КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВАЛЮАЦИЙ НА ПОЛИТОПАХ

Г. С. Сукиасян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 36, № 1, 2001

В статье исследуются валюации, определённые на политопах в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Валюация называется d-простой, если она обращается в нуль на многогранниках размерности меньше чем d. Доказано, что все $(n-1)$-простые валюации в $\mathbb{R}^n$ имеют так называемые фреймовые представления, а все 1-простые валюации в $\mathbb{R}^3$ имеют так называемые клиновые представления. Вводится важное понятие канонических представлений. Получены необходимые и достаточные условия для непрерывности и продолжения валюаций в терминах канонических представлений.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathcal{D}$ – пространство политопов (выпуклых компактных многогранников) в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, наделённое метрикой Хаусдорфа. Отображение $m : \mathcal{D} \longmapsto (-\infty, \infty)$ называется **валюацией**, если оно аддитивно в смысле Хадвигера : для любых $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ таких, что $D_1 \cup D_2 \in \mathcal{D}$ имеем

$$m(D_1 \cup D_2) + m(D_1 \cap D_2) = m(D_1) + m(D_2). \tag{1.1}$$

Валюация называется **d-простой**, если она обращается в нуль на политопах размерности меньше чем d. Политоп $D \in \mathcal{D}$ называется **плоским**, если он имеет нулевой n-мерный объём, но ненулевую $(n-1)$-мерную площадь поверхности. Полагаем, что плоский политоп имеет две $(n-1)$-мерные конгруэнтные грани с взаимно противоположными направлениями внешних нормалей. Политоп D называется **вырожденным**, если его $(n-1)$-мерные площади поверхности равны нулю. Валюация является n-простой тогда и только тогда, когда она обращается в нуль на плоских политопах (см. [8]).

Настоящая статья рассматривает представления валюаций, зависящие от функций, определенных или в пространстве "фреймов" (фреймовые представления, см. §§2, 3) или "клиньев" (клиновые представления, см. §§4, 5). Аналогичные

валюации были определены на так называемых кольцах Сильвестра в пространствах прямых на плоскости и плоскостей в $\mathbb{R}^3$ и исследовались в [1] – [5].

Основные результаты этой статьи – Теорема 3.1, которая утверждает, что все $(n-1)$-простые валюации на $\mathcal{D}$ обладают фреймовыми представлениями, и Теорема 4.1, которая утверждает, что для $n = 3$ все 1-простые валюации на $\mathcal{D}$ обладают клиновыми представлениями. Эти представления не единственны, и в §5 вводится подкласс так называемых "канонических" представлений. Получены необходимые и достаточные условия для хаусдорфовой непрерывности в терминах канонических представлений.

§2. ФРЕЙМОВЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ n-ПРОСТЫХ ВАЛЮАЦИЙ

Фреймом называется упорядоченная система

$$f = (P, \omega_1, ..., \omega_n), \quad P \in \mathbb{R}^n, \quad \omega_i \in \mathcal{S}_{n-1}, \quad i = 1, ..., n,$$

где $\mathcal{S}_{n-1}$ – единичная сфера направлений в $\mathbb{R}^n$, а ω_i – взаимно перпендикулярные направления. Точка P называется **основанием** фрейма.

В этом параграфе рассматривается класс валюаций, зависящих от функций $F(f)$, определённых в пространстве фреймов (фреймовые функции). Пусть $f = (P, \omega_1, ..., \omega_n)$ и $f' = (P, \omega'_1, ..., \omega'_n)$ – два фрейма с одним и тем же основанием таких, что для некоторого $i \in \{1, ..., n\}$ направления ω_i и ω'_i являются взаимно противоположными и для каждого $j \neq i$ имеем $\omega_j = \omega'_j$. Если всегда $F(f) = -F(f')$, то фреймовая функция F называется **антисимметричной**.

Фрейм $f = (P, \omega_1, ..., \omega_n)$ называется **ассоциированным** для невырожденного политопа $D \in \mathcal{D}$, если его основание P является вершиной политопа D, и для каждого $j = 1, ..., n$ существуют грани $g_{j-1} \subset g_j$ размерности $j-1$ и j соответственно такие, что $P \in g_{j-1}$, а ω_j лежит на грани g_j, и имеет направление внешней нормали к грани g_{j-1}. Предполагаем, что n-мерной гранью политопа D является сам политоп D.

