-\sigma|<|x-y|/2} + \int_{|x-y|/2<|x-\sigma|<2\,|x-y|} + \int_{|x-\sigma|>2\,|x-y|} \right) \frac{(|x-\sigma| + |y-\sigma|)^{\lambda}}{|x-\sigma|^{\xi}\,|y-\sigma|^{\eta}}\, d\sigma.$$

a) Пусть $\mathcal{I}_1 = \{\sigma : |x-\sigma| < \dfrac{|x-y|}{2}\}$. Легко проверить, что $|x-y| \le 2\,|y-\sigma| \le 3\,|x-y|$, и для любого λ имеем

$$(|x-\sigma| + |y-\sigma|)^{\lambda} \le c\,|x-y|^{\lambda}. \tag{3.25}$$

Следовательно

$$I_1 \le c\,|x-y|^{\lambda-\eta} \int_{|x-\sigma|<|x-y|/2} \frac{d\sigma}{|x-\sigma|^{\xi}} \le c\,|x-y|^{-(\xi+\eta-\lambda-n+1)}. \tag{3.26}$$

b) Пусть $\mathcal{I}_2 = \{\sigma : \dfrac{|x-y|}{2} < |x-\sigma| < 2|x-y|\}$. Тогда $|y-\sigma| \le 3\,|x-y|$ и поэтому имеет место (3.25), что приводит к оценке для I_2, аналогичной оценке для I_1.

c) Наконец, пусть $\mathcal{I}_3 = \{\sigma\colon |x-\sigma| > 2\,|x-y|\}$. Тогда $|x-\sigma| \le 2\,|y-\sigma| \le 3\,|x-\sigma|$ и для любого λ имеем $c_1\,|x-\sigma|^{\lambda} \le (|x-\sigma| + |y-\sigma|)^{\lambda} \le c\,|x-\sigma|^{\lambda}$. Следовательно

$$\begin{aligned} & c_1 \int_{|x-\sigma|>2\,|x-y|} |x-\sigma|^{-(\xi+\eta-\lambda-n+2)}\, d\sigma \le I_3 \le \\ & \le c \int_{|x-\sigma|>2\,|x-y|} |x-\sigma|^{-(\xi+\eta-\lambda-n+2)}\, d\sigma. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Вычисление интеграла с учётом значений параметра $-(\xi+\eta-\lambda-n+2)$ приводит к оценкам (3.23), (3.24). Доказательство завершено.

Заметим, что оценка сверху модуля интеграла в левой части (3.23) верна и для комплексных значений параметров с естественной заменой в правой части этой оценки параметров ξ, η и λ на $\operatorname{Re}\xi$, $\operatorname{Re}\eta$ и $\operatorname{Re}\lambda$, соответственно. То же самое утверждение имеет место и для оценки снизу, в случае, когда $\operatorname{Re}\xi+\operatorname{Re}\eta-\operatorname{Re}\lambda<n-1$.

Доказательство Теоремы 3.8 : Из (3.23) следует, что для произвольного $\varepsilon>0$ имеем $(\rho K^\alpha f)(x)|\le c\,||\rho f||_{C(S_{n-1})}\,|x-a|^{\min(\mu,\operatorname{Re}\alpha)-\varepsilon}$. Доказательство завершено.

§4. СЛУЧАЙ ОБЩЕГО ВЕСА

Напомним, что в случае веса в одной точке, мы оцениваем модуль непрерывности выражения

$$g(x)=\int_{S_{n-1}}\frac{a(x,\sigma)\,\psi(\sigma)}{|x-\sigma|^\gamma}\,d\sigma,\qquad a(x,\sigma)=\frac{|x-a|^\mu}{|\sigma-a|^\mu}-1,\tag{4.1}$$

где $\gamma=n-1-\alpha$ в случае оператора сферического потенциала. При рассмотрении общего степенного веса можно применить принцип разделения особенностей. Чтобы проиллюстрировать его рассмотрим случай, когда степенной вес имеется в двух точках. Пусть $\rho(x)=\rho_1(x)\,\rho_2(x)$, где $\rho_1(x)=|x-a|^{\mu_1}$, $\rho_2(x)=|x-b|^{\mu_2}$. Положим $a(x,\sigma)=\rho_1(x)\,\rho_1^{-1}(\sigma)-1$, $b(x,\sigma)=\rho_2(x)\,\rho_2^{-1}(\sigma)-1$ и как обычно $\psi(x)=\rho(x)\,f(x)$. В этих обозначениях имеем

$$\rho_1(x)\,\rho_2(x)\,(Kf)(x)=\int_{S_{n-1}}\frac{a(x,\sigma)\,b(x,\sigma)}{|x-\sigma|^\gamma}\,\psi(\sigma)\,d\sigma+\int_{S_{n-1}}\frac{a(x,\sigma)}{|x-\sigma|^\gamma}\,\psi(\sigma)\,d\sigma+$$
$$+\int_{S_{n-1}}\frac{b(x,\sigma)}{|x-\sigma|^\gamma}\,\psi(\sigma)\,d\sigma+\int_{S_{n-1}}\frac{\psi(\sigma)}{|x-\sigma|^\gamma}\,d\sigma=A_1+A_2+A_3+A_4.$$

Оценки для модуля непрерывности слагаемых A_2, A_3, A_4 уже даны ранее. Аналогичная оценка для A_1 может быть получена с помощью методов предыдущих параграфов. Сформулируем один результат в случае "малого" общего веса.

