ДЕЗИНТЕГРАЦИЯ ТОЖДЕСТВ ПЛЕЙЕЛЯ И ТОМОГРАФИЯ

Р. В. Амбарцумян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 36, № 1, 2001

В статье термин "дезинтеграция" обозначает специальную аналитическую процедуру восстановления подынтегральной функции по заданному семейству интегралов по пространству прямых на плоскости. Интегралы этого семейства связаны с так называемым тождеством Плейеля, подробно выводимым в одном из параграфов. Дезинтеграция основана на критерии порождения знакопеременных мер в пространстве прямых, представленном в статье впервые. Результат относится к томографии плоских выпуклых областей. Выводится простая формула для восстановления выпуклой области на основе так называемых X–реев и "двойных" X–реев, измеряемых из одной и той же единственной точки.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Линейно аддитивные сегментные функции являются одним из основных понятий Комбинаторной интегральной геометрии [1] на плоскости. Если сегментная функция $w(z)$ (z – общее обозначение отрезка на плоскости $\mathbf{R}^2$) непрерывна, то она определяет валюацию на так называемых бюффоновых подмножествах в пространстве прямых в $\mathbf{R}^2$, и наоборот. Следовательно, для пространства прямых на плоскости $\mathbf{R}^2$ вопрос о возможности продолжения валюаций до знакопеременной меры относится к сегментным функциям. В [6] (см. также параграф в [3]) этот вопрос исследован с использованием аппарата флаговых плотностей. В настоящей статье мы рассматриваем тот же вопрос для $w(z)$ вида

$$w(z) = K(T,\varphi) - K(S,\varphi), \tag{1.1}$$

где $K(P,\varphi)$ – флаговая функция, T и S – концы отрезка z, а φ – направление отрезка z. Напомним, что флаг есть пара (P,φ), где $P \in \mathbf{R}^2$, а φ = направление на плоскости $\mathbf{R}^2$.

Формула (1.1) предполагает существование непрерывного алгоритма, который даёт возможность различать концы отрезка z. В §2 мы рассматриваем (1.1) для отрезков $z = Z$, полностью лежащих вне некоторой ограниченной выпуклой области $\mathbf{D}$, для которых прямая, содержащая z, пересекает $\mathbf{D}$. Для отрезка Z через T обозначаем конец ближайший к области $\mathbf{D}$, если расстояние измеряется вдоль прямой, содержащей Z (см. Рис. 1). В §2, функция $K(P, \varphi)$ тесно связана с предыдущими результатами автора [1], [2], [3], касающимися тождеств типа Плейеля для выпуклых областей (относительно классических тождеств Плейеля, см. [4], [5]).

