ДВА КОММЕНТАРИЯ К СТАТЬЕ Р. В. АМБАРЦУМЯНА О ДЕЗИНТЕГРАЦИИ

Н. Г. Агаронян, В. К. Оганян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 36, № 1, 2001

Статья состоит из двух комментариев к статье Р. В. Амбарцумяна “Дезинтеграция тождеств Плейеля и томография”, которая содержится в этом номере. В первом приводится новое доказательство тождеств типа Плейеля для плоских выпуклых областей, которое обобщает результат Р. В. Амбарцумяна. Во второй части проводится сравнение двух различных критериев о порождении мер валюациями, определёнными на так называемых кольцах Сильвестра в пространстве прямых на плоскости. Критерий в статье Р. В. Амбарцумяна (Критерий I) формулируется в терминах примитивных флаговых функций. Более ранний критерий (Критерий II) был сформулирован в терминах флаговых плотностей. В §3 мы доказываем, что Критерий I в классе примитивных функций эквивалентен Критерию II. В конце статьи приведена проверка Критерия I для примитивных функций в случае трансляционно инвариантной меры.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья состоит из двух частей, содержащих комментарии к статье Р. В. Амбарцумяна [1]. Первая часть относится к так называемым тождествам типа Плейеля, которые играют важную роль в статье [1]. Тождества типа Плейеля выражают интегралы

$$\int_A [h(\chi) - h'(\chi) \chi \cot \psi_1 \cot \psi_2] dg \quad (1)$$

по некоторым подмножествам $A \subset [D]$, где

$[D] =$ множество прямых, пересекающих ограниченную выпуклую область D .

Класс множеств A зависит от конечного множества точек $\{Q_i\}$ и является минимальной конечной алгеброй подмножеств, содержащей $[D]$ и так называемое бюффово кольцо, соответствующее множеству $\{Q_i\}$ (см. [2]). Функция $h(x)$,

определённая на $[0, \infty)$, является непрерывно дифференцируемой. В (1), χ обозначает длину хорды $D \cap g$, где $g \in [D]$ — прямая, а ψ_1 и ψ_2 суть углы пересечения прямой g с границей ∂D , оба угла берутся в одной полуплоскости, ограниченной прямой g и внутри области D , dg — инвариантная относительно евклидовых движений мера в пространстве

$$G = \text{пространство прямых в } \mathbb{R}^2.$$

Учитывая их роль (см. также [4] — [7] и [17]), желательно иметь доказательство тождеств типа Плейеля, не опирающееся на интегрирование разложений комбинаторной интегральной геометрии. Такое доказательство дано в §2. Как побочный результат мы убрали ограничение, присутствующее в [2] и [8] на положение точек $\{Q_i\}$ по отношению к области D .

Во второй части статьи проводится сравнение двух различных критериев о порождении мер валюациями, определёнными на так называемых кольцах Сильвестра в пространстве G . Статья [1] формулирует критерий (Критерий I) в терминах примитивных флаговых функций. С другой стороны, более ранние статьи [9] и [14] (см. также [5], [11]) содержат некоторые необходимые и достаточные условия (Критерий II) порождения мер в терминах флаговых плотностей. В §3 мы сравниваем эти условия и доказываем, что эти два критерия эквивалентны. В конце статьи приведена проверка Критерия I для примитивных функций в случае трансляционно инвариантной меры.

§2. ТОЖДЕСТВА ТИПА ПЛЕЙЕЛЯ

В этом параграфе D является ограниченным выпуклым замкнутым множеством на плоскости с кусочно гладкой границей ∂D , не содержащей прямолинейных отрезков. Здесь нам удобно работать с пространством $\bar{G}$ направленных прямых на плоскости. Множество $[D]$ теперь является множеством направленных прямых, пересекающих D , т.е. $[D] \subset \bar{G}$.