Через $\mathcal{F}(D)$ обозначаем (конечное) множество ассоциированных фреймов. Для заданной фреймовой функции $F(f)$ рассматриваем следующий функционал :

$$\Psi_F(D) = \sum_{f \in \mathcal{F}(D)} F(f), \quad D \in \mathcal{D}. \tag{2.1}$$

Для вырожденного D полагаем $\Psi_F(D) = 0$.

Через $\mathcal{M}_1$ обозначим множество валюаций, обладающих представлением (2.1) с некоторой фреймовой функцией $F(f)$. Если $m \in \mathcal{M}_1$, мы также говорим,

что m допускает **фреймовое представление**. Оказывается, что $\mathcal{M}_1$ содержит множество всех n-простых валюаций. В [8] доказано следующее утверждение.

Теорема 2.1, [8]. Для любой n-простой валюации $m(D)$ в $\mathbb{R}^n$ существует антисимметричная фреймовая функция F такая, что $m(D) = \Psi_F(D)$ для любого политопа $D \in \mathcal{D}$.

Ниже получен аналог Теоремы 2.1 для $(n-1)$-простых валюаций.

§3. ФРЕЙМОВЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ $(n-1)$–ПРОСТЫХ ВАЛЮАЦИЙ

Пусть $m(D)$ – $(n-1)$-простая валюация в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим отображение μ_m : $\mathcal{D} \longmapsto (-\infty, \infty)$, определённое по формуле

$$\mu_m(D) = \frac{1}{2} \sum_{h \in H(D)} m(h), \quad D \in \mathcal{D}, \tag{3.1}$$

где $H(D)$ – множество $(n-1)$-мерных граней политопа D. Для плоских D полагаем $\mu_m(D) = m(D)$.

Лемма 3.1. Для любой $(n-1)$–простой валюации $m(D)$ отображение $\mu_m(D)$ является валюацией.

Доказательство : Достаточно проверить (см. [10]) условие аддитивности (1.1) в случае, когда $D_1 \cap D_2$ является $(n-1)$-мерным политопом, имеющим, согласно договоренности, две $(n-1)$-мерные конгруэнтные грани h_0 и h_0^*. Предположим, что $h_0 \in H(D_1)$ и $h_0^* \in H(D_2)$, поэтому $H(D_1) \cap H(D_2) = \emptyset$ и $\mu_m(D_1 \cap D_2) = m(h_0) = m(h_0^*)$. Положим

$$H_0 = \{h_0\} + \{h_0^*\}, \quad H_i = H(D_i) \setminus [H(D_1 \cup D_2) + H_0], \quad i = 1, 2;$$

$$H_3 = H(D_1 \cup D_2) \setminus [H(D_1) + H(D_2)],$$

где $+$ означает объединение непересекающихся множеств. Отметим, что грани из H_3 рассекаются гиперплоскостью, содержащей h_0, на две подграни, лежащие в H_1 и H_3. Так как $m(D)$ является $(n-1)$-простой, то получаем

$$\sum_{h \in H_3} m(h) = \sum_{h \in H_1} m(h) + \sum_{h \in H_2} m(h). \tag{3.2}$$

Из тождества $H(D_1) + H(D_2) + H_3 = H(D_1 \cup D_2) + H_1 + H_3 + H_0$ и формулы (3.2) получаем

$$\mu_m(D_1) + \mu_m(D_2) = \frac{1}{2} \sum_{h \in H(D_1)} m(h) + \frac{1}{2} \sum_{h \in H(D_2)} m(h) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{h \in H(D_1 \cup D_2)} m(h) - \frac{1}{2} \sum_{h \in H_3} m(h) + \frac{1}{2} \sum_{h \in H_1} m(h) + \frac{1}{2} \sum_{h \in H_2} m(h) + m(h_0) =$$

$$= \mu_m(D_1 \cup D_2) + \mu_m(D_1 \cap D_2).$$

Лемма 3.1 доказана.