Теорема 4.1. Для $\rho(x)=\prod_{k=1}^{m}|x-a_k|^{\mu_k}$, $0<\mu_1,\mu_2,...,\mu_m<n-1$, $\nu=\min(\mu_1,\mu_2,...,\mu_m,1)$, $(\rho f)(x)\in C(S_{n-1})$ и $(\rho f)(a_k)=0$, $k=1,2,...,m$ **справедливы оценки типа Зигмунда**

$$\omega(\rho K^\alpha f,h)\le c\,h^\nu\int_h^2\frac{\omega(\rho f,t)}{t^{1-\operatorname{Re}\alpha+\nu}}\,dt,\tag{4.2}$$

$$\omega(\rho D^\alpha f,h)\le c\left\{\int_0^h\frac{\omega(\rho f,t)}{t^{1+\operatorname{Re}\alpha}}\,dt+h^\nu\int_h^2\frac{\omega(\rho f,t)}{t^{1+\operatorname{Re}\alpha+\nu}}\,dt\right\}.\tag{4.3}$$

§5. МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ СФЕРИЧЕСКИХ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ КОМПЛЕКСНЫХ ПОРЯДКОВ

Пусть $\mathcal{P}_m(t)$ – полиномы Лежандра, определяемые по формуле Родрига в виде (см. [8])

$$\mathcal{P}_m(t) = \left(-\frac{1}{2}\right)^m \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(m+\frac{n-1}{2}\right)} (1-t^2)^{(3-n)/2} \frac{d^m}{dt^m}(1-t^2)^{m+(n-3)/2}. \tag{5.1}$$

Очевидно, что $\mathcal{P}_0(t) \equiv 1$, $\mathcal{P}_1(t) \equiv t$, $\mathcal{P}_2(t) = \frac{n}{n-1}(t^2-1)+1$ и $\mathcal{P}_m(1) \equiv 1$ для всех $m \in \mathbb{Z}_+$. Обозначим

$$C_n(\alpha) = \frac{2^{(3-n+\alpha)/2}\,\Gamma\left(\frac{n-1+\alpha}{2}\right)}{\Gamma(-\alpha/2)\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}, \tag{5.2}$$

$$A_m(\alpha) = C_n(\alpha)\int_{-1}^{1}(1-t)^{-(\alpha+2)/2}(1+t)^{(n-3)/2}\left[\mathcal{P}_m(t)-1\right]dt. \tag{5.3}$$

Как показано в [7], для $0<\alpha<2$ имеем

$$A_m(\alpha) = \frac{\Gamma\left(m+\frac{n-1+\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(m+\frac{n-1-\alpha}{2}\right)} - \frac{\Gamma\left(\frac{n-1+\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1-\alpha}{2}\right)}. \tag{5.4}$$

Из (5.3) и (5.4) следует, что $C_n(\alpha)$, $A_m(\alpha)$ и правая часть в (5.4) имеют смысл при всех α, удовлетворяющих условиям

$$\alpha \neq 0, -2, -4, \dots, \qquad \operatorname{Re}\alpha < 2. \tag{5.5}$$

Для доказательства этого утверждения выведем одно рекуррентное соотношение.

Лемма 5.1. Пусть α удовлетворяет условию (5.5). Тогда

$$A_{m+1}(\alpha) = A_m(\alpha) + \alpha\left(m+\frac{\alpha+n-3}{2}\right)\left[A_m(\alpha-2) + \frac{\Gamma\left(\frac{n-3+\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1-\alpha}{2}\right)}\right]. \tag{5.6}$$

Доказательство : Если α удовлетворяет условию (5.5), то $A_m(\alpha)$ корректно определена. Рассмотрим разность

$$A_{m+1}(\alpha) - A_m(\alpha) = C_n(\alpha)\int_{-1}^{1}(1-t)^{-(\alpha+2)/2}(1+t)^{(n-3)/2}\left[\mathcal{P}_{m+1}(t)-\mathcal{P}_m(t)\right]dt. \tag{5.7}$$

Используя определение $\mathcal{P}_m(t)$, получаем

$$\mathcal{P}_{m+1}(t)-\mathcal{P}_m(t)=$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^m \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(m+\frac{n-1}{2}\right)}(1-t^2)^{(3-n)/2}\frac{d^m}{dt^m}\left[t\,(1-t^2)^{m+(n-3)/2}\right]-\mathcal{P}_m(t)=$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^m \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(m+\frac{n-1}{2}\right)}(1-t^2)^{(3-n)/2}\frac{d^m}{dt^m}\left[(t-1)\,(1-t^2)^{m+(n-3)/2}\right]. \tag{5.8}$$

Дифференцируя правую часть (5.8) и подставляя в (5.7), находим

$$A_{m+1}(\alpha)-A_m(\alpha)=-C_n(\alpha)\int_{-1}^{1}(1-t)^{-\alpha/2}\,(1+t)^{(n-3)/2}\,\mathcal{P}_m(t)\,dt+m\,C_n(\alpha)\times$$
$$\times\left(-\frac{1}{2}\right)^m \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(m+\frac{n-1}{2}\right)}\int_{-1}^{1}(1-t)^{-\alpha/2+(1-n)/2}\,\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}\,(1-t^2)^{m+(n-3)/2}\,dt.$$

Интегрируя по частям

$$A_{m+1}(\alpha)-A_m(\alpha)=-C_n(\alpha)\frac{m+\dfrac{\alpha+n-3}{2}}{\dfrac{\alpha+n-3}{2}}\int_{-1}^{1}(1-t)^{-\alpha/2}\,(1+t)^{(n-3)/2}\,\mathcal{P}_m(t)\,dt. \tag{5.9}$$

Используя (5.3), приходим к (5.6). Лемма 5.1 доказана.

Лемма 5.2. Если α удовлетворяет (5.5), то для $A_m(\alpha)$ справедливо соотношение (5.4).

Доказательство : следует из (5.6).

Следствие 5.1. При $\alpha\neq 0$ и $0\leq \operatorname{Re}\alpha<2$, для операторов (0.3) справедливы соотношения (0.4).