Пусть $k(g)$ — интегрируемая функция, определённая в пространстве $\bar{G}$ направленных прямых, ρ — прямолинейный отрезок на $\mathbb{R}^2$ и $[\rho] = \{g \in \bar{G} : g \cap \rho \neq \emptyset\}$. Отобразим $[\rho] \cap [D]$ на произведение $\rho \times \partial D$ следующим способом: $g \mapsto (t, l)$, где $t = g \cap \rho$, а l — одна из двух точек из $g \cap \partial D$. Точнее, пусть l — точка, в которой g входит в D . В кинематической интерпретации $l \in \partial D$ есть точка, в которой частица, двигающаяся из $-\infty$ вдоль прямой g в положительном направлении впервые входит в D . Мы используем обозначения:

l^* для точки на границе ∂D , в которой двигающаяся частица покидает область D . Вышеопределённое отображение обратимо и через g_{tl} мы обозначаем направленную прямую, соответствующую (t, l) . Мы можем записать $k(g) = k(t, l)$.

Также будем обозначать :

ρ_{tl} = расстояние между $t \in \rho$ и $l \in \partial D$,

α_{tl} = угол пересечения прямой g_{tl} с ∂D в точке $l \in \partial D$, внутри D и в левой полуплоскости относительно прямой g_{tl} ,

$[0, \pi/2] \ni \beta_{tl}$ = угол между ρ и g_{tl} .

Через dt и dl обозначим меры длин на ρ и ∂D , соответственно. Используя известное (см. [3]) формулу для якобиана преобразования

$$dg = \frac{\sin \beta_{tl} \sin \alpha_{tl}}{\rho_{tl}} dt dl, \quad (2.1)$$

получаем

$$\int_{[\rho] \cap [D]} k(g) dg = \iint_{\rho \times \partial D} k(t, l) \frac{\sin \beta_{tl} \sin \alpha_{tl}}{\rho_{tl}} dt dl. \quad (2.2)$$

Для того, чтобы найти значение интеграла (1) в случае $A = [\rho] \cap [D]$, полагая в (2.2)

$$k(g) = h(\chi) - h'(\chi) \chi \cot \psi_1 \cot \psi_2, \quad (2.3)$$

получаем

$$\begin{aligned} I &= \int_{[\rho] \cap [D]} [h(\chi) - h'(\chi) \chi \cot \psi_1 \cot \psi_2] dg = \\ &= \int_{\partial D} dl \int_{\rho} [h(\chi_{tl}) - h'(\chi_{tl}) \chi_{tl} \cot \alpha_{tl} \cot \alpha_{tl}^*] \frac{\sin \beta_{tl} \sin \alpha_{tl}}{\rho_{tl}} dt, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где χ_{tl} = длина хорды $g_{tl} \cap D$, α_{tl}^* = угол (внутри D) между g_{tl} и ∂D в точке пересечения l^* , причём углы α_{tl} и α_{tl}^* лежат в одной и той же полуплоскости относительно прямой g_{tl} .

Легко проверить, что

$$\frac{\partial \alpha_{tl}}{\partial t} = \nu(l) \frac{\sin \beta_{tl}}{\rho_{tl}} \quad (2.5)$$

и

$$\frac{\partial \chi_{tl}}{\partial t} = \chi_{tl} \cot \alpha_{tl}^* \frac{\partial \alpha_{tl}}{\partial t}, \quad (2.6)$$

где $\nu(l) = +1$ или -1 , зависит от выбора положительного направления на прямой g_{ρ} , которая содержит ρ и $l \in \partial D$. А именно, если точка $l \in \partial D$ принадлежит правой полуплоскости, ограниченной прямой g_{ρ} , то $\nu(l) = +1$ и $\nu(l) = -1$ - в противном случае.

