ПОДХОД К ОБОБЩЁННЫМ УРАВНЕНИЯМ ФУНКА, I

Р. Г. Арамян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 36, № 1, 2001

Некоторые результаты в теории выпуклых тел приводят к интегральным уравнениям определённого типа на сфере. Они обобщают хорошо известное интегральное уравнение Функа. Настоящая статья предлагает метод "согласования" для решения этих интегральных уравнений и проверяет этот метод в случае классического уравнения Функа. Один из параграфов посвящён демонстрации того, как эти уравнения возникают при изучении проекций выпуклых тел.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Некоторые результаты в теории выпуклых тел (см. §1) приводят к следующей задаче. Пусть $\mathbf{S}^2$ – единичная сфера (пространство направлений) в $\mathbb{R}^3$, а $\mathbf{S}^\omega \subset \mathbf{S}^2$ – большой круг с полюсом $\omega \in \mathbf{S}^2$. Предположим, что для некоторой неизвестной функции $f(\Omega)$, определённой на $\mathbf{S}^2$, нам известны интегралы

$$F(\omega, \psi) = \int_{\mathbf{S}^\omega} A(\omega, \psi, \varphi) f_\omega(\varphi)\, d\varphi. \tag{0.1}$$

Ядро $A(\omega, \psi, \varphi)$ определяется для любого $\omega \in \mathbf{S}^2$, $\varphi \in \mathbf{S}^\omega$ и $\psi \in \mathbf{S}^\omega$, а $d\varphi$ – мера на $\mathbf{S}^\omega$, которая инвариантна относительно вращений вокруг оси ω. Под интегралом функция $f_\omega(\varphi)$ является сужением неизвестной функции $f(\Omega)$ на окружность $\mathbf{S}^\omega$. Задача состоит в нахождении $f(\Omega)$. При $A(\omega, \psi, \varphi) \equiv 1$ задача сводится к классической задаче Функа [1]. Наш метод решения уравнения (0.1) состоит в следующем. Для каждого $\omega \in \mathbf{S}^2$ рассмотрим уравнение (0.1) как интегральное уравнение на окружности $\mathbf{S}^\omega$, общее решение $g(\omega, \varphi)$ которого запишем в виде ряда Фурье по переменной φ. Мы будем использовать условие согласования

$$g(\omega, \varphi) = g(\Omega), \tag{0.2}$$

где величины $\Omega \in \mathbf{S}^2$ и $\varphi \in \mathbf{S}^\omega$ представляют одну и ту же точку на $\mathbf{S}^2$. Вообще говоря, пару (ω, φ) можно дуально представить как $(\omega, \varphi) = (\Omega, \phi)$, где Ω –

пространственное направление, которое соответствует φ для заданного ω, а ϕ – вращение вокруг Ω, соответствующее направлению ω. Следовательно, (0.2) эквивалентно условию, что нет зависимости от переменной ϕ :

$$g(\Omega, \phi) = g(\Omega). \tag{0.3}$$

Изучение следствий, вытекающих из условия (0.3) для коэффициентов ряда Фурье, является сущностью нашего метода, и по–видимому полезного подхода к решению уравнения (0.1) в случае общих ядер. В действительности, если $g(\omega, \varphi)$ удовлетворяет (0.2) и определяется единственным способом, то необходимо $f(\Omega) = g(\Omega)$.

В этой статье мы применяем метод согласования в простейшем случае задачи Функа ($A \equiv 1$, $F(\omega, \psi) = F(\omega)$). Отметим, что эта статья является первым шагом в использовании метода согласования к другим ядрам.

Решение задачи Функа мы получаем в виде

$$2\pi f(\Omega) = \int_{\mathbf{S}^\Omega} F_\Omega(\varphi)\, d\varphi + \lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{2\pi} (F(u,\tau))'_u\, d\tau\right] W_n(u)\, du, \tag{0.4}$$

где (u, τ) – обычные сферические координаты ω относительно полюса Ω. Последовательность тригонометрических многочленов $W_n(u)$ точно вычисляется в последнем параграфе. В конце статьи мы сравниваем этот результат с классическим решением, описанным в книге В. Бляшке [2].

§1. МОТИВАЦИЯ

В этом параграфе мы демонстрируем, как уравнение (0.1) видется в контексте теории выпуклых тел. Рассмотрим центрированные выпуклые тела $\mathbf{K} \subset \mathbb{R}^3$, т.е. имеющие центр симметрии в начале координат в $\mathbb{R}^3$. Опорная функция $H(\xi)$ произвольного достаточно гладкого $\mathbf{K}$ из вышеуказанного класса имеет единственное представление вида (см. [2])

$$H(\xi) = \int_{\mathbf{S}^2} |\, (\xi, \Omega)\, |\, h(\Omega)\, d\Omega, \tag{1.1}$$

где $d\Omega$ – элемент обычной лебеговой меры на $\mathbf{S}^2$, $h(\Omega)$ – чётная, непрерывная, не обязательно неотрицательная функция. Функция $h(\Omega)$ называется **порождающей плотностью** тела $\mathbf{K}$.

