КЛИНОВЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВАЛЮАЦИЙ НА ПОЛИЭДРАХ В $\mathbb{R}^3$

Г. С. Сукьясян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 36, № 1, 2001

Статья рассматривает валюации, определённые на многогранниках в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Валюации выражаются функциями, определёнными в пространстве “клиньев”. Клиновые функции строятся с помощью так называемых флаговых плотностей. Получены условия в терминах флаговых плотностей, при выполнении которых валюации порождают локально конечные знакопеременные меры.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathcal{D}$ – класс полиэдров (выпуклых компактных многогранников) в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Отображение $m : \mathcal{D} \rightarrow (-\infty, \infty)$ называется валюацией, если оно аддитивно в обычном смысле [11], т.е. для любых $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ таких, что $D_1 \cup D_2 \in \mathcal{D}$ имеет место

$$m(D_1 \cup D_2) + m(D_1 \cap D_2) = m(D_1) + m(D_2).$$

Валюация называется простой, если она обращается в нуль на многогранниках нулевого евклидового объёма. Полиэдр $D \in \mathcal{D}$ называется плоским, если он имеет нулевой объём, но ненулевую площадь поверхности. Каждый плоский полиэдр соответствует многоугольнику, лежащему в некоторой плоскости из $\mathbb{R}^3$ и наоборот. Мы полагаем, что плоские многогранники состоят из двух конгруэнтных градей, у которых внешние нормали противоположно направлены. Если валюация обращается в нуль на плоских многогранниках, то она простая (см. [9]). В ранних статьях автора (см. [8], [9]) рассматривались простые валюации в $\mathbb{R}^3$, задаваемые с помощью фреймовых функций. Настоящая статья рассматривает простые валюации в $\mathbb{R}^3$, которые задаются функциями, определёнными на клиньях (клиновые функции). Аналогичные валюации в пространстве плоскостей в $\mathbb{R}^3$ рассматривались в статьях Р. В. Амбарцумяна, В. К. Оганяна, А. Н. Давтяна, Р. Г. Арамяна и Г. Ю. Паниной [1] – [6]. Полученные там результаты

имеют важное значение в интегральной геометрии. В [1] – [5] основным вопросом был следующий : при каких условиях валюации в пространствах интегральной геометрии порождают локально конечные меры ? Естественно исследовать тот же вопрос для евклидовых пространств и для фреймовых валюаций. Первые результаты в этом направлении получены в [7] для евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, в [9] – для трёхмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, а в [8] – для общего $\mathbb{R}^n$.

Настоящая статья рассматривает ту же задачу для клиновых валюаций в $\mathbb{R}^3$. Однако, прежде чем дать ответ на основной вопрос, в статье решается (§5) вспомогательная задача : найти достаточные условия, при которых фреймовая плотность и клиновая плотность порождают одни и те же валюации. Этот результат существенен для последнего параграфа, где получены некоторые условия в терминах флаговых плотностей, при которых валюации порождают локально конечные меры.

§2. ПРОСТРАНСТВО ФЛАГОВ

Пусть S_2 – единичная сфера в $\mathbb{R}^3$ с центром в начале координат O . Для того, чтобы определить точку $\omega \in S_2$ будем использовать сферические координаты $\omega = (\nu, \psi)$, где $\nu \in [0, \pi]$ – сферическое расстояние между ω и северным полюсом (широта), а $\psi \in [0, 2\pi)$ – угол поворота вокруг полярной оси (долгота). Каждой точке $\omega = (\nu, \psi) \in S_2$ соответствует её “антипод” $\bar{\omega} \in S_2$ с координатами $\bar{\omega} = (\pi - \nu, \pi + \psi)$.

Обозначим через C_ω большой круг $S_2 \cap e_\omega$, где e_ω – плоскость, проходящая через начало координат O с нормальным направлением ω . На каждом C_ω определим направление обхода по часовой стрелке, если смотреть из ω и начальную точку Q , одну из двух точек пересечения C_ω с экватором $\nu = \pi/2$: точнее, Q – точка, где C_ω входит в северное полушарие. Ясно, что Q не определено для $\omega =$ северному полюсу или его антиподу.

Сферу S_2 с отождествлёнными антиподами (эллиптическая плоскость) обозначим через $\mathcal{E}_2$. Через $\mathcal{E}_1(\omega)$ будем обозначать большой круг на $\mathcal{E}_2$, для которого ω является полюсом. Очевидно, $\mathcal{E}_1(\omega)$ всегда есть окружность длины π . На $\mathcal{E}_2$ рассмотрим координаты (ν, ψ) , которые совпадают с сужением координат (ν, ψ) на сфере S_2 на северное полушарие.