Подставляя эти выражения в (2.4) находим

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\partial D} \nu(l) dl \int_0^\rho \left[h(\chi_{t1}) \frac{\partial \alpha_{t1}}{\partial t} \sin \alpha_{t1} - h'(\chi_{t1}) \chi_{t1} \cos \alpha_{t1} \cot \alpha_{t1} \frac{\partial \alpha_{t1}}{\partial t} \right] dt = \\
 &= \int_{\partial D} \nu(l) dl \int_0^\rho \left[h(\chi_{t1}) \frac{\partial \alpha_{t1}}{\partial t} \sin \alpha_{t1} - h'(\chi_{t1}) \cos \alpha_{t1} \frac{\partial \chi_{t1}}{\partial t} \right] dt = \quad (2.7) \\
 &= - \int_{\partial D} \nu(l) dl \int_0^\rho \frac{\partial (h(\chi_{t1}) \cos \alpha_{t1})}{\partial t} dt = - \int_{\partial D} \nu(l) dl [h(\chi_{t1}) \cos \alpha_{t1}]_{t=Q_1}^{t=Q_2},
 \end{aligned}$$

где Q_1 – начало, а Q_2 – конец отрезка ρ (нумерация концов проводится по направлению отрезка ρ).

Пусть $l \in \partial D$ возрастает по направлению часовой стрелки. Тогда (см. [2] или [8]) $d\rho_{j1} = -\cos \alpha_{j1} dl$, где α_{j1} – значение α_{t1} в точке $t = Q_j$. Аналогично, обозначим через ρ_{j1} и χ_{j1} значения ρ_{t1} и χ_{t1} в точке $t = Q_j$. Теперь мы можем переписать (2.7) в виде

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\partial D} \nu(l) h(\chi_{21}) d\rho_{21} - \int_{\partial D} \nu(l) h(\chi_{11}) d\rho_{11} = \\
 &= \int_{\Gamma_r} h(\chi_{21}) d\rho_{21} - \int_{\Gamma_l} h(\chi_{21}) d\rho_{21} - \int_{\Gamma_r} h(\chi_{11}) d\rho_{11} + \int_{\Gamma_l} h(\chi_{11}) d\rho_{11},
 \end{aligned}$$

где $\Gamma_r = \{l \in \partial D: l \text{ принадлежит правой полуплоскости, ограниченной } g_\rho\}$,

$\Gamma_l = \partial D \setminus \Gamma_r$.

Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned}
 I &= - \int_{\Gamma_r} h'(\chi_{21}) \rho_{21} d\chi_{21} + \int_{\Gamma_l} h'(\chi_{21}) \rho_{21} d\chi_{21} + \int_{\Gamma_r} h'(\chi_{11}) \rho_{11} d\chi_{11} - \\
 &- \int_{\Gamma_l} h'(\chi_{11}) \rho_{11} d\chi_{11} + 4\rho h(\chi_{12}),
 \end{aligned}$$

где ρ – расстояние между Q_1 и Q_2 , а χ_{12} – длина хорды $g_{12} \cap D$ (g_{12} – прямая, проходящая через Q_1 и Q_2). Наконец, $d\chi_{j1}$ означает интегрирование в смысле Стильтеса по ∂D по направлению часовой стрелки.

Следовательно

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\partial D} \rho_{11} h'(\chi_{11}) [I_{[\rho]}(1^+, l) - I_{[\rho]}(1^-, l)] d\chi_{11} + \\
 &+ \int_{\partial D} \rho_{21} h'(\chi_{21}) [I_{[\rho]}(2^+, l) - I_{[\rho]}(2^-, l)] d\chi_{21} + 4\rho h(\chi_{12}).
 \end{aligned}$$

Символы $I_{[\rho]}(j^\pm, l)$ обозначают пределы индикатора $I_{[\rho]}$ при $g \rightarrow g_{j1}$ в "частичных окрестностях": верхний плюс соответствует размещению Q_j в правой, а

минус – в левой полуплоскости относительно "пошевёлённой" прямой, проходящей через точки Q_j и $i \in \partial D$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{[\rho]} [h(\chi) - h'(\chi) \chi \cot \psi_1 \cot \psi_2] dg &= \\ &= \sum_{j=1,2} \int_{\partial D} \rho_{jl} h'(\chi_{jl}) [I_{[\rho]}(j^+, l) - I_{[\rho]}(j^-, l)] d\chi_{jl} + 4\rho h(\chi_{12}), \end{aligned} \quad (2.8)$$

т.е. тождество типа Плейеля для события $A = [\rho]$ (см. [2], глава 7).