§6. ДЕЙСТВИЕ ОПЕРАТОРОВ K^α, D^α И $D^{i\theta}$

В этом параграфе $\rho(x)=|x-a|^\mu$ и

$$\omega_\alpha(t)=t^{\operatorname{Re}\alpha}\,\omega(t),\qquad \omega_{-\alpha}(t)=t^{-\operatorname{Re}\alpha}\,\omega(t). \tag{6.1}$$

1°. Случай $0<\operatorname{Re}\alpha<1$.

Теорема 6.1. Для $\omega\in\Phi_{1-\operatorname{Re}\alpha}$ оператор K^α, действующий из $H^\omega(S_{n-1})$ в $H^{\omega_\alpha}(S_{n-1})$, ограничен.

Теорема 6.2. **Для** $\omega \in \Phi^{\mathrm{Re}\,\alpha}$ **оператор** D^{α}**, действующий из** $H^{\omega}(S_{n-1})$ **в** $H^{\omega-\alpha}(S_{n-1})$**, ограничен.**

Доказательства этих теорем аналогичны приводимым ниже их весовым аналогам.

Теорема 6.3. **Для** $\mathrm{Re}\,\alpha < \nu = \min(1,\mu)$ **и** $\omega \in \Phi_{\nu-\mathrm{Re}\,\alpha}$ **оператор** K^{α}**, действующий из** $H_0^{\omega}(S_{n-1},\rho)$ **в** $H_0^{\omega_\alpha}(S_{n-1},\rho)$**, ограничен.**

Доказательство : Нам нужно доказать, что $\dfrac{\omega(\rho K^{\alpha} f, h)}{h^{\mathrm{Re}\,\alpha}\,\omega(h)} \le c < \infty$. Так как $f \in H_0^{\omega}(S_{n-1},\rho)$, $\omega \in \Phi_{\nu-\mathrm{Re}\,\alpha}$, то в силу (3.1) получаем

$$\frac{\omega(\rho K^{\alpha} f, h)}{h^{\mathrm{Re}\,\alpha}\,\omega(h)} \le \frac{c\,\|\rho f\|_{H_0^{\omega}(S_{n-1},\rho)}}{\omega(h)} \int_h^2 \left(\frac{h}{t}\right)^{\nu-\mathrm{Re}\,\alpha} \frac{\omega(t)}{t}\,dt \le c\,\|f\|_{H_0^{\omega}(S_{n-1},\rho)}.$$

Следовательно, $\|K^{\alpha} f\|_{H_0^{\omega_\alpha}(S_{n-1},\rho)} \le c\,\|f\|_{H_0^{\omega}(S_{n-1},\rho)}$. Доказательство завершено.

Теорема 6.4. **Для** $1-\mathrm{Re}\,\alpha < \mu < n-1+\mathrm{Re}\,\alpha$ **и** $\omega \in \Phi^{\mathrm{Re}\,\alpha}$ **оператор** D^{α}**, действующий из** $H_0^{\omega}(S_{n-1},\rho)$ **в** $H_0^{\omega-\alpha}(S_{n-1},\rho)$**, ограничен.**

Доказательство : Используя (3.2) при $1-\mathrm{Re}\,\alpha < \mu < n-1+\mathrm{Re}\,\alpha$ и $\rho f \in H_0^{\omega}(S_{n-1})$, $\omega \in \Phi^{\mathrm{Re}\,\alpha}$, получаем

$$\frac{h^{\mathrm{Re}\,\alpha}\,\omega(\rho D^{\alpha} f, h)}{\omega(h)} \le \frac{c}{\omega(h)} \int_0^h \left(\frac{h}{t}\right)^{\mathrm{Re}\,\alpha} \frac{\omega(\rho f, t)}{t}\,dt \le c\,\|\rho f\|_{H_0^{\omega}(S_{n-1})}.$$

Отсюда получаем $\|D^{\alpha} f\|_{H_0^{\omega-\alpha}(S_{n-1},\rho)} \le c\,\|f\|_{H_0^{\omega}(S_{n-1},\rho)}$. Доказательство завершено.

Аналогично можно доказать следующее утверждение.

Теорема 6.5. **Для** $0 < \mu \le 1-\mathrm{Re}\,\alpha$ **и** $\omega \in \Phi^{\mathrm{Re}\,\alpha}_{\mu+\mathrm{Re}\,\alpha}$ **оператор** D^{α}**, действующий из** $H_0^{\omega}(S_{n-1},\rho)$ **в** $H_0^{\omega-\alpha}(S_{n-1},\rho)$**, ограничен.**

2°. Случай $\mathrm{Re}\,\alpha = 0$**.**

Теорема 6.6. **Для** $0 < \mu < n$, $\omega \in \Phi_{\nu}^{\eta}$, $\eta = \max(0,\mu-n+1)$, $\nu = \min(1,\mu)$ **оператор** $D^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}^1 \setminus \{O\}$**, действующий из** $H_0^{\omega}(S_{n-1},\rho)$ **в себя, ограничен.**

Доказательство : Используя Теоремы 3.3, 3.6 и свойства класса Φ_{ν}^{0} получаем $\omega(\rho D^{i\theta} f, h) \le c\,\omega(h)\,\|f\|_{H_0^{\omega}(S_{n-1},\rho)}$. Доказательство завершено.

Следствие 6.1. **Для** $f(t) \in H^{\lambda}(S_{n-1})$ $(\mathrm{h}^{\lambda}(S_{n-1}))$, $\lambda \in (0,1)$ **и любого** $\theta \in \mathbb{R}^1 \setminus \{O\}$ **имеем** $D^{i\theta} f \in H^{\lambda}(S_{n-1})$ $(\mathrm{h}^{\lambda}(S_{n-1}))$.

Первое утверждение этого следствия очевидно, а второе докажем сразу для более общих, а не только степенных характеристик.