Флагом называется тройка $f = (P, g, e)$, где P – точка, g – прямая и e – плоскость

в $\mathbb{R}^3$ такие, что $P \in g \subset e$. Точка P мы называем основанием, g – древком, и e – плоскостью флага. Эквивалентно, флаг f будем задавать как $f = (P, \Omega, \phi)$, где $\Omega \in \mathcal{E}_2$ – пространственное направление древка g , $\phi \in \mathcal{E}_1(\Omega)$ – угол поворота нормали к плоскости e вокруг g . Отметим, что древко g и полотнище e флага мы полагаем ненаправленными (в отличие от фреймов, см. §4). Для заданных Ω и ϕ определим точку $\omega(\Omega, \phi) \in \mathcal{E}_2$ как направление нормали к плоскости флага e .

Для задания флага f мы используем также дуальные координаты $f = (P, \omega, \varphi)$, где $\omega \in \mathcal{E}_2$ – направление нормали к плоскости e , а $\varphi \in \mathcal{E}_1(\omega)$ – направление плоскости e , нормальной к древку g . Эти две параметризации позволяют рассматривать пространство флагов, как пространство со своей естественной топологией (эти две топологии совпадают). Функции, определённые на этом пространстве, мы называем флаговыми, они использовались в [1] – [7] для построения валюаций в пространствах интегральной геометрии.

Флаговую функцию $F(f)$ называем *центрированной* (относительно начала координат $O \in \mathbb{R}^3$), если F обращается в нуль на всех флагах, для которых древко содержит точку O . Флаговая функция $F(f)$ называется *сильно центрированной* (относительно точки O), если F обращается в нуль на всех флагах, у которых O лежит в плоскости флага. Ясно, что сильно центрированные функции всегда являются центрированными относительно той же точки.

Для заданного флага $f = (P, \Omega, \phi) = (P, \omega, \varphi)$ и начальных точек на окружностях $\mathcal{E}_1(\Omega)$ и $\mathcal{E}_1(\omega)$ рассмотрим сферические координаты $\phi \in \mathcal{E}_1(\Omega)$ и $\varphi \in \mathcal{E}_1(\omega)$ и будем использовать для них те же самые буквы ϕ и φ . Из сферической тригонометрии имеем

$$\tan \varphi = \tan \nu_\Omega \cos \phi, \quad \cot \phi = \tan \nu_\omega \sin \varphi, \quad (2.1)$$

$$\cos \nu_\omega = \sin \nu_\Omega \sin \phi, \quad (2.2)$$

$$\cot \nu_\omega = \tan \nu_\Omega \cos(\psi_\omega - \psi_\Omega), \quad \cos \phi = \sin \nu_\omega \sin(\psi_\omega - \psi_\Omega), \quad (2.3)$$

где ν_ω, ψ_ω и ν_Ω, ψ_Ω суть координаты точек $\omega \in \mathcal{E}_2$ и $\Omega \in \mathcal{E}_2$, соответственно.

§3. КЛИНОВЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Пусть a – прямолинейный отрезок в $\mathbb{R}^3$ с пространственным направлением $\Omega_a \in \mathcal{E}_2$, а V – дуга круга C_{Ω_a} . Клином называется следующее множество флагов:

$$\omega = (a, V) = \{f = (P, \Omega_a, \phi) : P \in a, \phi \in V\}, \quad V \subset C_{\Omega_a}.$$

Отрезок a называется ребром, а множество V – раствором клина w . Клино $w = (a, V)$ называется внутренним клином полиэдра $D \in \mathcal{D}$, если a является ребром, а раствор V – внутренним двугранным углом полиэдра D при ребре a . Плоскости флагов, принадлежащие внешнему клину, суть опорные плоскости полиэдра D .

Пусть $F(f)$ – непрерывная флаговая функция. Для $w = (a, V)$ положим

$$W(w) = \int_a dP \int_V F(P, \Omega_a, \phi) d\phi, \quad (3.1)$$

и построим следующий функционал на $\mathcal{D}$:

$$m_F(D) = \sum_{w \in Ex(D)} W(w), \quad D \in \mathcal{D}, \quad (3.2)$$

где $Ex(D)$ – (конечное) множество внешних клиньев полиэдра D . Можно доказать, что m_F является валюацией. Назовём m_F клиновой валюацией с флаговой плотностью F .

Отметим, что у плоских многогранников растворы внешних клиньев равны $\mathcal{E}_1$. Легко получить следующий критерий простоты клиновых валюаций.

Лемма 3.1. Для того, чтобы клиновая валюация (3.2) с флаговой плотностью F была бы простой, необходимо и достаточно, чтобы для всех $P \in \mathbb{R}^3$ и $\Omega \in \mathcal{E}_2$ выполнялось

$$\int_{\mathcal{E}_1(\Omega)} F(P, \Omega, \phi) d\phi = 0. \quad (3.3)$$

Заметим, что если выполнено (3.3), то

$$m'_F(D) = \sum_{w \in In(D)} W(w), \quad D \in \mathcal{D},$$

где $In(D)$ – множество внутренних клиньев полиэдра D , также является простой валюацией и $m_F(D) = -m'_F(D)$.