Пусть $\mathcal{A}\{Q_i\}$ – минимальная (конечная) алгебра, содержащая $[D]$ и все множества $[\rho_{ij}]$, где ρ_{ij} – отрезок, соединяющий Q_i и Q_j . Распространим (2.8) на произвольное A из $\mathcal{A}\{Q_i\}$. Вначале выберем A из бюффонова кольца, порождённого множеством $\{Q_i\}$.

Из основного разложения комбинаторной интегральной геометрии на плоскости (см. [2] или [3]) следует, что для любой знакопеременной меры m и любого A из бюффонова кольца, порождённого множеством $\{Q_i\}$, имеем

$$m(A) = \frac{1}{2} \sum_{i < j} c_{ij}(A) m([\rho_{ij}]), \quad (2.9)$$

где коэффициенты $c_{ij}(A)$ имеют вид

$$c_{ij}(A) = I_A(i^+, j^-) + I_A(i^-, j^+) - I_A(i^+, j^+) - I_A(i^-, j^-). \quad (2.10)$$

Символы $I_A(i^\pm, j^\pm)$ обозначают пределы индикатора I_A при $g \rightarrow g_{ij} =$ прямая, проходящая через Q_i и Q_j в "частичных окрестностях": верхний плюс соответствует размещению Q_i (или Q_j) в правой, а минус – в левой полуплоскости относительно "пошевёлённой" прямой g_{ij} .

Применяя (2.9) к

$$m(A) = \int_A [h(\chi) - h'(\chi) \chi \cot \psi_1 \cot \psi_2] dg,$$

получаем

$$\begin{aligned} \int_A [h(\chi) - h'(\chi) \chi \cot \psi_1 \cot \psi_2] dg &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i < j} c_{ij}(A) \int_{[\rho_{ij}]} [h(\chi) - h'(\chi) \chi \cot \psi_1 \cot \psi_2] dg. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Подставляя (2.8) в (2.11) находим

$$\begin{aligned} \int_A [h(\chi) - h'(\chi) \chi \cot \psi_1 \cot \psi_2] dg &= \sum_{(Q_i, Q_j)} c_{ij}(A) \rho_{ij} h(\chi_{ij}) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i < j} c_{ij}(A) \sum_{k=1,2} \int_{\partial D} [I_{[\rho_{ij}]}(k^+, l) - I_{[\rho_{ij}]}(k^-, l)] \rho_{kl} h'(\chi_{kl}) d\chi_{kl}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где $\sum_{k=1,2}$ распространяется на концы отрезка ρ_{ij} .

Тождество типа Плейеля в [2] имеет немного иной вид

$$\int_A [h(\chi) - h'(\chi) \chi \cot \psi_1 \cot \psi_2] dg = \sum_{(Q_i, Q_j)} c_{ij}(A) \rho_{ij} h(\chi_{ij}) + \sum_{Q_j} \int_{\partial D} [I_A(j^+, l) - I_A(j^-, l)] \rho_{jl} h'(\chi_{jl}) d\chi_{jl}, \quad (2.13)$$

и оно имеет место для любого $A \in \mathcal{A}\{Q_i\}$.

Сравнивая (2.12) и (2.13) получаем следующее следствие.

Следствие. Для любой ограниченной функции $H(x)$ и любого $A \in \mathcal{A}\{Q_i\}$ имеем

$$\sum_{i < j} c_{ij}(A) \sum_{k=1,2} \int_{\partial D} [I_{[\rho_{ij}]}(k^+, l) - I_{[\rho_{ij}]}(k^-, l)] \rho_{kl} H(\chi_{kl}) d\chi_{kl} = 2 \sum_{Q_j} \int_{\partial D} [I_A(j^+, l) - I_A(j^-, l)] \rho_{jl} H(\chi_{jl}) d\chi_{jl}. \quad (2.14)$$

Мы дадим эскиз независимого доказательства формулы (2.14). По аддитивности достаточно доказать (2.14) для атомов. Если A – атом кольца $\mathcal{A}\{Q_i\}$, то существуют два выпуклых многоугольника, скажем, D_1 и D_2 с вершинами из $\{Q_i\}$ такие, что $A = \{g: g \text{ разделяет } D_1 \text{ от } D_2\}$.