Следствие 6.2. Для $f(t) \in \mathrm{h}^{\omega}(S_{n-1})$, $\omega \in \Phi_1^0$ и любых $\theta \in \mathbb{R}^1 \setminus \{O\}$ имеем $D^{i\theta} f \in \mathrm{h}^{\omega}(S_{n-1})$.

Доказательство : Используем вместо (2.11) эквивалентную запись

$$\omega(D^{i\theta} f, h) \leq c\, h \int_0^2 \frac{\omega(f,t)}{t\,(t+h)}\, dt. \tag{6.2}$$

Мы должны показать, что из $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\omega(f,h)}{\omega(h)} = 0$ следует $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\omega(D^{i\theta} f,h)}{\omega(h)} = 0$. Из (6.2) имеем

$$\frac{\omega(D^{i\theta} f, h)}{\omega(h)} \leq c \int_0^{2/h} g(h,\xi)\, d\xi, \qquad g(h,\xi) = \frac{\omega(f, h\xi)}{\omega(h)\,\xi\,(\xi+1)}. \tag{6.3}$$

Очевидно $g(h,\xi) \to 0$ при $h \to 0$ для каждого фиксированного ξ. Так как $\omega \in \Phi_1^0$, то из Свойства 1.3 следует, что существуют $0 < \delta < 1$ и $0 < \varepsilon < 1$ такие, что $\omega(t)/t^{\delta}$ почти возрастает, а $\omega(t)/t^{1-\varepsilon}$ почти убывает. Следовательно, $\omega(h\xi)/\omega(h) \leq c\xi^{\delta}$ при $\xi \leq 1$ и $\omega(h\xi)/\omega(h) \leq c\xi^{1-\varepsilon}$ для $\xi \geq 1$. Но тогда $|g(h,\xi)| \leq \dfrac{c}{\xi^{1-\delta}\,(\xi+1)} \|f\|_{\mathrm{h}^{\omega}(S_{n-1})}$ для $\xi \leq 1$ и $|g(h,\xi)| \leq \dfrac{c}{\xi^{\varepsilon}\,(\xi+1)} \|f\|_{\mathrm{h}^{\omega}(S_{n-1})}$ для $\xi \geq 1$, т.е. $|g(h,\xi)| \in L_1(0,\infty)$. Остаётся в (6.3) применить мажорантную теорему Лебега. Доказательство завершено.

Следующая теорема является одним из основных результатов работы.

Теорема 6.7. Для $\lambda \in (0,1)$ и $\theta \in \mathbb{R}^1 \setminus \{O\}$ оператор $\mathcal{D}^{i\theta}$ обратим в пространствах $H^{\lambda}(S_{n-1})$ и $\mathrm{h}^{\lambda}(S_{n-1})$, т.е.

$$\mathcal{D}^{\pm i\theta}(H^{\lambda}(S_{n-1})) = H^{\lambda}(S_{n-1}), \qquad \mathcal{D}^{\pm i\theta}(\mathrm{h}^{\lambda}(S_{n-1})) = \mathrm{h}^{\lambda}(S_{n-1}). \tag{6.4}$$

Доказательство : На основе Следствия 6.1 имеем $\mathcal{D}^{\pm i\theta}(H^{\lambda}(S_{n-1})) \subset H^{\lambda}(S_{n-1})$ и аналогичное соотношение для $\mathrm{h}^{\lambda}(S_{n-1})$. Мы должны доказать, что (5.10) имеет место для $f \in H^{\lambda}(S_{n-1})$. Заметим, что в силу Следствий 5.1 и 6.1 оператор $\mathcal{D}^{\pm i\theta}$ ограничен и в $H^{\lambda}(S_{n-1})$ и в $\mathrm{h}^{\lambda}(S_{n-1})$. Так как $H^{\lambda}(S_{n-1}) \subset \mathrm{h}^{\lambda-\varepsilon}(S_{n-1})$, то достаточно проверить, что (0.4) имеет место для $\mathrm{h}^{\lambda-\varepsilon}(S_{n-1})$. Множество $C^{\infty}(S_{n-1})$ плотно в $\mathrm{h}^{\lambda-\varepsilon}(S_{n-1})$. Так как оператор $\mathcal{D}^{\pm i\theta}$ ограничен на $\mathrm{h}^{\lambda-\varepsilon}(S_{n-1})$ и в $C^{\infty}(S_{n-1})$ имеет место (0.4), то $f \in H^{\lambda}(S_{n-1})$. Теорема 6.7 доказана.

Отметим, что аналогичные теоремы имеют место для безвесовых обобщённых гёльдеровских пространств и для весовых пространств и операторов комплексных порядков. Приведём без доказательства теоремы для общего веса $\rho(x) = \prod\limits_{k=1}^{m} |x - x_k|^{\mu_k}$.

Теорема 6.8. **Для** $\omega \in \Phi_{\nu-\mathrm{Re}\,\alpha}$, $\nu = \min(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m, 1)$ **и** $\mathrm{Re}\,\alpha < \nu < n-1$ **оператор** K^α, **действующий из** $H_0^\omega(S_{n-1}, \rho)$ **в** $H_0^{\omega_\alpha}(S_{n-1}, \rho)$, **ограничен.**

Теорема 6.9. **Для** $\omega \in \Phi^{\mathrm{Re}\,\alpha}$ **и** $1 - \mathrm{Re}\,\alpha < \mu_1, \mu_2, ..., \mu_m < n-1$ **оператор** D^α, **действующий из** $H_0^\omega(S_{n-1}, \rho)$ **в** $H_0^{\omega_{-\alpha}}(S_{n-1}, \rho)$, **ограничен.**

Теорема 6.10. **Для** $\omega \in \Phi^{\nu+\mathrm{Re}\,\alpha}$, $0 < \mu_1, \mu_2, ..., \mu_m \le 1 - \mathrm{Re}\,\alpha$ **и** $\nu = \min(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m, 1)$ **оператор** D^α, **действующий из** $H_0^\omega(S_{n-1}, \rho)$ **в** $H_0^{\omega_{-\alpha}}(S_{n-1}, \rho)$, **ограничен.**

3°. Необходимые условия. Возникает вопрос насколько условия вышеприведённых теорем являются необходимыми. Здесь даётся ответ на этот вопрос в случае обычных гёльдеровских пространств и операторов действительных порядков.