Пусть F – функция в пространстве n-мерных фреймов. Обозначим через F_ω сужение F на пространство $(n-1)$-мерных фреймов :

$$F_\omega(P, \omega_1, ..., \omega_{n-1}) = F(P, \omega_1, ..., \omega_{n-1}, \omega).$$

Фреймовую функцию F назовем **полусимметричной**, если для всех $\omega \in S_{n-1}$ сужение F_ω является антисимметричной $(n-1)$-мерной фреймовой функцией и $F_\omega = F_{\omega^*}$, где ω^* – направление, противоположное ω.

Лемма 3.2. Для любой $(n-1)$-простой валюации $m(D)$, валюация $\mu_m(D)$ обладает фреймовым представлением с полусимметричной фреймовой функцией.

Доказательство : Так как $m(D)$ является $(n-1)$-простой, то её сужение m_e на любую гиперплоскость e является $(n-1)$-простой валюацией в $(n-1)$-мерном пространстве e. Согласно Теореме 2.1, m_e обладает фреймовым представлением с антисимметричной фреймовой функцией $F_e(P, \omega_1, ..., \omega_{n-1})$, $P \in e$. Из (2.1) и (3.1) получаем

$$\mu_m(D) = \frac{1}{2} \sum_{h \in H(D)} m_{e(h)}(h) = \frac{1}{2} \sum_{h \in H(D)} \sum_{f \in \mathcal{F}(h)} F_{e(h)}(f), \quad D \in \mathcal{D}, \tag{3.3}$$

где $e(h)$ – гиперплоскость, содержащая грань h. Из определения ассоциированного фрейма следует, что если $(P, \omega_1, ..., \omega_{n-1}) \in \mathcal{F}(h)$, то $(P, \omega_1, ..., \omega_{n-1}, \omega) \in \mathcal{F}(D)$, где ω – направление внешней нормали к грани $h \in H(D)$. Используя (3.3), получаем фреймовое представление валюации $\mu_m(D)$ с полусимметричной фреймовой функцией

$$F(P, \omega_1, ..., \omega_{n-1}, \omega) = F(P, \omega_1, ..., \omega_{n-1}, \omega^*) = \frac{1}{2} F_{e(h)}(P, \omega_1, ..., \omega_{n-1}).$$

Лемма 3.2 доказана.

Лемма 3.3. Для любой $(n-1)$-простой валюации $m(D)$ разность $m(D) - \mu_m(D)$ является n-простой валюацией.

Доказательство : Согласно Лемме 3.1, $\mu_m(D)$ является валюацией. Следовательно, $m(D) - \mu_m(D)$ также является валюацией. Её простота следует из условия $\mu_m(D) = m(D)$ для плоских D.

Теорема 3.1. Для всякой $(n-1)$-простой валюации $m(D)$ в $\mathbb{R}^n$ существуют антисимметричная фреймовая функция F_1 и полусимметричная фреймовая функция F_2 такие, что для любого многогранника $D \in \mathcal{D}$ имеет место фреймовое представление $m(D) = \Psi_{F_1+F_2}(D)$.

Доказательство : Согласно Лемме 3.3 валюация $m(D) - \mu_m(D)$ является n-простой, а по Теореме 2.1 существует антисимметричная фреймовая функция F_1 такая, что $m(D) - \mu_m(D) = \Psi_{F_1}(D)$. По Лемме 3.2 существует полусимметричная фреймовая функция F_2 такая, что $\mu_m(D) = \Psi_{F_2}(D)$. По аддитивности

$$m(D) = \Psi_{F_1}(D) + \Psi_{F_2}(D) = \Psi_{F_1+F_2}(D).$$

Теорема 3.1 доказана.

Так как для вырожденных D имеем $\Psi_F(D) = 0$, то получаем следующее следствие из Теоремы 3.1.

Следствие. Класс $\mathcal{M}_1$ всех валюаций, обладающих фреймовым представлением, совпадает с классом всех $(n-1)$-простых валюаций.