Пример 1 (норма полиэдра, [11]). Инвариантная относительно евклидовых движений мера плоскостей, пересекающих заданный полиэдр $D \in \mathcal{D}$, имеет вид (см. [10])

$$m_1(D) = \sum_{(a, V) \in E(D)} |a| \cdot |V|, \quad D \in \mathcal{D}, \quad (3.4)$$

где $|a|$ – длина ребра a , а $|V|$ – величина раствора внешнего двугранного угла при ребре a . Функционал (3.4) является клиновой валюацией с флаговой плотностью $F_0(f) \equiv 1$. Он аддитивен в смысле Минковского и инвариантен относительно группы евклидовых движений. Однако, эта валюация не простая (нарушено условие (3.3)).

§4. ФРЕЙМОВЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПО РЕБРАМ

В этом параграфе напомним необходимые нам результаты о фреймовых валюациях (см. [8], [9]). Фреймом называется тройка

$$\vec{f} = (P, \omega, \varphi), \quad P \in \mathbb{R}^3, \quad \omega \in \mathcal{S}_2, \quad \varphi \in C_\omega \subset \mathcal{S}_2.$$

Назовём P основанием фрейма $\vec{f}$. Каждому фрейму $f = (P, \omega, \varphi)$ соответствует флаг (P, g, e) , где плоскость e проходит через точку P перпендикулярно направлению ω , а древко g перпендикулярно направлениям ω и φ . Отметим, что каждому флагу соответствуют 4 фрейма. В [7] вместо термина “фрейм” использовался термин “направленный флаг”.

Как и в предыдущем случае, можно построить топологию в пространстве фреймов. Фреймовая функция $\rho(P, \omega, \varphi)$ называется антисимметричной, если для всех точек $P \in \mathbb{R}^3$ имеем

$$\rho(P, \omega, \varphi) = -\rho(P, \bar{\omega}, \varphi) = -\rho(P, \omega, \bar{\varphi}) = \rho(P, \bar{\omega}, \bar{\varphi}), \quad (4.1)$$

где $\bar{\omega} \in \mathcal{S}_2$ – направление, противоположное ω . Центрированные и сильно центрированные фреймовые функции определяются аналогично флаговым функциям (см. §2).

Обозначим через $E(D)$ множество рёбер полиэдра D . Пусть $S(a)$ и $S^*(a)$ – две (двумерные) грани полиэдра D , которые содержат ребро $a \in E(D)$. Пусть $\omega \in \mathcal{S}_2$ – направление внешней нормали грани $S(a)$, а $\varphi \in C_\omega$ – направление нормали стороны a , внешней для многоугольника $S(a)$. Направления ω^* и φ^* определяются аналогично для грани S^* . Для заданной антисимметричной непрерывной фреймовой функции $\rho(\vec{f}) = \rho(P, \omega, \varphi)$ положим

$$\mu_\rho(D) = \sum_{a \in E(D)} \int_a [\rho(l, \omega, \varphi) + \rho(l, \omega^*, \varphi^*)] dl, \quad D \in \mathcal{D}, \quad (4.2)$$

где dl – мера длины на a . Можно показать, что функционал μ_ρ является простой валюацией [9]. Мы называем μ_ρ фреймовой валюацией с рёберной плотностью ρ . Если простая валюация μ обладает представлением (4.2) с некоторой фреймовой функцией ρ , то мы будем говорить, что μ обладает фреймовым представлением по рёбрам. (В §6 рассматриваются фреймовые представления по граням.)

Каждая простая валюация, удовлетворяющая определённым условиям гладкости, необходимо обладает фреймовым представлением по рёбрам. Обозначим через $H(P_1, P_2, P_3, P_4)$ тетраэдр с вершинами $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{R}^3$. Обозначим через $\frac{\partial}{\partial x_i} P$ производную по P в направлении координатной оси x_i .

Теорема 4.1, [9]. Если для тетраэдральных множеств D простая валюация $\mu(D)$ имеет непрерывные производные

$$\frac{\partial \mu(H(P_1, P_2, P_3, P_4))}{\partial x_k P_i}$$

по всем $P_i, i = 1, 2, 3, 4$ и $x_k, k = 1, 2, 3$, то $\mu(D)$ обладает фреймовым представлением по рёбрам $\mu = \mu_\rho$ с некоторой антисимметричной, сильно центрированной рёберной плотностью ρ .