Следовательно, значения коэффициентов $c_{ij}(A)$ определяются из хорошо известной теоремы Крофтона (см. [3], §5.2). Двойную сумму в левой части соотношения (2.14) можно представить в виде суммы по упорядоченным парам (Q_k, ν_s) , т.е. каждое ν_s есть “игла” вида Q_k, Q_s .

По теореме Крофтона, для каждого Q_k существуют ровно две иглы ν_1 и ν_2 с общим концом Q_k такие, что $c_{\nu_1}(A) \neq 0$ и $c_{\nu_2}(A) \neq 0$. Если A – атом, то имеем $c_{\nu_1}(A) [I_{[\nu_1]}(k^+, l) - I_{[\nu_1]}(k^-, l)] + c_{\nu_2}(A) [I_{[\nu_2]}(k^+, l) - I_{[\nu_2]}(k^-, l)] = 2 [I_A(k^+, l) - I_A(k^-, l)]. \quad (2.15)$

Очевидно, отсюда следует (2.14) для атомов. Следовательно, для произвольного A из бюффонова кольца (2.14) следует из аддитивности. Из (2.10) получаем $c_{ij}(A^c) = -c_{ij}(A)$ (A^c – дополнение к A) и

$$I_{A^c}(k^+, l) - I_{A^c}(k^-, l) = - [I_A(k^+, l) - I_A(k^-, l)].$$

Поэтому, из классического тождества Плейеля, получаем

$$\int_{[D]} h(\chi) dg - \int_{[D]} h'(\chi) \chi \cot \psi_1 \cot \psi_2 dg - 2 h(0) |\partial D| = 0,$$

и (2.12) имеет место для каждого $A \in \mathcal{A}\{Q_i\}$ ($|\partial D|$ – длина границы ∂D). Поэтому, полное независимое доказательство формулы (2.13) сводится к элементарной проверке формулы (2.15).

§3. СРАВНЕНИЕ КРИТЕРИЕВ ДЛЯ ПОРОЖДЕНИЯ МЕР

Нам необходимы некоторые обозначения и определения. Флаг на плоскости $\mathbb{R}^2$ есть пара $(\mathcal{P}, \varphi)$, где $\mathcal{P} = (x, y)$ – точка на плоскости, а $\varphi \in S_1$ (S_1 – пространство направлений на плоскости).

Пусть $f(\mathcal{P}, \varphi) = f(x, y, \varphi)$ – неотрицательная функция, определённая в пространстве флагов $\mathbb{R}^2 \times S_1$. Метрика, для которой геодезическими являются обычные евклидовы прямые, называется гильбертовой. Гильбертова метрика $F(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ называется финслеровой, если она допускает следующее интегральное представление :

$$F(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = \int_{\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2} f(\mathcal{P}(l), \varphi) dl, \quad (3.1)$$

где интегрирование ведётся по прямолинейному отрезку, соединяющему точки $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$, dl – элемент длины на этом отрезке. Величина параметра φ в аргументе функции f совпадает с направлением отрезка $\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2$. Функция f называется финслеровой плотностью соответствующей гильбертовой метрики (см. [12], [13] и [15]).

Функция F , определённая по (3.1), является аддитивной и непрерывной. Следовательно, если F – метрика, то из хорошо известной теоремы комбинаторной интегральной геометрии ([2], [3]) существует (единственная) мера m в пространстве $\mathbf{G}$ прямых на плоскости такая, что

$$F(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = m([\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2]), \quad (3.2)$$

где $[\mathcal{P}, \mathcal{Q}] = \{g \in \mathbf{G} : \text{прямая } g \text{ разделяет точки } \mathcal{P} \text{ и } \mathcal{Q}\}$.

Этим путём финслеровы плотности $f(x, y, \varphi)$ всегда определяют меры в пространстве $\mathbf{G}$.