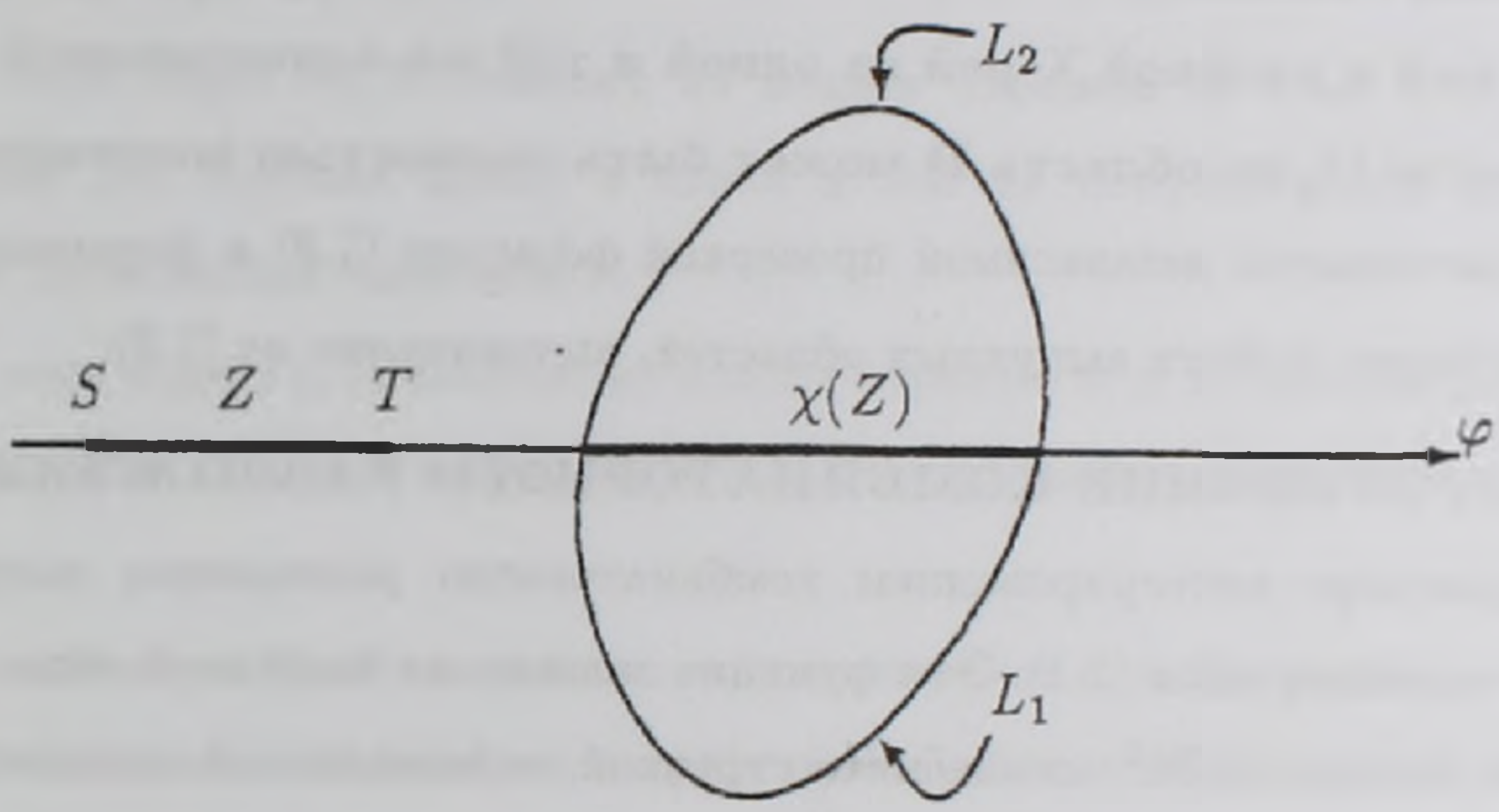

Рис. 1.

В §3 выводятся некоторые необходимые и достаточные условия, при выполнении которых сегментная функция (1.1) порождает знакопеременную меру в пространстве прямых. При некоторых условиях гладкости, это происходит, если смешанная производная $\dfrac{\partial^2 K(P,\varphi)}{\partial_\varphi P \partial\varphi}$ представляет собой функцию, зависящую только от прямых на плоскости $\mathbf{R}^2$. В §3 также содержится формула, выражающая плотность знакопеременной меры через производные $K(P, \varphi)$. Последняя приводит к дезинтеграции интегрального тождества из §2. Мы получаем (§4) дифференциальное уравнение, связывающее функции

$\chi(P, \phi)$ = длина хорды области $\mathbf{D}$ на прямой направления ϕ, содержащей точку $P \notin \mathbf{D}$

$V_1(P, \phi)$ = расстояние от P до ближайшего конца хорды $\chi(P, \phi)$.

Решая это уравнение, мы приходим к точному выражению для $V_1(P, \varphi)$, которое зависит от $\chi(P, \phi)$ и от частной производной $\dfrac{\partial\chi(P,\phi)}{\partial_n P}$ (дифференцирование по переменной P в направлении, нормальном к φ). Это выражение может представлять интерес в геометрической томографии :

$$V_1(P,\varphi) = \frac{\chi(P,\varphi)}{\exp\left(-\int_{\varphi}^{\alpha} \frac{\partial\chi(P,\phi)}{\partial_n P}\,d\phi\right) - 1}, \tag{1.2}$$