§4. КЛИНОВОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

В этом параграфе мы изучаем 1-простые валюации в $\mathbb{R}^3$. Через S_2 обозначаем единичную сферу в $\mathbb{R}^3$ с центром в начале координат O. Пусть a – прямолинейный отрезок в $\mathbb{R}^3$, а C_a – большая окружность направлений, ортогональных к a. **Клином** называется пара $w = (a, V)$, где a – замкнутый отрезок в $\mathbb{R}^3$, а V – замкнутая дуга окружности C_a. Отрезок a называется **ребром**, а V – **раствором** клина w. Если дуга V сводится к точке φ, то соответствующий клин будем обозначать $w = (a, \{\varphi\})$.

Рассмотрим **клиновую функцию** W, удовлетворяющую следующим условиям :

a) аддитивность по ребру : если замкнутые отрезки a_1 и a_2 лежат на одной прямой, причём $a_1 \cup a_2$ является отрезком, а $a_1 \cap a_2$ состоит из одной точки, то для любого раствора $V \in C_{a_1} = C_{a_2}$ имеем $W(a_1, V) + W(a_2, V) = W(a_1 \cup a_2, V)$;

b) аддитивность по раствору : для заданного отрезка a и двух дуг $V_1, V_2 \in C_a$ таких, что $V_1 \cup V_2$ также является дугой, имеет место

$$W(a, V_1) + W(a, V_2) = W(a, V_1 \cup V_2) + W(a, V_1 \cap V_2);$$

c) если дуга V имеет длину π, то для любого отрезка a имеем $W(a, V) = 0$;

d) для любого замкнутого отрезка a сумма $S(a) = W(a, \{\varphi\}) + W(a, \{\varphi^*\})$ не зависит от направления $\varphi \in C_a$.

Клин $w = (a, V)$ называется **ассоциированным** с невырожденным политопом $D \in \mathcal{D}$, если a является ребром, а раствор V – внутренним двугранным углом политопа D при ребре a. Отметим, что клинья, ассоциированные с плоскими политопами (многоугольниками) имеют вид $w = (a, \{\varphi\})$, где направление φ лежит в плоскости многоугольника и ортогонально ребру a.

Для заданной клиновой функции W со свойствами a) – d) на невырожденных политопах $D \in \mathcal{D}$ построим следующий функционал :

$$\Phi_W(D) = \sum_{w \in \mathcal{W}(D)} W(w), \tag{4.1}$$

где $\mathcal{W}(D)$ – множество клиньев, ассоциированных с политопом D. Продолжим функционал (4.1) на вырожденные политопы, полагая $\Phi_W(D) = S(D)$, если D является отрезком положительной длины, и $\Phi_W(D) = 0$, если D состоит из одной точки. Функция S была определена в d).

Лемма 4.1. Если клиновая функция W удовлетворяет условиям a) – d), то функционал $\Phi_W(D)$, определённый по формуле (4.1), является 1-простой валюацией.

Доказательство : аналогично доказательству Леммы 3.1, но использует множества $\mathcal{W}(D_i)$ вместо $H(D_i)$. Свойства, которые будут использованы при доказательстве условия (1.1) следующие :

d) – для плоских политопов,

b) – когда плоскость e многоугольника $D_1 \cap D_2$ содержит ребро клина,

a) – когда плоскость e пересекает ребро в одной точке,

c) – когда плоскость e, пересекающая грань политопа $D_1 \cup D_2$, образует два клина со смежными двугранными углами.

Обозначим через $\mathcal{M}_2$ множество валюаций, обладающих представлением (4.1) с некоторой клиновой функцией W. Если $m \in \mathcal{M}_2$, мы будем говорить, что m допускает **клиновое представление.**

Лемма 4.2. Всякая 2-простая валюация в $\mathbb{R}^3$ допускает клиновое представление, т.е. $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$.

Доказательство : Согласно Теореме 3.1, для всякой 2-простой валюации $m(D)$ существует фреймовая функция F такая, что имеет место фреймовое представление $m(D) = \Psi_F(D)$. Для заданной фреймовой функции F построим клиновую

функцию W_F такую, что

$$\Psi_F(D) = \Phi_{W_F}(D), \quad D \in \mathcal{D}. \tag{4.2}$$

Заметим, что число клиньев в множестве $W(D)$ равно числу рёбер политопа D, а число фреймов в множестве $\mathcal{F}(D)$ в 4 раза больше числа рёбер.