Используем обозначения :

$e(\omega, \xi)$ = плоскость в $\mathbb{R}^3$, содержащая начало координат и параллельная пространственным направлениям ξ и ω, $\xi \neq \omega$,

$\mathbf{K}(\omega,\xi)$ = проекция тела $\mathbf{K}$ на плоскость $e(\omega,\xi)$,

$R(\omega,\xi)$ – радиус кривизны $\partial\mathbf{K}(\omega,\xi)$ в точке с нормальным направлением ω, где $\xi,\ \omega\in\mathbf{S}^2$, $\xi\neq\omega$

$\alpha(\xi,\omega,\varphi)$ = угол между $\varphi\in\mathbf{S}^\omega$ и прямой, перпендикулярной к ξ и ω.

Отметим, что ядро $\sin^2\alpha(\xi,\omega,\varphi)$ в (1.2) изучалось в [4 — 7].

Теорема 1.1. Для любого достаточно гладкого центрированного выпуклого тела $\mathbf{K}$ и $\xi,\ \omega\in\mathbf{S}^2$, $\xi\neq\omega$ имеем

$$R(\omega,\xi)=2\int_{\mathbf{S}^\omega}\sin^2\alpha(\xi,\omega,\varphi)\,h_\omega(\varphi)\,d\varphi, \tag{1.2}$$

где $h_\omega(\varphi)$ – сужение порождающей плотности $h(\Omega)$ тела $\mathbf{K}$ на $\mathbf{S}^\omega$.

Доказательство : Опорная функция тела $\mathbf{K}(\omega,\xi)$ является сужением $H(\xi)$ на большой круг $\mathbf{S}^2\cup e(\omega,\xi)$. Пусть λ – плоское направление в $e(\omega,\xi)$, которое соответствует ω. Рассмотрим координатную систему (x,y,z), где (x,y) изменяются в $e(\omega,\xi)$, z – перпендикулярна к $e(\omega,\xi)$. Имеем $\omega=\omega(\lambda)=(\cos\lambda,\ \sin\lambda,\ 0)$. Согласно [2] имеем

$$R(\omega,\xi)=R(\lambda)=H(\lambda)+H''(\lambda), \tag{1.3}$$

где $H(\lambda)=H(\omega(\lambda))$. Из (1.3) получаем

$$H(\lambda)=\int_{\mathbf{S}^2}|\,(\omega(\lambda),\Omega)\,|\;h(\Omega)\,d\Omega=2\int_{\{\Omega:\ (\omega,\Omega)\geq 0\}}(\Omega_1\cos\lambda+\Omega_2\sin\lambda)\,h(\Omega)\,d\Omega,$$

где $\Omega=(\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3)$. Дифференцируя, получаем

$$H'(\lambda)=2\int_{\{\Omega:\ (\omega,\Omega)\geq 0\}}(-\Omega_1\sin\lambda+\Omega_2\cos\lambda)\,h(\Omega)\,d\Omega.$$

Пусть $\Omega=(\varphi,\eta)$, где (φ,η) суть сферические координаты относительно z (φ – широта, а η – долгота). Используя $d\Omega=\sin\varphi\,d\varphi d\eta$, получаем

$$H''(\lambda)=2\int_{\{\Omega:\ (\omega,\Omega)\geq 0\}}(-\Omega_1\cos\lambda-\Omega_2\sin\lambda)\,h(\Omega)\,d\Omega+2\int_{\mathbf{S}^\omega}\sin^2\varphi\,h(\varphi,\lambda+\frac{\pi}{2})\,d\varphi.$$

Так как $\varphi=\alpha(\xi,\omega,\varphi)$, после подстановки в (1.3) получаем (1.2). Доказательство завершено.

Пусть в сферических координатах относительно ω, $\xi=(\tau,\psi)$ (τ – широта, а ψ – долгота). Легко видеть, что $R(\omega,\xi)$ не зависит от τ, и поэтому имеем

$$R(\omega,\xi)=R(\omega,\psi). \tag{1.4}$$

Итак, (1.2) в действительности имеет вид уравнения (0.1) с

$$A(\omega,\psi,\varphi)=\sin^2\alpha(\xi,\omega,\varphi)\ \text{ и }\ F(\omega,\psi)=R(\omega,\xi), \tag{1.5}$$

а порождающая плотность является одним из решений соответствующего уравнения (0.1). В случае, когда уравнение (1.2) имеет единственное решение, оно совпадает с порождающей плотностью выпуклого тела **K**. Это решение может представлять интерес в вопросах восстановления по проекциям.

§2. ЗАДАЧА ФУНКА И МЕТОД СОГЛАСОВАНИЯ

Пусть для гладкой и чётной функции $f(\Omega)$, определённой на сфере $\mathbf{S}^2$, мы знаем интегралы

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{S}^\omega} f_\omega(\varphi)\,d\varphi, \tag{2.1}$$

где $f_\omega(\varphi)$ – сужение функции $f(\Omega)$ на $\mathbf{S}^\omega$.

Задача Функа : восстановить функцию $f(\Omega)$ в терминах $F(\omega)$ (см. [1] и [3]). Популярной литературой по этой задаче и по классическому решению является монография [2]. Мы намерены решить эту задачу, применяя метод согласования, описанный во Введении.

Для фиксированного $\omega\in\mathbf{S}^2$ рассмотрим уравнение (2.1) как интегральное уравнение на окружности $\mathbf{S}^\omega$. Для того, чтобы записать общее решение уравнения в виде ряда Фурье по переменной φ нам нужно определить координатную систему на каждой $\mathbf{S}^\omega$.