где α – направление одного из двух лучей из точки P, касательных к области $\mathbf{D}$. В томографии [8], функция $\chi(P,\phi)$ обычно называется X-реем (из точки P). Функцию $\frac{\partial\chi(P,\phi)}{\partial_n P}$ мы называем **двойным** X-реем из точки P. Так как знание величин $V_1(P,\varphi)$ и $\chi(P,\varphi)$ для единственной точки P достаточно для полного восстановления области $\mathbf{D}$, то из (1.2) вытекает следующее утверждение : **если заданы X-рей и двойной X-рей из одной и той же единственной точки P вне области $\mathbf{D}$, то область $\mathbf{D}$ может быть полностью восстановлена.** Статья заканчивается независимой проверкой формулы (1.2) и формулировкой некоторых общих свойств выпуклых областей, вытекающих из (1.2).

§2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ КОМБИНАТОРНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ

В этом параграфе интегрированием комбинаторного разложения получается сегментная функция вида (1.1). Эта функция зависит от выпуклой области $\mathbf{D}$. Прямая g на плоскости $\mathbb{R}^2$, снабжённая стрелкой, определяющей положительное направление на g, называется направленной прямой. Пусть $\mathbf{G}$ – пространство направленных прямых на плоскости $\mathbb{R}^2$. Инвариантная относительно евклидовых движений мера μ на $\mathbf{G}$ определяется свойством (см. [1])

$$\mu([z]) = 4\,|z| \tag{2.1}$$

для каждого прямолинейного отрезка $z \subset \mathbb{R}^2$. В (2.1) и ниже

$[z]$ = множество прямых, пересекающих z, $[z] \subset \mathbf{G}$,

$|z|$ = евклидова длина отрезка z.

Пусть $\mathbf{D}$ - ограниченная выпуклая область на плоскости с границей $\partial\mathbf{D}$, а Z – прямолинейный отрезок, расположенный вне замыкания области $\mathbf{D}$, причём прямая, содержащая Z, пересекает область $\mathbf{D}$. Рассмотрим также n направленных хорд $\nu_1,\ldots,\nu_n$ области $\mathbf{D}$ (хорда – прямолинейный отрезок, оба конца которого лежат на $\partial\mathbf{D}$). Для каждой хорды ν_i различать концы входа и выхода. Для меры μ множества

$$[Z] \cap A \text{ где } A = \bigcap_1^n [\nu_i]$$

рассмотрим задачу Бюффона-Сильвестра (см. [1]) : представить значение $\mu([Z]\cap A)$ в виде линейной комбинации расстояний между парами концов, участвующих прямолинейных отрезков. Ответ даётся с помощью следующей классификации пар концов. Пусть $\{P_i\}$ – множество концов отрезков Z, $\nu_1, ..., \nu_n$. Для простоты, предположим, что в $\{P_i\}$ нет трёх точек, лежащих на одной прямой. Говорим, что отрезок P_k, P_l имеет тип

ν_i, если отрезок P_k, P_l совпадает с ν_i ;

d_i, если пара P_k, P_l состоит из концов отрезков ν_i и ν_j, $i \neq j$, причём последние два отрезка лежат в разных полуплоскостях относительно прямой, проходящей через P_k, P_l ;

s_i, если пара P_k, P_l состоит из концов отрезков ν_i и ν_j, $i \neq j$, причём последние два отрезка лежат в одной и той же полуплоскости относительно прямой, проходящей через P_k, P_l ;

δ_i, если пара P_k, P_l состоит из концов отрезков ν_i и Z, причём последние два отрезка лежат в разных полуплоскостях относительно прямой, проходящей через P_k, P_l ;

σ_i, если пара P_k, P_l состоит из концов отрезков ν_i и Z, причём последние два отрезка лежат в одной и той же полуплоскости относительно прямой, проходящей через P_k, P_l ;

Z, если отрезок P_k, P_l совпадает с Z.

Мы будем использовать также следующие обозначения для индикаторных функций :

$I_{[Z]}(g)$ = индикаторная функция множества $[Z]$;

$I_k(g) = 1$, если прямая g **пересекает** ровно k хорд ν_i, и $I_k(g) = 0$ – в противном случае. Говорим, что g пересекает хорду ν_i, если g содержит ровно одну точку из относительной внутренности отрезка ν_i.