Пример 2, [9]. Для фрейма $\bar{f} = (P, \omega, \varphi)$ пусть $f = (P, g, e)$ – соответствующий флаг. Перпендикулярную проекцию начала координат O на плоскость e обозначим через O' , а перпендикулярную проекцию точки O' на древко g обозначим через O'' . В плоскости, проходящей через точки O, O', O'' , рассмотрим декартову систему координат S_f с центром O'' и осевыми направлениями ω, φ . Пусть (x_0, y_0) – координаты начала координат O в S_f , в частности, $|x_0|$ равно длине $|OO'|$ отрезка OO' , $|y_0| = |O'O''|$. Валюация $L(D) =$ лебегова мера D обладает фреймовым представлением по рёбрам $L = \mu_{\rho_0}$ с плотностью $\rho_0(\bar{f}) = \frac{1}{6} x_0 y_0$. Отметим, что если плоскость e содержит начало координат O , то $x_0 = 0$. Следовательно, фреймовая функция ρ_0 сильно центрирована относительно O .

§5. СВЯЗЬ МЕЖДУ КЛИНОВЫМИ И ФРЕЙМОВЫМИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯМИ

В параграфе решается следующая задача: найти достаточные условия, при которых флаговая и рёберная плотности порождают валюации, которые тождественны. Подчеркнём, что эти плотности определены на различных пространствах (флагов и фреймов). Используя дуальные координаты, рассмотрим некоторые отображения.

Пусть $\Omega \in S_2$ и $\phi \in C_\Omega \subset S_2$. Дуальные направления $\omega \in S_2$ и $\varphi \in C_\omega \subset S_2$ получаются из условия взаимной ортогональности направлений Ω, ω, φ и равенства $\omega = \phi$. В отличие от случая флагов (см. §2), из этих условий автоматически не следует взаимная однозначность отображения между дуальными координатами. Однако, если мы дополнительно предположим, что направления Ω, ω, φ образуют

правую тройку, то отображение $(\Omega, \phi) \mapsto (\omega, \varphi)$ (дуальное отображение) будет взаимно-однозначным. Для антиподов имеем

$$(P, \bar{\Omega}, \phi) \mapsto (P, \omega, \bar{\varphi}), \quad (P, \Omega, \bar{\phi}) \mapsto (P, \bar{\omega}, \bar{\varphi}), \quad (P, \bar{\Omega}, \bar{\phi}) \mapsto (P, \bar{\omega}, \varphi). \quad (5.1)$$

Тогда условие антисимметричности (4.1) в дуальных координатах примет вид

$$\rho(P, \Omega, \phi) = \rho(P, \Omega, \bar{\phi}) = -\rho(P, \bar{\Omega}, \phi) = -\rho(P, \bar{\Omega}, \bar{\phi}). \quad (5.2)$$

Фреймовая функция ρ называется гладкой, если существует производная

$$\bar{F}(P, \Omega, \phi) = \frac{\partial \rho(P, \Omega, \phi)}{\partial \phi}, \quad (5.3)$$

которая непрерывна для любой точки $P \in \mathbb{R}^3$ и направления $\Omega \in S_2$. Отметим, что (5.3) имеет смысл, потому что каждая C_Ω имеет ориентацию (см. §2).

Лемма 5.1. Пусть задана гладкая фреймовая функция $\rho(\bar{f})$. Если $\rho(\bar{f})$ антисимметрична, то $\bar{F}$ симметрична, т.е.

$$\bar{F}(P, \Omega, \phi) = \bar{F}(P, \Omega, \bar{\phi}) = \bar{F}(P, \bar{\Omega}, \phi) = \bar{F}(P, \bar{\Omega}, \bar{\phi}). \quad (5.4)$$

Доказательство : Соотношение $\bar{F}(P, \Omega, \phi) = \bar{F}(P, \Omega, \bar{\phi})$ следует из (5.2). Как показано в §2, ориентации в C_Ω и $C_{\bar{\Omega}}$ взаимно противоположны. Из условия антисимметричности (5.2) получаем

$$\bar{F}(P, \bar{\Omega}, \phi) = \bar{F}(P, \bar{\Omega}, \bar{\phi}) = -\frac{\partial \rho(P, \Omega, \bar{\phi})}{\partial \phi} = -\frac{\partial [-\rho(P, \Omega, \phi)]}{\partial \phi} = \bar{F}(P, \Omega, \phi).$$

Лемма 5.1 доказана.

Согласно Лемме 5.1, на всех 4 фреймах, соответствующих одному и тому же флагу, значения производной (5.3) совпадают. Следовательно, фреймовой функции $\bar{F}$ естественным образом соответствует функция F в пространстве флагов. Будем говорить, что ρ порождает функцию F с помощью (5.3). Заметим, что F удовлетворяет условию (3.3), что следует из (5.2) и формулы Ньютона–Лейбница :

$$\int_{C_\Omega} F(P, \Omega, \phi) d\phi = \rho(P, \Omega, \phi_0) - \rho(P, \Omega, \bar{\phi}_0) = 0, \quad (5.5)$$

т.е. клиновая валюация (3.2) с флаговой плотностью F является простой (см. Лемму 3.1).