Рассмотрим обычную сферическую координатную систему $\omega=(\nu,\tau)$ на $\mathbf{S}^2$, где $\nu\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ – широта , а $\tau\in[0,2\pi)$ – долгота. Обозначим через $\mathcal{P}$ соответствующие полюса. Выберем координатную систему для каждой $\mathbf{S}^\omega$, $\omega\in\mathbf{S}^2\setminus\mathcal{P}$ следующим образом (см. Рис. 1). Для $\omega\in\mathbf{S}^2$ ось Y касательна к меридиану через ω, а ось X перпендикулярна оси Y.

Зафиксируем $\omega\in\mathbf{S}^2\setminus\mathcal{P}$. Любое непрерывное чётное решение $g(\varphi)=g_\omega(\varphi)$, удовлетворяющее уравнению

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{S}^\omega} g(\varphi)\,d\varphi, \tag{2.2}$$

представляется следующим рядом Фурье :

$$g(\varphi)=F(\omega)+\sum_{\substack{n=2k\\ k=1,2,3,\dots}}[C_n\cos n\varphi+S_n\sin n\varphi], \tag{2.3}$$

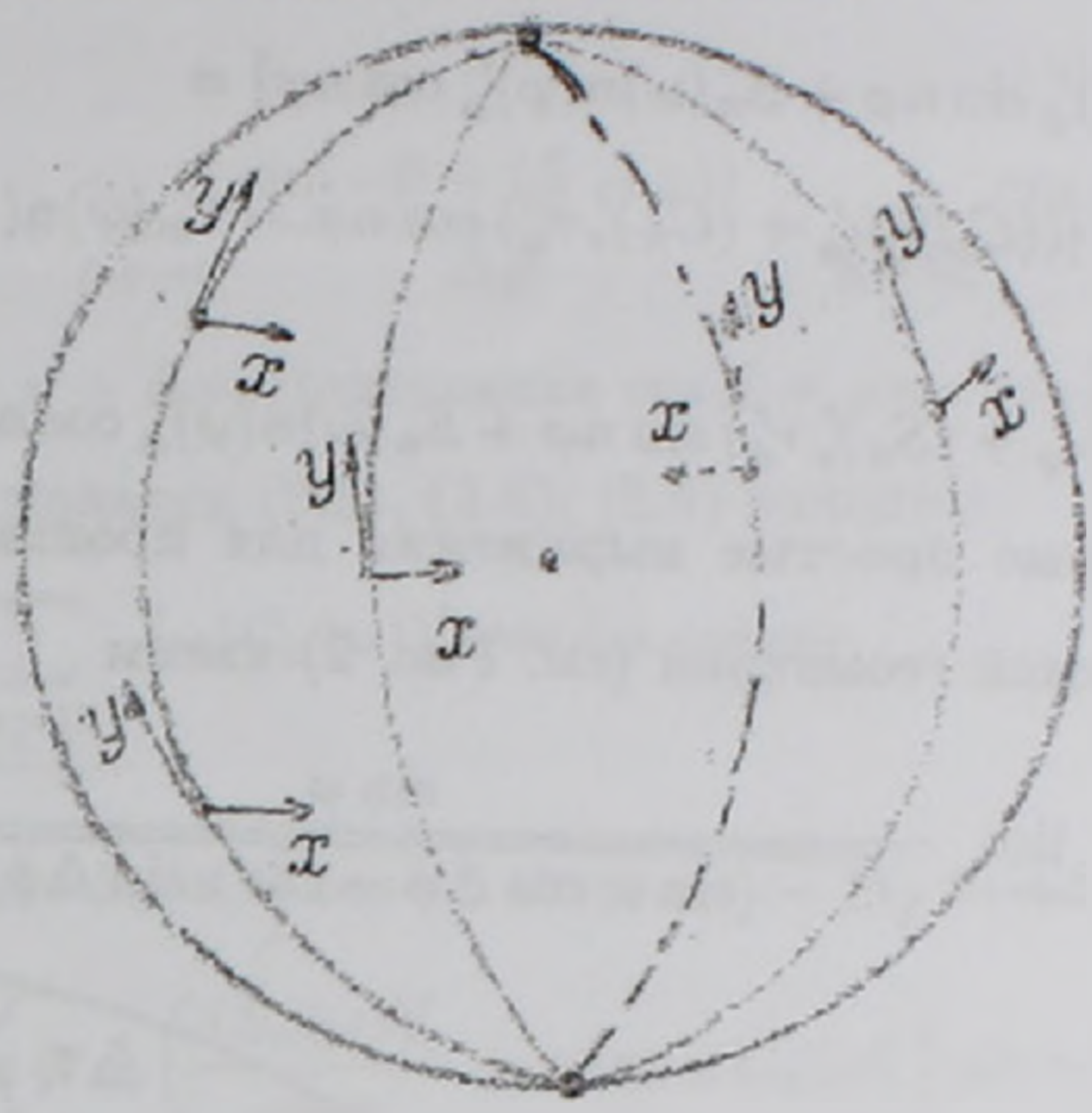

Рис. 1.

где C_n и S_n – действительные числа.