Пусть $a = [P_1, P_2]$ – отрезок с концами P_1 и P_2. На круге C_a выберем начало и направление обхода. Тогда каждому $\varphi \in [0, 2\pi)$ соответствует точка на окружности $C_a \subset S_2$, и, следовательно, точка на сфере S_2. Условимся эту точку на сфере обозначать той же буквой φ. Пусть $V = [\varphi_1, \varphi_2]$ – дуга круга C_a с концами φ_1 и φ_2. Предположим, что длина $|V|$ дуги V меньше π. Выберем начало и ориентацию на C_a так, чтобы $0 \le \varphi_1 \le \varphi_2 < \pi$. Через $\omega \in S_2$ обозначим направление из точки P_1 к P_2. Заданному клину (a, V) поставим в соответствие четыре фрейма

$$f_1 = (P_1, \omega^*, \varphi_1 + \pi, \varphi_1 - \pi/2), \quad f_2 = (P_1, \omega^*, \varphi_2 + \pi, \varphi_2 + \pi/2),$$

$$f_3 = (P_2, \omega, \varphi_1 + \pi, \varphi_1 - \pi/2), \quad f_4 = (P_2, \omega, \varphi_2 + \pi, \varphi_2 + \pi/2).$$

Искомой клиновой функцией будет

$$W_F(a, V) = F(f_1) + F(f_2) + F(f_3) + F(f_4). \tag{4.3}$$

Для доказательства (4.2) достаточно показать, что для любых a и $\varphi \in [0, 2\pi)$ имеем $S(a) = W_F(a, \{\varphi\}) + W_F(a, \{\varphi + \pi\}) = 0$. Последнее равенство следует из антисимметричности фреймовой функции по третьему аргументу : $F(P, \omega, \varphi, \varphi + \pi/2) = -F(P, \omega, \varphi + \pi, \varphi + \pi/2)$. Лемма 4.2 доказана.

Пример 1. Рассмотрим клиновую функцию $W_0(a, V) = |a| \cdot (\pi - |V|)$, где $|a|$ – длина ребра a, а $|V|$ – длина дуги V. Легко проверить, что W_0 удовлетворяет условиям a), c), d), причем $S(a) = 2\pi|a|$. Условие b) следует из аддитивности длины дуги : если $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$, то

$$|V_1| + |V_2| = |V_1 \cup V_2| + |V_1 \cap V_2|. \tag{4.4}$$

Согласно Лемме 4.1 функционал

$$\mathcal{N}(D) = \sum_{(a,V) \in W(D)} |a| \cdot (\pi - |V|), \quad D \in \mathcal{D}$$

является 1-простой валюацией. Валюация $\mathcal{N}(D)$ исследовалась в [6], где называлась **нормой политопа**. Она аддитивна по Минковскому, инвариантна относительно группы евклидовых движений, но не является 2-простой. Следовательно, $\mathcal{N}(D) \in \mathcal{M}_2 \setminus \mathcal{M}_1$.

Теорема 4.1. Для любой 1-простой валюации $m(D)$ в $\mathbb{R}^3$ существует клиновая функция W, удовлетворяющая условиям a) – d) такая, что для любого политопа $D \in \mathcal{D}$ имеет место клиновое представление $m(D) = \Phi_W(D)$.

Доказательство : Для заданной 1-простой валюации $m(D)$, рассмотрим клиновую функцию

$$W_1(a, V) = \frac{1}{2\pi} m(a) \cdot (\pi - |V|), \tag{4.5}$$

где $m(a)$ – значение валюации m на отрезке $a \subset \mathbb{R}^3$. Легко проверить, что W_1 удовлетворяет условиям a) – d). Действительно, a) следует из (1.1) и 1-простого свойства $m(P) = 0$ для любой точки P. Условие b) следует из (4.4), а условие d) следует из