Ниже мы рассматриваем абсолютно непрерывные меры $m(\cdot)$, т.е.

$$dm = \gamma(g) dg. \quad (3.3)$$

Функция $\gamma(g)$ называется плотностью меры $m(\cdot)$.

Заметим, что если $\gamma(g) = \text{const}$, то $f(x, y, \varphi) = c$ есть постоянная и $m([\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2]) = c \cdot |\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2|$, где $|\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2|$ – длина отрезка $\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2$. Если $m(\cdot)$ – трансляционно инвариантная мера, то $f(x, y, \varphi) = f(\varphi)$ и $m([\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2]) = f(\varphi) \cdot |\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2|$.

Как показано в [9], [14], флаговая функция $f(\mathcal{P}, \varphi)$ порождает знакопеременную меру в пространстве $\mathbf{G}$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial f}{\partial_n \mathcal{P}} = \frac{\partial^2 f}{\partial_\varphi \mathcal{P} \partial \varphi}, \quad f = f(x, y, \varphi), \quad (3.4)$$

где $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ обозначает дифференцирование по φ против часовой стрелки. Другие операторы в этом уравнении корректно определяются, если на прямой L , содержащей точку $\mathcal{P} = (x, y)$ и имеющей направление φ , мы выбираем положительное направление. Тогда $\frac{\partial}{\partial \varphi \mathcal{P}}$ обозначает дифференцирование по $\mathcal{P}$ в положительном направлении, а $\frac{\partial}{\partial_n \mathcal{P}}$ обозначает дифференцирование по $\mathcal{P}$ в направлении нормали к L и расположенной в левой полуплоскости относительно прямой L . Результат не зависит от выбора положительного направления на прямой L .

Вопрос неотрицательности меры $m(\cdot)$, порожденной флаговой плотностью f , решается с помощью критерия выпуклости (см. обзорную статью [7]).

В обычных декартовых координатах x, y уравнение (3.4) принимает вид

$$-\frac{\partial f}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \varphi - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \varphi} \cos \varphi - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \varphi} \sin \varphi = 0. \quad (3.5)$$

Предложение ([9], [14]). Для любой гладкой функции $f(\mathcal{P}, \varphi)$, удовлетворяющей условию (3.4) (или (3.5)), соответствующая

$$F(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = \int_{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2} f(\mathcal{P}, \varphi) dl$$

определяет, с помощью формул (3.1) и (3.2), знакопеременную меру на G , для которой $f(\mathcal{P}, \varphi) + f''(\mathcal{P}, \varphi)$ является плотностью относительно dg . Р. В. Амбарцумян в работе [1] рассматривает сегментные функции $F(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$, которые порождены "примитивными" флаговыми функциями $K(\mathcal{P}, \varphi)$ по формуле :

$$F(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = K(\mathcal{P}_1, \varphi) - K(\mathcal{P}_2, \varphi). \quad (3.6)$$

Ясно, что в этом случае мы имеем (3.1) с функцией

$$f(\mathcal{P}, \varphi) = \frac{\partial K(\mathcal{P}, \varphi)}{\partial \varphi \mathcal{P}} \quad (3.7)$$

(дифференцирование по переменной $\mathcal{P}$ в направлении φ).

Для того, чтобы примитивная флаговая функция порождала бы меру в пространстве прямых, необходимо и достаточно выполнения следующего условия (см. [1]) :

$$\frac{\partial}{\partial \varphi \mathcal{P}} \left[\frac{\partial^2 K(\mathcal{P}, \varphi)}{\partial \varphi \mathcal{P} \partial \varphi} \right] = 0. \quad (3.8)$$

Докажем, что (3.4) и (3.8) эквивалентны. Действительно, используя соотношение (3.7), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial_n \mathcal{P}} &= -\frac{\partial f}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \varphi = -\left(\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} \cos \varphi + \frac{\partial^2 K}{\partial x \partial y} \sin \varphi \right) \sin \varphi + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 K}{\partial x \partial y} \cos \varphi + \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} \sin \varphi \right) \cos \varphi = \\ &= -\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} \sin \varphi \cos \varphi - \frac{\partial^2 K}{\partial x \partial y} \sin^2 \varphi + \frac{\partial^2 K}{\partial x \partial y} \cos^2 \varphi + \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} \sin \varphi \cos \varphi. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Также имеем