Действительно, легко видеть, что $g(\varphi) \equiv F(\omega)$ является решением уравнения (2.2), а общее непрерывное чётное решение однородного уравнения в терминах ряда Фурье имеет вид $\hat{g(\varphi)} = \sum\limits_{\substack{n=2k \\ k=1,2,\dots}} [C_n \cos n\varphi + S_n \sin n\varphi]$.

Определение. Пусть $\{g_\omega(\varphi)\}$ – семейство функций, где $g_\omega(\varphi)$ – функция на $\mathbf{S}^\omega$ для $\omega \in \mathbf{S}^2$. Семейство $\{g_\omega(\varphi)\}$ состоятельно, если существует функция $h(\Omega)$, определённая на $\mathbf{S}^2$, сужение которой на $\mathbf{S}^\omega$ совпадает с $g_\omega(\varphi)$ для каждого ω.

Каждое состоятельное решение уравнения (2.2) является решением задачи Функа. Теперь рассмотрим C_n и S_n из (2.3) как функции от ω и обозначим их через $C_n(\omega)$ и $S_n(\omega)$. Попробуем найти вид $C_n(\omega)$ и $S_n(\omega)$ из условия, что $g_\omega(\varphi)$ является состоятельным решением. Запишем $g_\omega(\varphi)$ в дуальных координатах $g_\omega(\varphi) = g(\omega, \varphi) = g(\Omega, \phi)$ и потребуем, чтобы $g(\Omega, \phi)$ не зависело бы от ϕ для каждого $\Omega \in \mathbf{S}^2$. Для любого $\Omega \in \mathbf{S}^2$ имеем

$$0 = (g(\Omega, \phi))'_\phi = (F(\omega(\Omega, \phi)) +$$
$$+ \sum_{\substack{n=2k \\ k=1,2,\dots}} [C_n(\omega(\Omega, \phi)) \cos (n\varphi(\Omega, \phi)) + S_n(\omega(\Omega, \phi)) \sin (n\varphi(\Omega, \phi))])'_\phi$$

Здесь и ниже $(\cdot)'_\phi$ обозначает производную, соответствующую вращению вокруг Ω согласно правилу буравчика. Имея в виду, что $\omega = (\nu, \tau)$, получаем

$$-(F(\omega(\Omega, \phi)))'_\phi = \sum_{\substack{n=2k \\ k=1,2,\dots}} [(C_n(\omega))'_\phi \cos n\varphi - C_n(\omega) n(\varphi)'_\phi \sin n\varphi +$$

$$+ (S_n(\omega))'_\phi \sin n\varphi + S_n(\omega) n(\varphi)'_\phi \cos n\varphi] =$$

$$= \sum_{\substack{n=2k \\ k=1,2,\dots}} [((C_n)'_\nu \nu'_\phi + (C_n)'_\tau \tau'_\phi) \cos n\varphi - C_n(\omega) n(\varphi)'_\phi \sin n\varphi + \tag{2.4}$$

$$+ ((S_n)'_\nu \nu'_\phi + (S_n)'_\tau \tau'_\phi) \sin n\varphi + S_n(\omega) n(\varphi)'_\phi \cos n\varphi].$$

Нам нужны некоторые простые выражения для производных τ'_ϕ, φ'_ϕ, ν'_ϕ. По формуле из сферической геометрии (см. Рис. 2) имеем

$$\tau'_\phi = \lim_{\Delta\phi\to 0} \frac{\Delta\tau}{\Delta\phi} = \lim_{\Delta\phi\to 0} \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-(\sin\nu\,\cos\Delta\phi - \cos\nu\sin\Delta\phi\cos\varphi)^2}} = \frac{\sin\varphi}{\cos\nu}. \tag{2.5}$$