$$S(a) = W_1(a, \{\varphi\}) + W_1(a, \{\pi + \varphi\}) = m(a).$$

Согласно Лемме 4.1, $\Phi_{W_1}(D)$ является 1-простой валюацией. По определению функционала Φ, для любого прямолинейного отрезка a имеем $\Phi_{W_1}(a) = S(a) = m(a)$. Валюация $m(D) - \Phi_{W_1}(D)$ равна нулю на отрезках. Следовательно, $m(D) - \Phi_{W_1}(D)$ является 2-простой валюацией. Согласно Лемме 4.2, существует клиновая функция W_2, удовлетворяющая условиям a) – d) такая, что имеет место клиновое представление $m(D) - \Phi_{W_1}(D) = \Phi_{W_2}(D)$. Используя аддитивность клиновых представлений, получим $m(D) = \Phi_{W_1}(D) + \Phi_{W_2}(D) = \Phi_{W_1+W_2}(D)$. Остается заметить, что если клиновые функции W_1 и W_2 удовлетворяют условиям a) – d), то и $W = W_1 + W_2$ также удовлетворяет этим условиям. Теорема 4.1 доказана.

§5. КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВАЛЮАЦИЙ В $\mathbb{R}^3$

Фреймовые и клиновые представления валюаций не единственны : разные фреймовые функции могут посредством (2.1) порождать одну и ту же валюацию. То же справедливо и для клиновых представлений : разные клиновые функции могут посредством (4.1) порождать одну и ту же валюацию. В настоящем параграфе выделен подкласс клиновых и фреймовых представлений – т.н. канонические представления валюаций, с помощью которых можно эффективно исследовать вопросы непрерывности и продолжаемости валюаций вне класса $\mathcal{D}$. Для данной валюации каноническое представление единственно с точностью до выбора начала координат.

Пусть в $\mathbb{R}^3$ задана "абсолютная" декартова система координат с началом в точке O. Каждому фрейму $f = (P, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ поставим в соответствие декартову

систему координат $\mathbf{C}_f$, у которой начало в точке P, а координатные оси имеют направления ω_i.

Симплексом Шлефли (см. [6]) называется четырехгранник, все четыре грани которого суть прямоугольные треугольники. **Симплексом Шлефли для фрейма** $f = (P, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ называется четырехгранник $T(f)$ с вершинами O, P, Q_1, Q_2, где Q_1 – проекция точки O на координатную ось P, ω_1, а Q_2 – проекция точки O на координатную плоскость P, ω_1, ω_2 декартовой системы $\mathbf{C}_f$. Заметим, что если вместо ω_i взять противоположное направление, то симплекс Шлефли не изменится, т.е. совпадёт с $T(f)$.

Пусть $m(D)$ – 3-простая валюация в $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим следующую фреймовую функцию :

$$F_m(f) = (-1)^{N(f)} m(T(f)), \tag{5.1}$$

где $N(f)$ – число положительных координат точки O в декартовой системе координат $\mathbf{C}_f$, а $T(f)$ – симплекс Шлефли фрейма f. В [9] показано, что фреймовая функция (5.1) порождает валюацию $m(D)$ посредством (2.1), т.е

$$m(D) = \sum_{f \in \mathcal{F}(D)} F_m(f), \quad D \in \mathcal{D}. \tag{5.2}$$

Уравнение (5.2) назовём **каноническим представлением** 3-простой валюации $m(D)$, а (5.1) — **канонической фреймовой функцией** валюации $m(D)$.

Пример 2. Объем симплекса Шлефли $T(f)$ равен $\frac{1}{6}|x_O y_O z_O|$, где (x_O, y_O, z_O) – координаты точки O в декартовой системе $\mathbf{C}_f$. В частности, $|x_O|$ равно длине $|PQ_1|$ ребра PQ_1 симплекса $T(f)$, $|y_O| = |Q_1Q_2|$ и $|z_O| = |OQ_2|$. Согласно (5.1), трехмерная мера Лебега обладает каноническим представлением с канонической фреймовой функцией $\frac{1}{6}x_O y_O z_O$.

Пусть теперь $m_1(D)$ – 2-простая валюация в $\mathbb{R}^3$. По Лемме 3.3 и (5.1), $m_1(D)$ обладает каноническим представлением с фреймовой функцией

$$F_{m_1}(f) = (-1)^{N(f)} \left[m_1(T(f)) - \frac{1}{2} \sum_{h \in H(T(f))} m_1(h) \right] + (-1)^{N(f')} m_1(T(f')), \tag{5.3}$$

где f' – плоский фрейм, получающийся из $f = (P, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ усечением последнего аргумента, а $T(f')$ – плоский симплекс Шлефли, лежащий в плоскости проходящей через P с направлением нормали ω_3. Фреймовая функция (5.3) называется **канонической** для случая 2-простых валюаций.