Теорема 5.1. Пусть $\rho(\bar{f})$ – гладкая антисимметричная фреймовая функция, а $F(f)$ – соответствующая флаговая функция. Тогда фреймовая валюация (4.2) с рёберной плотностью $\rho(\bar{f})$ и клиновая валюация (3.2) с флаговой плотностью $F(f)$ совпадают, т.е. $m_F = \mu_\rho$.

Доказательство : следует из формулы Ньютона–Лейбница.

Отметим, что для заданной валюации флаговая или рёберная плотности не единственны. В примере 2 рёберная плотность ρ_O при разных O порождает с помощью формулы (4.2) одну и ту же валюацию (лебегову меру). Из Теоремы 5.1 получаем достаточное условие, из которого вытекает, что разные рёберные плотности могут порождать одну и ту же фреймовую валюацию.

Следствие 5.1. Если разность двух антисимметричных фреймовых функций $\rho_1(P, \Omega, \phi)$ и $\rho_2(P, \Omega, \phi)$ не зависит от аргумента ϕ , то ρ_1 и ρ_2 порождают по формуле (4.2) одну и ту же валюацию $\mu_{\rho_1} \equiv \mu_{\rho_2}$.

Из свойства аддитивности (см. (4.2)) $\mu_{\rho_1 + \rho_2} = \mu_{\rho_1} + \mu_{\rho_2}$, получаем другое следствие.

Следствие 5.2. Всякая антисимметричная фреймовая функция $\rho_O(P, \Omega)$, не зависящая от ϕ , порождает по формуле (4.2) меру, тождественно равную нулю.

Пример 3. Для фрейма $\bar{f} = (P, \omega, \varphi)$ пусть $f = (P, g, e)$ – соответствующий флаг. Пусть перпендикуляр из начала координат O на древко g имеет длину r и направление ξ . Тогда (см. Пример 2) $x_O = r \cos \phi$, $y_O = r \sin \phi$, где ϕ – угол между ξ и ω . Рёберная плотность ρ_O имеет вид

$$\rho_O(\bar{f}) = \frac{1}{6} x_O y_O = \frac{1}{12} r^2 \sin 2\phi. \quad (5.6)$$

Дифференцируя (5.3), получим

$$F_O(f) = \frac{1}{6} r^2 \cos 2\phi. \quad (5.7)$$

Следовательно, клиновая валюация с флаговой плотностью F_O является лебеговой мерой L . Отметим, что если O лежит на плоскости e , то направления ξ и ω являются взаимно перпендикулярными, а если O лежит на древке g , то $r = 0$. Следовательно, флаговая функция (5.7) является центрированной относительно точки O (однако не является сильно центрированной), а фреймовая функция (5.6) является сильно центрированной относительно O .

§6. ФРЕЙМОВЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПО ГРАНЯМ

В [8] и [9] задача продолжения фреймовых валюаций на множества вне $\mathcal{D}$ изучалась с помощью "представлений по граням". Напомним некоторые необходимые результаты.

Рассмотрим класс $\mathcal{F}$ непрерывных фреймовых функций $u(\bar{f}) = u(P, \omega, \varphi) = u(P, \omega)$, которые не зависят от последнего аргумента φ . Для заданной функции $u \in \mathcal{F}$ рассмотрим функционал

$$M_u(D) = \iint_{\partial D} u(s, \omega) ds, \quad D \in \mathcal{D}, \quad (6.1)$$

где ds – мера площади на гранях полиэдра D , а $\omega \in S_2$ – направление внешней нормали в точке $s \in \partial D$ (в (6.1) ω остаётся постоянной на каждой грани полиэдра D).

Легко проверить, что функционал M_u является валюацией (не обязательно простой). Валюация M_u будет простой тогда и только тогда, когда функция u является зечётной, т.е. если для любых $P \in \mathbb{R}^3$ и $\omega \in S_2$ имеем

$$u(P, \omega) = -u(P, \bar{\omega}). \quad (6.2)$$

Если простая валюация M допускает представление $M = M_u$ для некоторой нечётной фреймовой функции $u(f) \in \mathcal{F}$, то будем говорить, что M допускает фреймовое представление по граням, а u называется граневой плотностью валюации M .