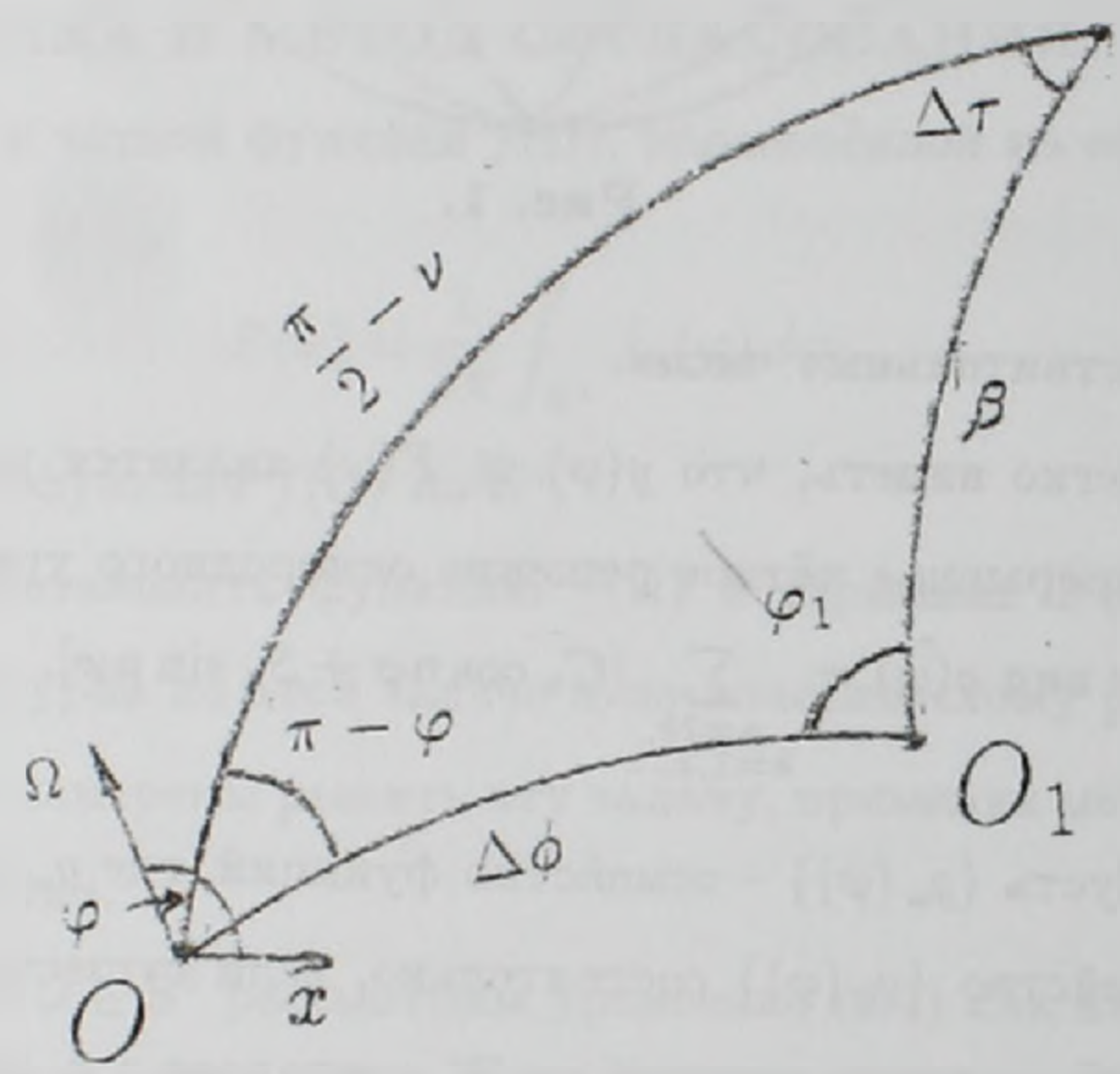

Рис. 2.

Далее

$$\varphi'_\phi = -\tan\nu\,\sin\varphi. \tag{2.6}$$

Доказательство :

$$\varphi'_\phi = \lim_{\Delta\phi\to 0} \frac{\sin(\varphi_1-\varphi)}{\Delta\phi} = \lim_{\Delta\phi\to 0} \frac{\sin\varphi_1\,\cos\varphi - \cos\varphi_1\,\sin\varphi}{\Delta\phi}, \tag{2.7}$$

где $\varphi_1 = \varphi + \Delta\varphi$. Из Рис. 2 имеем $\varphi_1 = \angle OO_1\mathcal{P}$. Также имеем

$$\frac{\cos\nu}{\sin\varphi_1} = \frac{\sqrt{1-(\cos\Delta\phi\,\sin\nu - \cos\nu\,\sin\Delta\phi\,\cos\varphi)^2}}{\sin\varphi}. \tag{2.8}$$

Из (2.8) получаем

$$\cos\varphi_1 = \frac{\sin\nu\,\sin\Delta\phi + \cos\nu\,\cos\varphi\,\cos\Delta\phi}{\sqrt{1-(\cos\Delta\phi\,\sin\nu - \cos\nu\,\sin\Delta\phi\,\cos\varphi)^2}}.$$

После соответствующих подстановок в (2.7) приходим к (2.6). Наконец

$$\nu'_\phi = -\cos\varphi. \tag{2.9}$$

Доказательство :

$$\nu'_\phi = \lim_{\Delta\phi\to 0}\frac{\nu_1-\nu}{\Delta\phi} = \lim_{\Delta\phi\to 0}\frac{\sin(-\beta+(\frac{\pi}{2}-\nu))}{\Delta\phi} = \lim_{\Delta\phi\to 0}\frac{\cos\beta\,\cos\nu - \sin\beta\,\sin\nu}{\Delta\phi},$$

где $\beta = \frac{\pi}{2} - \nu_1$, $\nu_1 = \nu + \Delta\nu$. Подставляя $\cos\beta = \sin\nu\,\cos\Delta\phi - \cos\nu\,\sin\Delta\phi\,\cos\varphi$ приходим к (2.9). Используя (2.5), (2.6), (2.9) находим

$$\begin{aligned}
&-(F(\omega(\Omega,\phi))'_\phi = \sum_{\substack{n=2k\\k=1,2,\ldots}} [-(C_n(\omega))'_\nu \cos n\varphi\,\cos\varphi + \\
&+\left(\frac{(C_n(\omega))'_\tau}{\cos\nu} - n\tan\nu\,S_n(\omega)\right)\cos n\varphi\,\sin\varphi - \\
&-(S_n(\omega))'_\nu \sin n\varphi\,\cos\varphi + \left(\frac{(S_n(\omega))'_\tau}{\cos\nu} + n\tan\nu\,C_n(\omega)\right)\sin n\varphi\,\sin\varphi\Bigg].
\end{aligned}\tag{2.10}$$