Пример 3. Площадь поверхности L_2 является 2-простой валюацией в $\mathbb{R}^3$. Имеем

$$L_2(D) = \frac{1}{2} \sum_{h \in H(D)} L_2(h), \quad D \in \mathcal{D}.$$

Согласно (5.3), L_2 обладает каноническим представлением с канонической фреймовой функцией $F_{L_2}(f) = \frac{1}{2} x_O y_O$, где (x_O, y_O, z_O) – координаты точки O в декартовой системе $\mathbf{C}_f$ (см. Пример 2).

Рассмотрим клиновую функцию, использованную при доказательстве Теоремы 4.1 и Леммы 4.2. В (4.3) в качестве F возьмём каноническую фреймовую функцию (5.3), соответствующую 2-простой валюации. Результат назовём **канонической клиновой функцией** 1-простой валюации.

Расстояние между отрезками a_1 и a_2 с концами P_1, P_1' и P_2, P_2', соответственно, определим как хаусдорфово расстояние, т.е.

$$d(a_1, a_2) = \min\left[d_0(P_1, P_2) + d_0(P_1', P_2'); d_0(P_1', P_2) + d_0(P_1, P_2')\right], \tag{5.4}$$

где d_0 – евклидово расстояние в $\mathbb{R}^3$. Расстояние между дугами определяется как хаусдорфово расстояние между дугами больших кругов на сфере S_2. Расстояние в пространстве клиньев определяется как сумма расстояний между соответствующими отрезками и дугами. Условие Липшица для клиньев имеет вид

$$|W(a, V)| \leq M_R |a| \cdot (\pi - |V|), \quad a \subset B_R, \tag{5.5}$$

где B_R – шар радиуса R с центром в O, M_R – постоянная, зависящая только от R.

Теорема 5.1. 1) Если 1-простая валюация непрерывна в метрике Хаусдорфа, то ее каноническая клиновая функция непрерывна.

2) Если непрерывная клиновая функция W удовлетворяет условиям a) – d) и условию Липшица (5.5), то валюация, порожденная по (4.1), непрерывна в метрике Хаусдорфа.

Доказательство : 1) Пусть 1-простая валюация $m(D)$ непрерывна в метрике Хаусдорфа. Тогда её сужение на множество прямолинейных отрезков непрерывно, так как в пространстве отрезков хаусдорфово расстояние совпадает с (5.4). Следовательно, клиновая функция (4.5) непрерывна. Остаётся доказать непрерывность клиновой функции (4.3). Для этого достаточно доказать непрерывность

фреймовой функции (5.1) для 3-простых валюаций. Предположим, что последовательность фреймов f_n стремится к f при $n \to \infty$. Из определения симплекса Шлефли для фреймов следует, что $T(f_n) \to T(f)$ в метрике Хаусдорфа. Так как валюация $m(D)$ непрерывна, из (5.1) получим

$$F_m(f_n) = (-1)^{N(f_n)} m(T(f_n)) \to F_m(f), \quad n \to \infty.$$

Заметим, что в (5.1) множитель $(-1)^{N(f)}$ терпит разрыв на фреймах, у которых симплекс Шлефли является плоским и множитель $m(T(f))$ обращается в нуль.

2) Пусть W – непрерывная клиновая функция, удовлетворяющая условиям a) – d) и (5.5). Рассмотрим последовательность политопов $D_n \in \mathcal{D}$, сходящуюся к политопу $D \in \mathcal{D}$ при $n \to \infty$. Через ε_n обозначим хаусдорфово расстояние между D_n и D. Пусть $E(D)$ – множество рёбер предельного политопа D, а $E(D) \oplus \varepsilon_n$ – хаусдорфова e_n-окрестность множества $E(D)$. Через $E'(D_n)$ обозначим множество "ложных" рёбер политопа D_n, т.е. рёбра, не лежащие в $E(D) \oplus \varepsilon_n$. Так как клиновая функция W непрерывна, то достаточно показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{(a,V)\in W(D_n), a\in E'(D_n)} W(a,V) = 0. \tag{5.6}$$