Теорема 6.11. **Для** $0 < \alpha, \lambda, \lambda+\alpha < 1$ **и** $\rho(x) = |x-a|^\mu$, $0 < \mu < n-\alpha$, **оператор** K^α **действует из** $H_0^\lambda(S_{n-1}, \rho)$ **в** $H_0^{\lambda+\alpha}(S_{n-1}, \rho)$ **тогда и только тогда, когда**

$$\max(0, \mu - n + 1) < \lambda < \min(1, \mu) - \alpha. \tag{6.5}$$

Доказательство : Достаточность следует из оценки типа Зигмунда, если в Теоремах 3.1 и 3.4 положить $\omega(t) = t^\lambda$. Теперь докажем достаточность.

a) Предположим, что $0 < \lambda \le \mu - n + 1$. Тогда для $f(\sigma) = |\sigma - a|^{\lambda-\mu} \in H_0^\lambda(S_{n-1}, \rho)$ и для всех $x \in S_{n-1}$ имеем

$$(\rho K^\alpha f)(x) = |x-a|^\mu \int_{S_{n-1}} \frac{|\sigma - a|^{\lambda-\mu}}{|x-\sigma|^{n-1-\alpha}} d\sigma = \infty.$$

b) Теперь предположим, что $\mu - \alpha \le \lambda < 1$. Положим $f(\sigma) = |\sigma - a|^{\lambda-\mu} \in H_0^\lambda(S_{n-1}, \rho)$. Тогда используя $(\rho K^\alpha f)(a) = 0$, получаем

$$c\,|x-a|^{\lambda+\alpha} \ge |(\rho K^\alpha f)(x)| = |x-a|^\mu \int_{S_{n-1}} \frac{|\sigma - a|^{\lambda-\mu}}{|x-\sigma|^{n-1-\alpha}} d\sigma \ge c_1\,|x-a|^\mu,$$

что невозможно. Здесь использовано второе утверждение Леммы 3.3 для чисел $\xi = \mu - \lambda$ и $\eta = n - 1 - \alpha$. Теорема 6.11 доказана.

Отметим, что условия (6.5) естественно записать в виде условий на показатель веса. В таком случае они принимают вид

$$\lambda + \alpha < \mu < \lambda + n - 1. \tag{6.6}$$

4°. Поведение по θ. Рассмотрим поведение операторов $D^{\pm i\theta}$ по θ.

Лемма 6.1. Если $f \in H^\lambda(S_{n-1})$, $0 < \lambda < 1$, то $|(D^{i\theta} f)(x)| \le c\,|\theta| \to 0$ при $\theta \to 0$.

Доказательство : Заметим, что $|\theta\,\gamma_{n-1}(i\theta)| \ge c$. Следовательно, получаем $|(D^{i\theta} f)(x)| \le c\,|\theta|\,||f||_{H^\lambda(S_{n-1})}$.

Лемма 6.2. (ср. с [5] при $\mathrm{Re}\,\alpha = 0$ и с [11] при $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$). Если $f \in H^\lambda(S_{n-1})$, $0 < \lambda < 1$, то для любого $0 < \varepsilon < \lambda$ имеем

$$||D^{\pm i\theta} f||_{H^{\lambda-\varepsilon}(S_{n-1})} \le c\,|\theta|\,||f||_{H^\lambda(S_{n-1})} \to 0 \quad \text{при} \quad \theta \to 0, \tag{6.7}$$

$$||(\mathcal{D}^{\pm i\theta} f)(x) - f(x)||_{H^{\lambda-\varepsilon}(S_{n-1})} \le c\,|\theta|\,||f||_{H^\lambda(S_{n-1})} \to 0 \quad \text{при} \quad \theta \to 0. \tag{6.8}$$

Доказательство : Так как $\mathcal{D}^{\pm i,\theta} f - f = (b_n(\mp i\theta) - 1) f$ и $|b_n(\mp i\theta) - 1| \le c\,|\theta|$, то (6.8) вытекает из (6.7). Отметим, что в (6.7) множитель $c\,|\theta|$ появляется от нормировочной постоянной (см. Лемму 6.1). Поэтому достаточно доказать, что постоянная в оценке Зигмунда в Теореме 2.3 не зависит от θ. Такая зависимость может возникнуть только при оценке слагаемого A_3 в выражении $\tilde{\tilde{I}}_1''$ в Лемме 2.1. Для каждого θ этот интеграл имеет поведение $c\,|\ln h|$.
Наконец, заметим, что согласно оценке (2.1) Теоремы 2.1 для $f \in C(S_{n-1})$ имеем $\omega(K^\alpha f, h) \le c\,\omega(f, h) \to 0$ при $h \to 0$, $K^\alpha(C) \subset C$ и $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$.

§7. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПЛОТНЫЕ МНОЖЕСТВА В $\mathbf{h}^\lambda$

1°. Ограниченность. Здесь мы докажем, что из некоторых предположений ограниченности в пространстве H^λ следует ограниченность в $\mathbf{h}^\lambda$. Рассмотрим только пространства Гёльдера на отрезке $[0, 1]$ и используем следующие обозначения :

$$N_f(\delta) = \sup_{\substack{x,h\\|h|<\delta}} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|^\lambda}, \qquad N_f = N_f(1). \tag{7.1}$$

Поэтому если $\lim\limits_{\delta\to 0} N_f(\delta) = 0$, то $||f||_\lambda = ||f||_{C[0,1]} + N_f$ и $f \in \mathbf{h}^\lambda[0, 1]$.