Заметим, что всякую валюацию, определённую на множестве полиэдров $\mathcal{D}$ и допускающую представление по граням с непрерывной граневой плотностью $u(s, \omega)$, можно непрерывно (в метрике Хаусдорфа) продолжить на множество $\mathcal{K}$ всех выпуклых тел. Это продолжение осуществляется с помощью следующей формулы (ср. (6.1))

$$M_u(K) = \iint_{\partial K} u(s, \omega) ds, \quad K \in \mathcal{K}.$$

Рассмотрим плоскость $e(P, \omega)$, проходящую через точку $P \in \mathbb{R}^3$ с направлением нормали $\omega \in S_2$. В e выберем декартовы координаты x, y . Рассмотрим фреймовую функцию $\rho(P, \omega, \varphi)$. Из условия $\varphi \in C_\omega$ вытекает, что направление φ лежит в плоскости e . отождествим φ с углом $\varphi \in [0, 2\pi)$ между соответствующим направлением и осью X в плоскости e . Символ $\frac{\partial \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial_x P}$ обозначает производную

ρ в направлении оси X . Фреймовая функция ρ называется гладкой, если существуют непрерывные производные $\frac{\partial \rho}{\partial x P}$ и $\frac{\partial \rho}{\partial y P}$. Статья [9] содержит следующую теорему.

Теорема 6.1, [9]. Пусть μ_ρ – простая валюация, обладающая фреймовым представлением по рёбрам с гладкой антисимметричной рёберной плотностью ρ .

а) Если для любых $P \in \mathbb{R}^3$ и $\omega \in S_2$ плотность ρ имеет вид

$$\rho(P, \omega, \varphi) = \rho_1(P, \omega) \cos \varphi + \rho_2(P, \omega) \sin \varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad (6.3)$$

где ρ_1 и ρ_2 суть некоторые функции из $\mathcal{F}$, то μ_ρ обладает фреймовым представлением по граням.

б) Если μ_ρ обладает фреймовым представлением по граням, а ρ сильно центрирована, то ρ необходимо имеет вид (6.3).

Отметим, что существование представления (6.3) не зависит от выбора координат x, y в плоскости $e(P, \omega)$. Используя понятие клиновой валюации и Теорему 5.1, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 6.2. Пусть μ_ρ – простая валюация, обладающая фреймовым представлением по рёбрам с гладкой антисимметричной рёберной плотностью ρ .

а) Если для любых $P \in \mathbb{R}^3$ и $\omega \in S_2$ плотность ρ имеет вид

$$\rho(P, \omega, \varphi) = \rho_1(P, \omega) \cos \varphi + \rho_2(P, \omega) \sin \varphi + \rho_3(P, \Omega), \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad (6.4)$$

где ρ_1 и ρ_2 суть некоторые функции из $\mathcal{F}$, а ρ_3 – фреймовая функция, не зависящая от направления ϕ в дуальных координатах, то μ_ρ обладает фреймовым представлением по граням.

б) Если μ_ρ обладает фреймовым представлением по граням и ρ центрирована (не обязательно сильно центрирована), то ρ необходимо имеет вид (6.4).

Доказательство : а) следует из Теоремы 6.1 и Следствия 5.1. Перейдём к доказательству б). Пусть фреймовая валюация μ_ρ обладает непрерывной рёберной плотностью ρ , центрированной относительно O , и допускает представление по граням. Рассмотрим фреймовую функцию $\rho_3(P, \Omega) = \rho(P, \Omega, 0)$, не зависящую от направления ϕ в дуальных координатах. Здесь начальная точка в S_Ω определена

в §2, а направление северного полюса есть направление из P в O . Для $\Omega =$ северному полюсу или его антиподу, мы определим $\rho_3(P, \Omega)$ равным нулю. Так как ρ центрирована, то ρ_3 непрерывна. Если фреймовая плоскость содержит точку O , то её направление нормали ω лежит на экваторе, т.е. $\nu_\omega = \pi/2$. Используя (2.1), получим $\tan \phi = 0$. Отсюда и из условия антисимметричности (5.2) получаем $\rho(P, \Omega, \phi) - \rho_3(P, \Omega) = 0$. Следовательно, разность $\rho - \rho_3$ является сильно центрированной фреймовой функцией. Согласно Следствию 5.1 имеем $\mu_\rho = \mu_{\rho - \rho_3}$. Поэтому, сильно центрированная фреймовая функция $\rho - \rho_3$ порождает фреймовую валюацию, обладающую представлением по граням. Согласно Теореме 6.1 имеем

$$\rho(P, \omega, \varphi) - \rho_3(P, \Omega) = \rho_1(P, \omega) \cos \varphi + \rho_2(P, \omega) \sin \varphi.$$

Теорема 6.2 доказана.