Используем индикаторные функции $I_{[Z]}(g)$, $I_k(g)$, а также эквивалентные отображения $I_{[Z]}(P_1, P_2)$, $I_k(P_1, P_2)$, $I_{[Z]}(z)$ и $I_k(z)$, использующие соответствия

$(P_1, P_2) \to$ прямая g, содержащая точки P_1, P_2, и

$z \to$ прямая g, содержащая отрезок z.

Требуемая линейная комбинация имеет вид (см. [1], [2], [3]) :

$$\frac{1}{2}\mu([Z]\cap A) = 2\sum_{\nu_i} I_{n-1}(\nu_i)I_{[Z]}(\nu_i)|\nu_i| + \sum_{d_i} I_{n-2}(d_i)I_{[Z]}(d_i)|d_i| -$$

$$-\sum_{s_i} I_{n-2}(s_i)I_{[Z]}(s_i)|s_i| + 2\,I_n(Z)|Z| + \sum_{\delta_i} I_{n-1}(\delta_i)|\delta_i| - \sum_{\sigma_i} I_{n-1}(\sigma_i)|\sigma_i|. \quad (2.2)$$

На пространстве $\mathbf{G}^n$, являющемся декартовым произведением, рассмотрим произведение мер $\mu^{(n)} = \mu \times ... \times \mu$. Для удобства, сужение меры $\mu^{(n)}$ на множество $[\mathbf{D}]^n = [\mathbf{D}] \times ... \times [\mathbf{D}]$, где $[\mathbf{D}]$ = множество прямых, пересекающих область $\mathbf{D}$, запишем в виде $d\nu_1\, d\nu_2 \ldots d\nu_n$ ("переменными интегрирования" являются $\nu_1, ..., \nu_n$). Формально, каждая $d\nu_i$ является мерой, совпадающей с сужением меры μ на $[\mathbf{D}]$. Если граница $\partial\mathbf{D}$ не содержит прямолинейных отрезков (это свойство $\partial\mathbf{D}$ мы предполагаем), для $\mu^{(n)}$-почти всех последовательностей $\nu_1, ..., \nu_n$, никакие три точки множества $\{P_i\}$ не лежат на одной прямой. Следовательно, уравнение (2.2) можно проинтегрировать по мере $\mu^{(n)}$ по множеству $[\mathbf{D}]^n$ (ср. [1], [2] и [3]). На $\mathbf{G}$ рассмотрим функцию

$$\chi = \chi(g) = \text{ длина хорды } g \cap \mathbf{D}, \quad g \in \mathbf{G}.$$

Используя вариант (2.1)

$$\int I_n(g \cap \mathbf{D})\, d\mu^{(n)} = (4\,\chi(g))^n, \quad (2.3)$$

проинтегрируем левую часть (2.2) :

$$\frac{1}{2}\int \mu([Z] \cap A)\, d\mu^{(n)} = \frac{1}{2}\int d\mu^{(n)} \int_{[Z]} I_n(g \cap \mathbf{D})\, d\mu =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{[Z]} d\mu \int I_n(g \cap \mathbf{D})\, d\mu^{(n)} = \frac{1}{2}\int_{[Z]} (4\,\chi(g))^n\, d\mu.$$

Перейдём к интегрированию правой части (2.2). По симметрии имеем

$$2\int \sum_{\nu_i} |\nu_i|\, I_{[Z]}(\nu_i) I_{n-1}(\nu_i)\, d\mu^{(n)} = 2n \int ... \int |\nu_1|\, I_{[Z]}(\nu_1) I_{n-1}(\nu_1)\, d\nu_1\, d\nu_2 ... d\nu_n =$$
$$= 2n \int I_{[Z]}(\nu_1)|\nu_1| d\nu_1 \int ... \int I_{n-1}(\nu_1)\, d\nu_2 ... d\nu_n = \frac{n}{2}\int_{[Z]} (4\,\chi(g))^n\, d\mu.$$

Для удобства представим разность между этими двумя интегралами в виде

$$\int \left[\frac{1}{2}\mu([Z] \cap A) - 2\sum_{\nu_i} I_{n-1}(\nu_i) I_{[Z]}(\nu_i)|\nu_i|\right] d\mu^{(n)} =$$

$$= 4^n(1-n)\,\frac{1}{2}\int_{[Z]} f(\chi(g))\, d\mu, \quad (2.4)$$

где $f(x) = x^n$. Ниже $f(x)$ будет обозначать более общую функцию.