Лемма 7.1. Для $f \in \mathbf{h}^\lambda[0, 1]$, $g \in \mathbf{h}^\eta[0, 1]$ и $\lambda \le \eta \le 1$ имеем

$$N_f(\delta) \le \delta^{\eta-\lambda}\,||g||_\eta + ||f - g||_\lambda. \tag{7.2}$$

Доказательство : следует из $N_f(\delta) \le ||f||_\lambda$ и из неравенства треугольника $N_f(\delta) \le N_g(\delta) + N_{f-g}(\delta)$.

Следствие 7.1. Пусть $f \in H^\lambda[0, 1]$, $f_m \in H^\eta[0, 1]$, $\eta > \lambda$ и $\lim\limits_{m\to\infty} ||f_m - f||_\lambda = 0$. Тогда $f \in \mathbf{h}^\lambda[0, 1]$.

Для доказательства достаточно взять в (7.2) $g = f_m$.

Лемма 7.2. Пусть A – ограниченный линейный оператор, отображающий $H^{\lambda_1}([0,1],\rho)$ в $H^{\mu_1}([0,1],\rho)$ и $H^{\lambda_2}([0,1],\rho)$ в $H^{\mu_2}([0,1],\rho)$, $\lambda_1 < \lambda_2$, $\mu_1 < \mu_2$. Тогда A отображает $\mathbf{h}^{\lambda_1}([0,1],\rho)$ в $\mathbf{h}^{\mu_1}([0,1],\rho)$.

Доказательство : Для простоты рассмотрим случай, когда вес отсутствует. Рассуждая как и в (7.2), получаем

$$N_{Af}(\delta) \le \delta^{\mu_2-\mu_1}\,||A\,f_m||_{\mu_2} + ||f-f_m||_{\lambda_1} \le c\,\delta^{\mu_2-\mu_1}\,||f_m||_{\lambda_2} + ||f-f_m||_{\lambda_1}.$$

Осталось приблизить f функциями $f_m \in C^\infty(\subset H^{\lambda_2}[0,1])$ так, что $||f-f_m||_{\lambda_1} \to 0$, и оценить слагаемое $c\,\delta^{\mu_2-\mu_1}\,||f_m||_{\lambda_2}$.

Следствие 7.2. Пусть A – ограниченный линейный оператор в $H^\lambda([0,1])$ и в $H^\mu([0,1])$, $\mu > \lambda$. Тогда оператор A ограничен в $\mathbf{h}^\lambda[0,1]$.

2°. Специальные плотные множества в $\mathbf{h}^\lambda[0,1]$ и $\mathbf{h}^\lambda_0[0,1]$. Известно, что $C^k[0,1]$, $1 \le k \le \infty$ плотны в $\mathbf{h}^\lambda[0,1]$, $0 < \lambda \le 1$. Введём для удобства класс

$$C^k_{0,m}[0,1] = \{f \in C^k[0,1]\colon f(x) = 0, x \in (0,1/m)\}, \qquad 1 \le k \le \infty. \tag{7.3}$$

Лемма 7.3, [6]. Если $f \in \mathbf{h}^\lambda_0[0,1]$, то существует последовательность $f_m \in C^k_{0,m}[0,1]$ такая, что $\lim\limits_{m\to\infty} ||f-f_m||_\lambda = 0$.

Лемма 7.4. Пусть $\rho(x) = x^\mu$ и $f \in \mathbf{h}^\lambda_0([0,1],\rho)$. Тогда существует последовательность $f_m(x) \in C^\infty_{0,m}[0,1]$ такая, что

$$||f-f_m||_{\lambda,\rho} = ||\rho(f-f_m)||_\lambda \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Доказательство : Действительно, если $f \in \mathbf{h}^\lambda_0([0,1],\rho)$, то $\rho f \in \mathbf{h}^\lambda_0[0,1]$ и по Лемме 7.3 существует последовательность $u_m \in C^\infty_{0,m}[0,1]$ такая, что $||\rho f - u_m||_\lambda \to 0$ при $m \to \infty$. Положим в этом случае $f_m = \rho^{-1}u_m$. Ясно, что для любого m имеем $\rho^{-1} \in C^\infty[1/m,1]$. Следовательно, $f_m \in C^\infty_{0,m}[0,1]$ (так как u_m финитна в окрестности точки $x = 0$). Лемма 7.4 доказана.

Следствие 7.3. Пусть $\rho(x) = x^\mu$ и $\psi \in h^\lambda_0[0,1]$. Тогда существует $f_m \in C^\infty_{0,m}[0,1]$ такая, что $||\psi - \rho f_m||_\lambda \to 0$ при $m \to \infty$ (для этого достаточно взять $f_m = \rho^{-1}u_m$). Покажем, как Леммы 7.3, 7.4 применяются при доказательстве изоморфизма в случае $\operatorname{Re}\alpha = 0$. В этом случае

$$A\,B\,f = f, \qquad f \in C^\infty_0[0,1], \tag{7.4}$$

где A, B ограничены во всех $H_0^\lambda[0,1]$ (и поэтому, во всех $\mathrm{h}_0^\lambda[0,1]$, см. Следствие 7.2). Рассмотрим (7.4) в $\mathrm{h}_0^{\lambda-\epsilon}[0,1]$. Так как $C_0^\infty[0,1]$ плотно в $\mathrm{h}_0^{\lambda-\epsilon}[0,1]$, то (7.4) имеет место в $\mathrm{h}_0^{\lambda-\epsilon}[0,1]$, и так как $H_0^\lambda[0,1] \subset \mathrm{h}_0^{\lambda-\epsilon}[0,1]$, даже в $H_0^\lambda[0,1]$.