§7. ПРОДОЛЖЕНИЕ ДО МЕР ДЛЯ КЛИНОВЫХ ВАЛЮАЦИЙ

Предполагая, что существуют все необходимые производные первого порядка функций $\rho_1(P, \omega)$ и $\rho_2(P, \omega)$, продифференцируем (6.3) по ϕ . Вначале продифференцируем уравнения (2.1) – (2.3) по ϕ при фиксированном Ω . Согласно (2.1) имеем

$$\frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \tan \nu_\Omega \sin \phi d\phi. \quad (7.1)$$

Подставляя значение $\tan \nu_\Omega$ из (2.1) в (7.1), получаем $\frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \tan \varphi \tan \phi d\phi$. Используя второе уравнение в (2.1), получаем $\frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \tan \varphi \frac{\cot \nu_\omega}{\sin \varphi} d\phi$. Следовательно

$$\frac{d\varphi}{d\phi} = \cos \varphi \cot \nu_\omega. \quad (7.2)$$

Аналогично, из уравнений (2.2) и (2.3) получаем

$$\frac{d\psi_\omega}{d\phi} = \cos \varphi (\sin \nu_\omega)^{-1}, \quad \frac{d\nu_\omega}{d\phi} = \sin \varphi. \quad (7.3)$$

Дифференцируя, из (7.2), (7.3) получаем, что если фреймовая функция ρ , удовлетворяющая (6.3), порождает флаговую функцию F с помощью (5.3), то F обладает представлением

$$F(P, \omega, \varphi) = A_1(P, \omega) \cos^2 \varphi + A_2(P, \omega) \sin^2 \varphi + A_3(P, \omega) \sin \varphi \cos \varphi, \quad \varphi \in [0, \pi), \quad (7.4)$$

где A_1, A_2, A_3 суть некоторые флаговые функции, не зависящие от угла φ . Представление (7.4) можно переписать в эквивалентной форме

$$F(P, \omega, \varphi) = A(P, \omega) \cos 2\varphi + B(P, \omega) \sin 2\varphi + C(P, \omega), \quad \varphi \in [0, \pi), \quad (7.5)$$

где A, B, C суть некоторые флаговые функции, не зависящие от угла φ .

Теперь нашей целью является демонстрация того, что уравнение (7.5) есть необходимое условие продолжения меры для клиновых валюаций, определённых по флаговой плотностью F . Заданную непрерывную флаговую функцию F мы можем симметрично продолжить до фреймовой функции $\bar{F}$, используя (5.4) и рассматривая интеграл Лебега

$$\rho(P, \Omega, \phi) = \int_{[0, \phi]} \bar{F}(P, \Omega, \alpha) d\alpha. \quad (7.6)$$

Лемма 7.1. Если флаговая функция F удовлетворяет условию (3.3), то фреймовая функция (7.6) является антисимметричной.

Доказательство : Соотношение $\rho(P, \Omega, \phi) = \rho(P, \Omega, \bar{\phi})$ (см. (5.2)) следует из (3.3) и (5.5). Пусть $[0, \phi_\Omega]$ и $[0, \phi_{\bar{\Omega}}]$ – области интегрирования в (7.6) по C_Ω и $C_{\bar{\Omega}}$ соответственно. Как показано в §2, ориентации и начальные точки в C_Ω и $C_{\bar{\Omega}}$ взаимно противоположны. Следовательно, $[0, \phi_\Omega] \cup [0, \phi_{\bar{\Omega}}] = [0, \pi]$. Используя (3.3), получаем $\rho(P, \Omega, \phi) + \rho(P, \bar{\Omega}, \phi) = 0$. Лемма 7.1 доказана.

Фреймовая функция ρ , определённая с помощью (7.6), зависит от выбора начальной точки на C_Ω , и, вообще говоря, мы не можем гарантировать гладкость ρ . Если мы выбираем начальную точку на C_Ω как в §2, то гладкость $\rho(P, \Omega, \phi)$ нарушается при $\Omega =$ северный полюс или его антипод. Однако, мы можем получить гладкую фреймовую функцию с помощью (7.6), рассматривая центрированные функции.

Лемма 7.2. а) Пусть флаговая функция F порождает с помощью (7.6) фреймовую функцию ρ . Предположим, что направление на север в (7.6) является направлением из P в O . Если F центрирована относительно O и удовлетворяет условию (3.3), то ρ сильно центрирована относительно O .

б) Пусть антисимметричная фреймовая функция ρ порождает с помощью (5.3) флаговую функцию F . Если ρ сильно центрирована относительно точки O , то F центрирована относительно той же точки и удовлетворяет условию (3.3).

Доказательство : а) Пусть F центрирована относительно O и удовлетворяет условию (3.3). Рассмотрим фрейм $\bar{f} = (P, \omega, \varphi)$ и соответствующий флаг $f = (P, g, e) = (P, \Omega, \phi)$. Если $\Omega =$ северный полюс или её антипод, то $O \in g$. Так как F центрирована, мы имеем $F(f) = 0$. Следовательно, в (7.6) подынтегральное выражение равно нулю при любом выборе начальной точки в S_Ω . Следовательно, из $O \in g$ следует $\rho(\bar{f}) = 0$. В случае $O \in e$, $O \notin g$ направление ω лежит на экваторе, т.е. $\nu_\omega = \pi/2$. Используя (2.1), получаем $\tan \phi = 0$. Следовательно, ϕ равна 0 или π . Если $\phi = 0$, то $\rho(\bar{f}) = 0$ следует из (7.6). Если $\phi = \pi$, то $\rho(\bar{f}) = 0$ следует из (3.3).