Произведения тригонометрических функций заменим суммами. Группируя слагаемые, получаем

$$\begin{aligned}
&-2\,(F(\omega(\Omega,\phi))'_\phi = \\
&= \sum_{\substack{n=2k\\k=1,2,\ldots}} \Bigg[\left(-(C_n(\omega))'_\nu - \frac{(S_n(\omega))'_\tau}{\cos\nu} - n\tan\nu\,C_n(\omega)\right)\cos(n+1)\varphi + \\
&+\left(-(C_n(\omega))'_\nu + \frac{(S_n(\omega))'_\tau}{\cos\nu} + n\tan\nu\,C_n(\omega)\right)\cos(n-1)\varphi + \\
&+\left(-(S_n(\omega))'_\nu + \frac{(C_n(\omega))'_\tau}{\cos\nu} - n\tan\nu\,S_n(\omega)\right)\sin(n+1)\varphi + \\
&+\left(-(S_n(\omega))'_\nu - \frac{(C_n(\omega))'_\tau}{\cos\nu} + n\tan\nu\,S_n(\omega)\right)\sin(n-1)\varphi\Bigg].
\end{aligned}\tag{2.11}$$

Если $\omega \in \mathrm{S}^2 \setminus \mathcal{P}$ и Ω заменено на S^ω, то (2.11) примет вид ряда Фурье функции $-(2F(\omega))'_\phi$. Из единственности коэффициентов ряда Фурье вытекает

$$\begin{aligned}
-(C_2(\omega))'_\nu + \frac{(S_2(\omega))'_\tau}{\cos\nu} + 2\tan\nu\,C_2(\omega) &= -\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}(F(\omega))'_\phi\cos\varphi\,d\varphi,\\
-(S_2(\omega))'_\nu - \frac{(C_2(\omega))'_\tau}{\cos\nu} + 2\tan\nu\,S_2(\omega) &= -\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}(F(\omega))'_\phi\sin\varphi\,d\varphi
\end{aligned}\tag{2.12}$$

и

$$\begin{aligned}
&-(C_n(\omega))'_\nu - \frac{(S_n(\omega))'_\tau}{\cos\nu} - n\tan\nu\,C_n(\omega) - (C_{n+2}(\omega))'_\nu + \frac{(S_{n+2}(\omega))'_\tau}{\cos\nu} + \\
&+(n+2)\tan\nu\,C_{n+2}(\omega) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}(F(\omega))'_\phi\cos(n+1)\varphi d\varphi - \\
&-(S_n(\omega))'_\nu + \frac{(C_n(\omega))'_\tau}{\cos\nu} - n\tan\nu\,S_n(\omega) - (S_{n+2}(\omega))'_\nu - \frac{(C_{n+2}(\omega))'_\tau}{\cos\nu} + \\
&+(n+2)\tan\nu S_{n+2}(\omega) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}(F(\omega))'_\phi\sin(n+1)\varphi d\varphi,
\end{aligned}\tag{2.13}$$

для $n = 2k$, $k = 1, 2, \ldots$.

§3. УСРЕДНЕНИЕ

Возвращаясь к формуле (2.3), имеем $\Omega \in \mathbf{S}^2$ для полюса, и поэтому $\varphi = \frac{\pi}{2}$ для каждого $\tau \in [0, 2\pi)$. Следовательно, (2.3) при $\omega = (0, \tau)$ принимает вид

$$h(\Omega) = F(0,\tau) + \sum_{\substack{n=2k\\ k=1,2,\dots}} C_n(0,\tau)(-1)^{\frac{n}{2}}. \tag{3.1}$$

Естественно проинтегрировать обе части (3.1) относительно равномерной угловой меры $d\tau$ на $[0, 2\pi)$. Получаем

$$2\pi h(\Omega) = \int_0^{2\pi} F(0,\tau)d\tau + \sum_{\substack{n=2k\\ k=1,2,\dots}} (-1)^{\frac{n}{2}} \int_0^{2\pi} C_n(0,\tau)d\tau. \tag{3.2}$$

Теперь задача сводится к вычислению

$$\int_0^{2\pi} C_n(0,\tau)d\tau = \overline{C}_n(0). \tag{3.3}$$

Интегрируя (2.12) и (2.13) относительно $d\tau$ мы не теряем решения. Принимая во внимание, что $\int_0^{2\pi}(S_n(\nu,\tau))'_\tau\, d\tau = 0$, для $\nu \in [0, \frac{\pi}{2})$ получаем

$$\begin{cases} (\overline{C}_2(\nu))'_\nu - 2\overline{C}_2(\nu)\tan\nu = T_1(\nu), \\ (\overline{C}_n(\nu))'_\nu + n\overline{C}_n(\nu)\tan\nu + (\overline{C}_{n+2}(\nu))'_\nu - (n+2)\overline{C}_{n+2}(\nu)\tan\nu = T_{n+1}(\nu), \end{cases} \tag{3.4}$$

для $n = 2k$, $k = 1, 2, \dots$ имеем

$$\overline{C}_n(\nu) = \int_0^{2\pi} C_n(\nu,\tau)\,d\tau \quad \text{и} \quad T_n(\nu) = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (F(\omega))'_\varphi \cos n\varphi\, d\varphi\, d\tau. \tag{3.5}$$