В весовом случае имеем (7.4) и ограниченность операторов $A_\rho = \rho A \rho^{-1}$, $B_\rho = \rho B \rho^{-1}$ во всех $H_0^\lambda[0,1]$ и $\mathrm{h}_0^\lambda[0,1]$. Полагая $\psi = \rho f \in H_0^\lambda[0,1]$, $f \in C_0^\infty[0,1]$, из (7.4) имеем

$$A_\rho B_\rho \psi = \rho A B \rho^{-1} \psi = \psi. \tag{7.5}$$

Итак, (7.5) имеет место для всех $\psi(x) \in H_0^\lambda[0,1]$, которые имеют вид

$$\psi = \rho f, \qquad \rho(x) = x^\mu, \qquad f(x) \in C_0^\infty[0,1]. \tag{7.6}$$

Убедимся, что (7.5) имеет место для всех $f \in H_0^\lambda([0,1],\rho)$.

Согласно Лемме 7.4 можно добиться, чтобы $\lim\limits_{m\to\infty} \|\psi - \rho f_m\|_{\lambda-\epsilon} = 0$, где $f_m \in C_{0,m}^\infty[0,1]$ и $\psi \in \mathrm{h}_0^{\lambda-\epsilon}[0,1]$ – произвольна. Так как $\psi_m(x) = \rho(x) f_m(x)$ имеет вид (7.6), для таких ψ имеет место (7.5) и $\lim\limits_{m\to\infty} \|\psi - \rho f\|_{\lambda-\epsilon} = 0$. Таким образом, соотношение (7.5) распространяется на все $\mathrm{h}_0^{\lambda-\epsilon}$ и, следовательно, на все $H_0^\lambda[0,1]$.

3°. Плотные множества в $\mathrm{h}^\lambda(S_{n-1})$. Усреднения функции $f(x)$ строим в виде следующего оператора :

$$f_\epsilon(x) = \int_{S_{n-1}} k_\epsilon(|x-\sigma|)\, f(\sigma)\, d\sigma, \tag{7.7}$$

где ядро $k_\epsilon(r)$ удовлетворяет условиям (см. [14]) :

$$a) \quad \int_{S_{n-1}} k_\epsilon(|x-\sigma|)\, d\sigma = 1; \qquad b) \quad \int_{S_{n-1}} |k_\epsilon(|x-\sigma|)|\, d\sigma \le C \quad \text{для всех} \quad \epsilon > 0; \tag{7.8}$$

$$c) \quad \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|x-\sigma|>\delta} |k_\epsilon(|x-\sigma|)|\, d\sigma = 0 \quad \text{для всех} \quad \delta > 0. \tag{7.9}$$

Приведём доказательство этого утверждения для пространства $C(S_{n-1})$. Заметим, что левые части в $a)$ и $b)$ не зависят от x. Используя (7.8), получаем

$$\|f_\epsilon(x) - f(x)\|_{C(S_{n-1})} \le c\,\omega(f,\delta) + 2\,\|f\|_{C(S_{n-1})} \int_{|x-\sigma|>\delta} |k_\epsilon(|x-\sigma|)|\, d\sigma. \tag{7.10}$$

Следовательно, $\|f_\epsilon - f\|_{C(S_{n-1})} \to 0$ при $\epsilon \to 0$, что и требовалось доказать.

Если ядро в (7.7) – достаточно гладкое, то усреднение тоже гладкое.

Возникает вопрос : можно ли сходимость усреднений в норме $H^\lambda(S_{n-1})$ получать по той же схеме? Ясно, что в этом случае от $k_\epsilon(|x-\sigma|)$ следует требовать большей гладкости. Обозначим

$$k_\epsilon(|x|) = \frac{b_\epsilon}{\epsilon^{n-1}}\, \widetilde{k}\left(\frac{|x|}{\epsilon}\right), \tag{7.11}$$

где $\widetilde{k}(r) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1_+)$ – бесконечно дифференцируемая на $[0,\infty)$ и финитная (на бесконечности). Ниже будем предполагать, что $\widetilde{k}(r) = 0$ для $r \geq 1$. Постоянная b_ε подобрана так, чтобы было выполнено условие нормировки a) в (7.8). Из (1.3) получаем

$$\int_{S_{n-1}} k_\varepsilon(|x-\sigma|)\,d\sigma = b_\varepsilon\, 2^{3-n}\, C_n \int_0^{2/\varepsilon} \widetilde{k}(u)\, u^{n-2}(4-\varepsilon^2 u^2)^{(n-3)/2}\,du. \tag{7.12}$$

Остаётся выбрать b_ε из условия нормировки, полагая правую часть (7.12) равной единице. Кроме того, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} b_\varepsilon^{-1} = C_n \int\limits_0^\infty \widetilde{k}(u)\, u^{n-2}\,du$.

Теорема 7.1, [4]. Пусть $f_\varepsilon(x) \to f(x)$ в $C(S_{n-1})$ и удовлетворяет условию

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{\varepsilon>0} \frac{\omega(f_\varepsilon,\delta)}{\omega(\delta)} = 0. \tag{7.13}$$

Тогда $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|f_\varepsilon(x) - f(x)\|_{\mathrm{h}^\omega(S_{n-1})} = 0$ и $f(x) \in \mathrm{h}^\omega(S_{n-1})$.

Теорема 7.2. Пусть $f(x) \in \mathrm{h}^\omega(S_{n-1})$, $f_\varepsilon(x) \to f(x)$ в $C(S_{n-1})$ и для любого $\varepsilon > 0$ удовлетворяет условию

$$\omega(f_\varepsilon,\delta) \leq c\,\omega(\delta). \tag{7.14}$$

Тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|f_\varepsilon(x) - f(x)\|_\omega = 0. \tag{7.15}$$

Приведём доказательство для случая $\omega(t) = t^\lambda$. В этом случае достаточно проверить, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\delta>0} \frac{\omega(f_\varepsilon - f,\delta)}{\delta^\lambda} = 0. \tag{7.16}$$

Так как $f \in \mathrm{h}^\lambda(S_{n-1})$, то (7.16) следует из оценки

$$\sup_{\delta>0} \frac{\omega(f_\varepsilon - f,\delta)}{\delta^\lambda} \leq 2 \sup_{0<\delta<\delta_0} \frac{\omega(f,\delta)}{\delta^\lambda} + \delta_0^{-\lambda}\|f_\varepsilon - f\|_{C(S_{n-1})}. \tag{7.17}$$

Доказательство завершено.