Без ограничения общности можно предположить, что все D_n лежат внутри шара B_R. Из условия Липшица (5.5) получаем

$$\left| \sum_{(a,V)\in W(D_n), a\in E'(D_n)} W(a,V) \right| \le M_R \sum_{(a,V)\in W(D_n), a\in E'(D_n)} |a| \cdot (\pi - |V|). \tag{5.7}$$

Известно (см. [6]), что норма политопа $\mathcal{N}$ (см. Пример 1) непрерывна по Хаусдорфу. Следовательно, правая часть (5.7) стремится к нулю, откуда и следует (5.6). Теорема 5.1 доказана.

На прямой $g(P,\omega)$, проходящей через точку $P \in \mathbb{R}^3$ в направлении $\omega \in S_2$, рассмотрим отрезок a такой, что $P \in a$. Будем стягивать отрезок a в точку P, оставляя его на прямой $g(P,\omega)$. Будем говорить, что клиновая функция W называется **дифференцируемой по ребру**, если для всех $P \in \mathbb{R}^3$ и $\omega \in S_2$ существует предел

$$\rho(P,\omega,V) = \lim_{a\to P} \frac{1}{|a|} W(a,V), \quad V \subset C_a. \tag{5.8}$$

Теорема 5.2. Если клиновая функция W удовлетворяет условиям a) – d) и дифференцируема по ребру, то валюация Φ_W, порождённая по

формуле (4.1), может быть записана в виде одномерного интеграла

$$\Phi_F(D) = \int_{E(D)} \rho(l, \omega, V)\, dl, \quad D \in \mathcal{D}. \tag{5.9}$$

Доказательство : следует из (4.1) и (5.8).

Вопросы продолжения валюаций вида (5.9), вне класса $\mathcal{D}$ изучались в [7] и [9].

ABSTRACT. The paper considers valuations that live on polytopes in Euclidean space $\mathbb{R}^n$. A valuation is called d-simple, if it vanishes on polytopes of dimension less than d. It is proved that all $(n-1)$-simple valuations in $\mathbb{R}^n$ possess so-called frame representations, and all 1-simple valuations in $\mathbb{R}^3$ possess so-called wedge representations. The important concept of canonical representation is introduced. Some necessary and sufficient conditions for continuity and extendability of valuations in terms of canonical representations are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. В. Амбарцумян, "О конечно-аддитивных функционалах в $\mathbb{R}^3$", Изв. НАН Армении. Математика, том 28, № 2, стр. 51 – 59, 1993.
2. R. V. Ambartzumian, "Measure generation by Euler functionals", Adv. Appl. Prob. (SGSA), vol. 27, pp. 606 – 626, 1995.
3. Р. В. Амбарцумян, В. К. Оганян, "Конечно-аддитивные функционалы в пространстве плоскостей", Изв. НАН Армении, Математика, том 29, № 4, стр. 1 – 57, 1994.
4. Р. Г. Арамян, "Порождение мер в пространстве плоскостей и сферические эйлеровы функционалы", Изв. НАН Армении, Математика, том 29, № 4, стр. 58 – 74, 1994.
5. Г. Ю. Панина, "О клиновых плотностях в R^3", Изв. НАН Армении, Математика, том 29, № 1, стр. 76 – 82, 1994.
6. Г. Хадвигер, Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии, М., Наука, 1967.
7. Г. С. Сукиасян, "Клиновые представления валюаций на полиэдрах в $\mathbb{R}^3$", Изв. НАН Армении, Математика, том 36, № 1, стр. 66 – 80, 2001.
8. Г. С. Сукиасян, "О многомерных простых фреймовых валюациях", Изв. НАН Армении, Математика, том 31, № 4, стр. 90 – 104, 1996.
9. Г. С. Сукиасян, "Иерархия простых валюаций в $\mathbb{R}^3$", Изв. НАН Армении, Математика, том 33, № 4, стр. 79 – 91, 1998.
10. G. T. Sallee, "Polytopes, valuations and the Euler relation", Canad. J. Math., vol. 20, pp. 1412 – 1424, 1968.

2 июня 2000

Институт математики НАН Армении
E-mail : haikarin@netsys.am