Рассмотрим (3.4) как (бесконечную) систему дифференциальных уравнений для неизвестных коэффициентов $\overline{C}_n(\nu)$. Нам нужны граничные условия для этой системы. Из (2.2) получаем

$$C_n(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (g_\omega(\varphi) - F(\omega))\cos n\varphi\, d\varphi. \tag{3.6}$$

Заметим, что $\omega = (\frac{\pi}{2}, \tau) = \mathcal{P}_1$ – полюс, а τ определяет положение фрейма. Подставляя (3.6) в (3.5), находим

$$\overline{C}_n(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (g_{\mathcal{P}_1}(\varphi) - F(\mathcal{P}_1))\cos n(\varphi - \tau)\,d\tau\, d\varphi = 0. \tag{3.7}$$

Следовательно, для коэффициентов $\overline{C}_n(0)$ имеем дифференциальные уравнения (3.4) с граничными условиями (3.7).

§4. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим первое уравнение в (3.4) с граничным условием

$$(\overline{C}_2(\nu))'_\nu - 2\overline{C}_2(\nu)\tan\nu = T_1(\nu), \quad \nu \in [0, \frac{\pi}{2}), \ \overline{C}_2(\frac{\pi}{2}) = 0. \tag{4.1}$$

Соответствующее однородное уравнение

$$\frac{d\overline{C}_2(\nu)}{\overline{C}_2(\nu)} = 2\tan\nu\, d\nu \quad \text{или} \quad \ln|\,\overline{C}_2(\nu)\,| = -2\ln|\cos\nu| + c, \tag{4.2}$$

имеет решение $\overline{C}_2(\nu) = \frac{c}{\cos^2\nu}$. Мы ищем решение (4.1) в виде $\overline{C}_2(\nu) = \frac{c(\nu)}{\cos^2\nu}$. Подставляя (4.2) в (4.1) и принимая во внимание граничное условие, находим

$$\overline{C}_2(\nu) = -\frac{1}{\cos^2\nu}\int_\nu^{\frac{\pi}{2}} T_1(u)\cos^2 u\, du, \tag{4.3}$$

поэтому

$$\overline{C}_2(0) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} T_1(u)\cos^2 u\, du. \tag{4.4}$$

Из (3.4) получаем рекуррентную систему уравнений

$$\begin{cases} (\overline{C}_4(\nu))'_\nu - 4\overline{C}_4(\nu)\tan\nu = T_3(\nu) - T_1(\nu) - 4\overline{C}_2(\nu)\tan\nu \\ (\overline{C}_6(\nu))'_\nu - 6\overline{C}_6(\nu)\tan\nu = T_5(\nu) - T_3(\nu) + T_1(\nu) + 4\overline{C}_2(\nu)\tan\nu - 8\overline{C}_4(\nu)\tan\nu \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ (\overline{C}_{2k}(\nu))'_\nu - 2k\overline{C}_{2k}(\nu)\tan\nu = (-1)^k\sum_{i=1}^{k}(-1)^i T_{2i-1}(\nu) + \\ +(-1)^k\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^i 4i\overline{C}_{2i}(\nu)\tan\nu. \end{cases} \tag{4.5}$$

По существу, они имеют тот же вид, что и (4.1). Следовательно

$$\begin{aligned} \overline{C}_{2k}(\nu) = -\frac{1}{\cos^{2k}\nu}\int_\nu^{\frac{\pi}{2}} &[(-1)^k\sum_{i=1}^{k}(-1)^i T_{2i-1}(u) + \\ &+ (-1)^k\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^i 4i\overline{C}_{2i}(u)\tan u]\cos^{2k} u\, du. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Для величины $\nu = 0$ получаем

$$\overline{C}_{2k}(0) = (-1)^{k+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sum_{i=1}^{k}(-1)^i T_{2i-1}(u) + \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^i 4i\overline{C}_{2i}(u)\tan u]\cos^{2k} u\, du. \tag{4.7}$$

§5. ЧАСТИЧНЫЕ СУММЫ РЯДА

Как следует из теоремы существования задачи Функа ряд (см. (3.2)-(3.3))

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\overline{C}_{2k}(0) \tag{5.1}$$

сходится. Используя (4.6) и (4.7), находим частичные суммы ряда

$$
\begin{aligned}
P_n &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\overline{C}_{2k}(0) = -\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sum_{i=1}^{k}(-1)^i T_{2i-1}(u)+\\
&+\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^i 4i\overline{C}_{2i}(u)\tan u)\cos^{2k}u\,du=\\
&=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}T_{2i-1}(u)\sum_{k=i}^{n}\cos^{2k}u\,du+\\
&+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}4i\int_0^{\frac{\pi}{2}}\overline{C}_{2i}(u)\tan u\left[\sum_{k=i+1}^{n}\cos^{2k}u\right]du=\\
&=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}T_{2i-1}(u)\sum_{k=i}^{n}\cos^{2k}u\,du+\\
&+\sum_{i=1}^{n-2}(-1)^{i+1}4i\int_0^{\frac{\pi}{2}}\overline{C}_{2i}(u)\tan u\left[\sum_{k=i+1}^{n}\cos^{2k}u\right]du+\\
&+(-1)^n 4(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\overline{C}_{2(n-1)}(u)\tan u\cos^{2n}u.
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