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 K}{\partial x \partial \varphi} \cos \varphi - \frac{\partial K}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial^2 K}{\partial y \partial \varphi} \sin \varphi + \frac{\partial K}{\partial y} \cos \varphi.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial_\varphi \mathcal{P} \partial \varphi} &= \frac{\partial}{\partial_\varphi \mathcal{P}} \left[\frac{\partial f}{\partial \varphi} \right] = \frac{\partial^3 K}{\partial x^2 \partial \varphi} \cos^2 \varphi + \frac{\partial^3 K}{\partial x \partial y \partial \varphi} \sin \varphi \cos \varphi - \\ &- \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} \sin \varphi \cos \varphi - \frac{\partial^2 K}{\partial x \partial y} \sin^2 \varphi + \frac{\partial^3 K}{\partial x \partial y \partial \varphi} \sin \varphi \cos \varphi + \\ &+ \frac{\partial^3 K}{\partial y^2 \partial \varphi} \sin^2 \varphi + \frac{\partial^2 K}{\partial x \partial y} \cos^2 \varphi + \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} \sin \varphi \cos \varphi. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Подставляя (3.9) и (3.10) в (3.4), получаем

$$\frac{\partial^3 K}{\partial x^2 \partial \varphi} \cos^2 \varphi + 2 \frac{\partial^3 K}{\partial x \partial y \partial \varphi} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\partial^3 K}{\partial y^2 \partial \varphi} \sin^2 \varphi = 0. \quad (3.11)$$

С другой стороны, если примитивная функция удовлетворяет условию (3.8), то

$$\frac{\partial}{\partial_\varphi \mathcal{P}} \left[\frac{\partial K}{\partial \varphi} \right] = \frac{\partial^2 K}{\partial x \partial \varphi} \cos \varphi + \frac{\partial^2 K}{\partial y \partial \varphi} \sin \varphi,$$

и поэтому

$$\frac{\partial}{\partial_\varphi \mathcal{P}} \left[\frac{\partial^2 K(\mathcal{P}, \varphi)}{\partial_\varphi \mathcal{P} \partial \varphi} \right] = \frac{\partial^3 K}{\partial x^2 \partial \varphi} \cos^2 \varphi + 2 \frac{\partial^3 K}{\partial x \partial y \partial \varphi} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\partial^3 K}{\partial y^2 \partial \varphi} \sin^2 \varphi.$$

Следовательно, из (3.10) следует (3.11).

Теперь дадим вид примитивной функции $K(\mathcal{P}, \varphi)$, которая соответствует трансляционно инвариантной мере в пространстве прямых.

Пусть точка $\mathcal{P}$ и направление φ фиксированы. Обозначим через $K(\mathcal{P}, \varphi)$ расстояние между $\mathcal{P}$ и основанием перпендикуляра из начала координат на прямую $g(\mathcal{P}, \varphi)$, умноженное на функцию $f(\varphi)$ ($g(\mathcal{P}, \varphi)$ – прямая, проходящая через точку $\mathcal{P}$ и имеющая направление φ). Покажем, что $K(\mathcal{P}, \varphi)$ удовлетворяет условию (3.8).

Нетрудно проверить, что

$$K(\mathcal{P}, \varphi) = \frac{|y - p \cos \psi|}{\cos \psi} f(\varphi),$$

где p — длина перпендикуляра из начала координат до прямой $g(\mathcal{P}, \varphi)$, ψ — угол между перпендикуляром и осью X , $\mathcal{P} = (x, y)$. Имеем

$$K(\mathcal{P}, \varphi) = |x \cos \varphi - y \sin \varphi| f(\varphi).$$

Следовательно

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi} = \pm(x \sin \varphi - y \cos \varphi) f(\varphi) + |x \cos \varphi - y \sin \varphi| f'(\varphi)$$

и

$$\frac{\partial^2 K(\mathcal{P}, \varphi)}{\partial_p \mathcal{P} \partial \varphi} = \mp \sin 2\varphi f(\varphi) \pm f'(\varphi).$$

Следовательно, имеет место (3.8). С другой стороны, из определения $K(\mathcal{P}, \varphi)$ имеем $F(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = |\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2| f(\varphi)$, т.е. $F(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ совпадает с метрикой Минковского.