б) Условие (3.3) следует из (5.5), и поэтому мы докажем, что F центрирована. Пусть $O \in g$. Так как ρ центрирована, то имеем $\rho(\bar{f}) = 0$ для любого ϕ , т.е. в (5.3) мы дифференцируем функцию, которая является тождественным нулём. Следовательно, $F(f) = 0$. Лемма 7.2 доказана.

Теперь мы в состоянии доказать основной результат статьи.

Теорема 7.1. Пусть F – непрерывная, центрированная флаговая функция, удовлетворяющая условию (3.3). Если простая клиновая валюация (3.2) с флаговой плотностью F порождает знакопеременную меру, абсолютно непрерывную относительно лебеговой меры, то F необходимо обладает представлением (7.5) для любых $P \in \mathbb{R}^3$ и $\omega \in S_2$.

Доказательство : Пусть F порождает по формуле (7.6) фреймовую функцию ρ . Так как F центрирована и удовлетворяет условию (3.3), то согласно Лемме 7.1 ρ является антисимметричной, а по Лемме 7.2 ρ является сильно центрированной. Из (7.6) получаем, что ρ порождает F с помощью формулы (5.3). Согласно Теореме 5.1 клиновая валюация (3.2) обладает фреймовым представлением по рёбрам с плотностью $\rho : m_F = \mu_\rho$. Так как m_F порождает знакопеременную меру, абсолютно непрерывную относительно лебеговой меры, то по формуле Гаусса-Остроградского (см. [9]), m_F необходимо обладает фреймовым представлением по граням. Так как ρ сильно центрирована и $\mu_\rho = m_F$ обладает представлением по граням, то согласно Теореме 6.1 получаем представление (6.3). Наконец, из (6.3) получаем (7.5). Теорема 7.1 доказана.

Пример 4. Сужение лебеговой меры на $\mathcal{D}$ является валюацией с флаговой плотностью (5.7) (см. Пример 3) и порождает лебегову меру L . Ясно, что флаговая плотность (5.7) центрирована (относительно начала координат O) и

имеет вид (7.5).

В другом контексте о валюациях в пространстве плоскостей, условие (7.5) появляется в [3] и указывает на внутренние связи, существующие между двумя предметами.

ABSTRACT. The paper considers valuations that live on polytopes in Euclidean space $\mathbb{R}^3$. The valuations are expressed by functions that are defined in the space of "wedges". The wedge functions, in turn, are constructed by means of so-called flag densities. Conditions in terms of flag densities are obtained, under which valuations generate locally finite signed measures.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Р. В. Амбарцумян, "О конечно-аддитивных функционалах в $\mathbb{R}^3$ ", Изв. НАН Армении, Математика, том 28, № 2, стр. 51 – 59, 1993.
2. R. V. Ambartzumian, "Measure generation by Euler functionals", Adv. Appl. Prob. (SGSA), vol. 27, pp. 606 – 626, 1995.
3. Р. В. Амбарцумян, В. К. Оганян, "Конечно-аддитивные функционалы в пространстве плоскостей", Изв. НАН Армении, Математика, том 29, № 4, стр. 1 – 57, 1994.
4. В. К. Оганян, А. Н. Давтян, "Конечно-аддитивные функционалы в пространстве плоскостей, II", Изв. НАН Армении, Математика, том 31, № 4, стр. 53 – 89, 1996.
5. Р. Г. Арамян, "Порождение мер в пространстве плоскостей и сферические эйлеровы функционалы", Изв. НАН Армении, Математика, том 29, № 4, стр. 58 – 74, 1994.
6. Г. Ю. Панина, "О клиновых плотностях в R^3 ", Изв. НАН Армении, Математика, том 29, № 1, стр. 76 – 82, 1994.
7. Г. С. Сукиасян, "Конечно-аддитивные функционалы на плоскости", Изв. НАН Армении, Математика, том 29, № 4, стр. 75 – 89, 1994.
8. Г. С. Сукиасян, "О многомерных простых фреймовых валюациях", Изв. НАН Армении, Математика, том 31, № 4, стр. 90 – 104, 1996.
9. Г. С. Сукиасян, "Иерархия простых валюаций в $\mathbb{R}^3$ ", Изв. НАН Армении, Математика, том 33, № 4, стр. 79 – 91, 1998.
10. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology, J.Wiley, Chichester, 1982.
11. Г. Хадвигер, Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии, М., Наука, 1967.

2 июня 1999

Институт математики
НАН Армении
E-mail : haikarin@netsys.am