Пусть теперь $f(x) \in \mathrm{h}^\lambda(S_{n-1})$ и $f_\varepsilon(x)$ – гладкое усреднение, построенное по достаточно гладким усредняющим ядрам. Согласно (7.10) получаем $\|f_\varepsilon - f\|_{C(S_{n-1})} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, а по Теореме 7.2 имеем (7.15). Следующая лемма завершает доказательство.

Лемма 7.6. Пусть $f_\varepsilon(x)$ – усреднение с гладким ядром $k_\varepsilon(x)$ вида (7.11), удовлетворяющим условиям (7.8), (7.9). Тогда справедливо (7.14).

Доказательство : Обозначим $\delta = |x-y|$. Так как интеграл в (7.7) не зависит от x (и y), то имеет место представление $f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y) = I_1 + I_2$, где

$$I_1 = \int_{|x-\sigma|<2\delta} \{k_\varepsilon(|x-\sigma|) - k_\varepsilon(|y-\sigma|)\} (f(\sigma) - f(x))\, d\sigma,$$

$$I_2 = \int_{|x-\sigma|>2\delta} \{k_\varepsilon(|x-\sigma|) - k_\varepsilon(|y-\sigma|)\} (f(\sigma) - f(x))\, d\sigma.$$

Согласно (7.8), имеем $|I_1| \le c\,\omega(f,\delta)$. Так как $k_\varepsilon(|x-\sigma|) = 0$ для $|x-\sigma| > \varepsilon$, то имеем

$$|I_2| \le \frac{c\,\delta\, b_\varepsilon}{\varepsilon^n} \int_{2\delta<|x-\sigma|<\varepsilon} \omega(f, |\sigma - x|)\, d\sigma.$$

Следовательно, для $\delta < \varepsilon$ получаем $|I_2| \le c\,\omega(f,\delta)$. Доказательство завершено.

Следующая теорема является следствием Теоремы 7.2 и Леммы 7.6.

Теорема 7.3. **Если $0 < \lambda \le 1$, то $C^\infty(S_{n-1})$ плотно в $\mathrm{h}^\lambda(S_{n-1})$.**

ABSTRACT. The paper obtains Zigmund–type estimates for a spherical potential type operator of complex order α, $0 \le \mathrm{Re}\,\alpha < 1$. Basing on these estimates, the action of the operator and of related singular spherical integral is studied in the generalized Hölder classes $H^\omega(S_{n-1})$ and $H^\omega(S_{n-1}, \rho)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Г. Вакулов, "Операторы типа потенциала в обобщённых классах Гёльдера", Изв. Вузов, Математика, № 11, стр. 66 – 69, 1986.
2. Б. Г. Вакулов, "Сферические операторы типа потенциала в обобщённых пространствах Гёльдера на сфере", Дисс. на соиск. уч. степени канд. физ.–мат. наук, РГУ, 1986.
3. Б. Г. Вакулов, "Сферические операторы типа потенциала в обобщённых пространствах Гёльдера с весом на сфере", Изв. Вузов Сев. Кавказа, Естественные Науки, № 4, стр. 5 – 10, 1999.
4. А. И. Гусейнов, Х. Ш. Мухтаров, Введение в Теорию Нелинейных Сингулярных Интегральных Уравнений, Наука, Москва, 1980.
5. Н. К. Карапетянц, Л. Д. Шанкишвили, "Дробные интегралы мнимого порядка в пространствах Гёльдера с весом", Докл. РАН, том 364, № 6, стр. 738 – 740, 1999.
6. N. K. Karapetiants, L. D. Shankishvili, "A short proof of Hardy–Littlewood type theorem for fractional integrals in Hölder spaces", Fract. Calculus and Appl. Analysis, vol. 2, no. 2, pp. 177 – 192, 1999.
7. П. М. Павлов, С. Г. Самко, "Описание пространств $L_p^\alpha(S_{n-1})$ в терминах гиперсингулярных интегралов", ДАН СССР, том 276, № 3, стр. 546 – 550, 1984.
8. С. Г. Самко, Гиперсингулярные Интегралы и их Приложения, Изд-во РГУ, Ростов, 1984.
9. С. Г. Самко, "Сингулярные интегралы по сфере и построение характеристики по символу", Изв. Вузов, Математика, № 4, стр. 28 — 42, 1983.
10. С. Г. Самко, "Обобщённые риссовы потенциалы и гиперсингулярные интегралы с однородными характеристиками, их символы и обращение", Труды МИАН СССР, том 156, стр. 157 – 222, 1980.

11. С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, Интегралы и Производные Дробного Порядка и Некоторые их Приложения, Минск, Наука и Техника, 1987.
12. С. Г. Самко, Х. М. Мурдаев, "Весовые оценки Зигмунда для гиперсингулярных интегралов", Труды МИАН СССР, том 180, стр. 197 – 198, 1987.
13. S. G. Samko, B. G. Vakulov, "On equivalent norms in fractional order functions space of continuous functions on the unit sphere", Fract. Calculus and Appl. Analysis, vol. 3, no. 4, pp. 401 – 433, 2000.
14. С. Л. Соболев, Введение в Теорию Кубатурных Формул, Наука, Москва, 1984.

20 января 2001

Ростовский государственный университет,
Россия