Подставляя выражение для $\overline{C}_{2(n-1)}(u)$ из (4.6) в (5.2) получаем

$$
\begin{aligned}
P_n &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}T_{2i-1}(u)\sum_{k=i}^{n}\cos^{2k}u\,du+\\
&+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\int_0^{\frac{\pi}{2}}T_{2i-1}(u)2(n-1)\cos^{2(n-1)}u(1-\cos^2 u)\,du+
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

$$
+\sum_{i=1}^{n-2}(-1)^{i+1}4i\int_0^{\frac{\pi}{2}}\overline{C}_{2i}(u)\tan u[\sum_{k=i+1}^{n}\cos^{2k}u-2(n-1)\cos^{2(n-1)}u(1-\cos^2 u)]\,du.
$$

Отметим,что (5.3) имеет ту же форму, что и (5.2). В обоих случаях выражения в квадратных скобках являются многочленами относительно $\cos^2 u$. Последовательно подставляя (4.6) в (5.3) для $i = n-2,\ n-3, \ldots$ приходим к следующей лемме.

Лемма 5.1. Частичные суммы ряда (5.1) имеют вид

$$
P_n = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}T_{2i-1}(u)P_{ni}(u)\,du, \tag{5.4}
$$

где

$$
P_{ni}(u) = \sum_{j=i}^{n}\frac{\cos^{2j}u}{(j+i-1)!(j-i)!}\sum_{m=0}^{n-j}(-1)^m\frac{(2j+m-1)!}{m!}.
$$

После подстановки (5.4) и (3.5) в (3.2), получаем

$$2\pi h(\Omega) = \int_0^{2\pi} F(0,\tau)\,d\tau - \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} (F(u,\tau))'_\phi\, G_n(\varphi,u)\,d\varphi\,du\,d\tau, \quad (5.5)$$

где (см. (5.4))

$$G_n(\varphi,u) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \cos(2i-1)\varphi \sum_{j=i}^{n} \frac{\cos^{2j} u}{(j+i-1)!(j-i)!} \sum_{m=0}^{n-j} (-1)^m \frac{(2j+m-1)!}{m!}.$$

Можно провести одно интегрирование в (5.5). Используя (2.5), (2.6), (2.9) и принимая во внимание, что $F'_\varphi = 0$, получаем

$$F'_\phi = -F'_u \cos\varphi + F'_\tau \frac{\sin\varphi}{\cos u}. \quad (5.6)$$

Подставляя (5.6) в (5.5) и принимая во внимание $\int_0^{2\pi} F'_\tau\,d\tau = 0$, находим

$$2\pi h(\Omega) = \int_0^{2\pi} F(0,\tau)\,d\tau +$$
$$+ \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} (F(u,\tau))'_u \left[\int_0^{2\pi} \cos\varphi\, G_n(\varphi,u)\,d\varphi\right] d\tau\,du.$$

Интегрируя по $d\varphi$, получаем

$$W_n(u) = \int_0^{2\pi} \cos\varphi\, G_n(\varphi,u)\,d\varphi = \sum_{j=1}^{n} \binom{2j-1}{j-1} \cos^{2j} u \sum_{m=0}^{n-j} (-1)^m \binom{2j-1+m}{m}.$$

Теорема 5.1. Решение задачи Функа (см. (2.1)) имеет вид

$$2\pi h(\Omega) = \int_0^{2\pi} F(0,\tau)\,d\tau - 2\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{2\pi} (F(u,\tau))'_u d\tau\right] W_n(u)\,du, \quad (5.7)$$

где $\Omega \in S^2$ и (u,τ) суть обычные сферические координаты (u – долгота, τ – широта) в системе координат с полюсом Ω.

Напомним решение задачи Функа, полученное В. Бляшке в [2]. Решение имеет вид аналогичный (5.7) :

$$2\pi h(\Omega) = \int_0^{2\pi} F(0,\tau)\,d\tau - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{2\pi} (F(u,\tau))'_u d\tau\right] \left(\frac{1}{\sin u} - 1\right) du \quad (5.8)$$

(обозначения как и в Теореме 5.1). Остаётся открытым вопрос, можно ли получить (5.8), вычисляя предел под знаком интеграла в (5.7).

ABSTRACT. Some results in convexity theory lead to integral equations of certain type on the sphere. They generalize the well known Funk integral equation. The article suggests what is called "consistency method" to solve those integral equations and tests this method for the case of classical Funk equation. A section is devoted to demonstration how the equations in question emerge in the study of projections of convex bodies.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Funk, "Ueber eine geometrische Anwendung der Abelschen Integralgleichung", Math. Ann.. vol. 77, 1916.
2. В. Бляшке, "Круг и Шар", Москва, Наука, 1967.
3. А. В. Погорелов, Четвертая Проблема Гильберта, Наука, Москва, 1974.
4. R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge University Press, 1990.
5. R. V. Ambartzumian, "Combinatorial integral geometry, metric and zonoids", Acta Appl. Math., vol.9, pp. 3 – 27, 1987.
6. Р. Г. Арамян, "О стохастической аппроксимации выпуклых тел", Изв. АН Армении, Математика, том 22, № 5, стр. 427 – 438, 1986.
7. Г. Ю. Панина, "Выпуклые тела и трансляционно инвариантные меры", Записки научных сем. ЛОМИ, том 157, 1986.

29 августа 2000 Институт математики НАН Армении