ABSTRACT. The paper consists of two parts, containing comments on the paper by R. V. Ambartzumian “Disintegration of Pleijel identities and tomography” of the present issue. In the first part a new proof of Pleijel-type identities for planar convex domains is given, which extends the result by R. V. Ambartzumian. In the second part we compare two different criteria that regulate measure generation by valuations primarily defined on the so-called Sylvester subset rings in the of lines in the plane. The criterion in R. V. Ambartzumian’s paper (Criterion I) is given in terms of primitive flag functions. The earlier criterion (Criterion II) has been formulated in terms of flag densities. In §3 we prove that Criterion I in the class of primitive functions is equivalent to Criterion II. In the end of the paper a verification of Criterion I for primitive function in the case of translation invariant measure is presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. В. Амбарцумян, “Дезинтеграция тождеств Плейеля и томография”, Изв. НАН Армении, Математика, том 36, № 1, стр. 13 — 36, 2001.
2. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology, John Wiley & Sons, Chichester, 1982.
3. R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge University Press, 1990.
4. Р. В. Амбарцумян, “Интегральное уравнение Вольтерра в стереологии многоугольников”, Изв. НАН Армении, Математика, том 33, № 4, стр. 15 — 30, 1998.
5. Р. В. Амбарцумян, “Аналитические результаты комбинаторной интегральной геометрии : Обзор”, Изв. НАН Армении, Математика, том 34, № 6, стр. 2 — 46, 1999.

6. Р. В. Амбарцумян, "Проблема Вискелла для случайных частиц на плоскости", Изв. НАН Армении, Математика, том 36, № 1, стр. 2 — 12, 2001.
7. V. K. Oganian, "Combinatorial decompositions and homogeneous geometrical processes", Acta Appl. Math., Holland, vol. 9, no. 1 — 2, pp. 71 — 81, 1987.
8. "Комбинаторные принципы в стохастической геометрии", под редакцией Р. В. Амбарцумяна, Издательство АН Армянской ССР, Ереван, 1980.
9. В. К. Оганян, А. Абдалла, "О порождении мер в пространстве прямых финслеровыми метриками", Изв. НАН Армении, Математика, том 27, № 5, стр. 69 — 80, 1992.
10. R. J. Gardner, Geometric Tomography, Cambridge University Press, 1995.
11. Р. В. Амбарцумян, "Замечания о порождении мер в пространстве прямых в $\mathbb{R}^3$ ", Изв. НАН Армении, Математика, том 27, № 5, стр. 1— 21, 1992.
12. Х. Рунд, Дифференциальная Геометрия Финслеровых Пространств, Москва, Наука, 1981.
13. А. В. Погорелов, Четвертая Проблема Гильберта, Наука, Москва, 1974.
14. R. V. Ambartzumian with an Appendix by V. K. Oganian, "Measure generation by Euler functionals", Adv. Appl. Prob., vol. 27, pp. 606 — 626, 1995.
15. R. V. Ambartzumian, V. K. Oganian, "Parametric versions of Hilbert's fourth problem", Israel Math. Journal. vol. 103, no. 1, pp. 41 — 65, 1998.
16. R. V. Ambartzumian. W. Weil (editors), Stochastic Geometry, Geometric Statistics, Stereology, Teubner Texte zur Mathematik, vol. 65, 1984.
17. V. K. Oganian, "On Palm distributions of processes of lines in the plane", in [16], pp. 124 — 132, 1984.

22 июля 2000

Институт математики
НАН Армении,
Ереванский государственный университет
E-mail : victo@aua.am