Направленную хорду ν_i будем задавать параметрами

l_i = точка входа хорды ν_i, так что $l_i \in \partial\mathbf{D}$,

ψ_i = угол между ν_i и $\partial\mathbf{D}$ в точке l_i.

Имеет место следующая формула, где dl – элемент длины дуги

$$d\nu_i = \sin\psi_i \, d\psi_i \, dl_i. \tag{2.5}$$

По симметрии

$$\int \left[\sum_{d_i} I_{n-2}(d_i)|d_i| I_{[Z]}(d_i) - \sum_{s_i} I_{n-2}(s_i)|s_i| I_{[Z]}(s_i) \right] d\mu^{(n)} =$$

$$= 2n(n-1) \int \ldots \int |l_1, l_2| I_{n-2}(l_1, l_2) \, I_{[Z]}(l_1, l_2) \, [I_d(l_1, l_2) - I_s(l_1, l_2)] \, d\nu_1 \ldots d\nu_n. \tag{2.6}$$

В этом выражении $I_d(l_1, l_2) = 1$, если прямолинейный отрезок, соединяющий концы входа l_1 и l_2 хорд ν_1 и ν_2, принадлежит множеству $\{d_k\}$, и $I_d(l_1, l_2) = 0$ – в противном случае, $I_s(l_1, l_2) = 1 - I_d(l_1, l_2)$. Используя (2.3) и (2.5), перепишем (2.6) в виде

$$\frac{n(n-1)}{2} \int \ldots \int (4|l_1, l_2|)^{n-1} [I_d(l_1, l_2) - I_s(l_1, l_2)] I_{[Z]}(l_1, l_2) \sin\psi_1 \sin\psi_2 d\psi_1 d\psi_2 dl_1 dl_2.$$

Для фиксированных l_1, $l_2 \in \partial\mathbf{D}$ имеем

$$\int_0^\pi \int_0^\pi \sin\psi_1 \, \sin\psi_2 \, [I_d(l_1, l_2) - I_s(l_1, l_2)] \, d\psi_1 \, d\psi_2 = -4\cos\alpha_1 \, \cos\alpha_2,$$

где α_i – угол между $\partial\mathbf{D}$ и прямой l_1, l_2 в точке l_i, $i = 1, 2$. Оба угла α_1, α_2 выбираются внутри $\mathbf{D}$, в одной полуплоскости относительно прямой l_1, l_2 (см. Рис. 2). Таким образом, результат интегрирования суммы последних двух слагаемых в (2.2) имеет вид

$$-2n(n-1) \iint_{(\partial\mathbf{D})^2} I_{[Z]}(l_1, l_2)(4|l_1, l_2|)^{n-1} \cos\alpha_1 \, \cos\alpha_2 \, dl_1 \, dl_2 =$$

$$= -\frac{1}{2} n(n-1) \int_{[Z]} (4\chi(g))^n \, \cot\alpha_1 \, \cot\alpha_2 \, d\mu.$$

Последнее равенство использует соответствие

$$(\partial\mathbf{D})^2 \to [\mathbf{D}] : l_1, l_2 \to g = \text{прямая } g \text{ от } l_1 \text{ к } l_2$$

и соответствующий якобиан (см. [7]) $dl_1 \, dl_2 = \dfrac{\chi}{\sin\alpha_1 \, \sin\alpha_2} d\mu$. Итак, результат последнего интегрирования

$$\int \left[\sum_{d_i} I_{n-2}(d_i) I_{[Z]}(d_i)|d_i| - \sum_{s_i} I_{n-2}(s_i) I_{[Z]}(s_i)|s_i| \right] d\mu^{(n)} =$$

$$= 4^n \frac{1-n}{2} \int_{[Z]} f'(\chi(g)) \, \chi(g) \, \cot\alpha_1 \, \cot\alpha_2 \, d\mu, \tag{2.7}$$

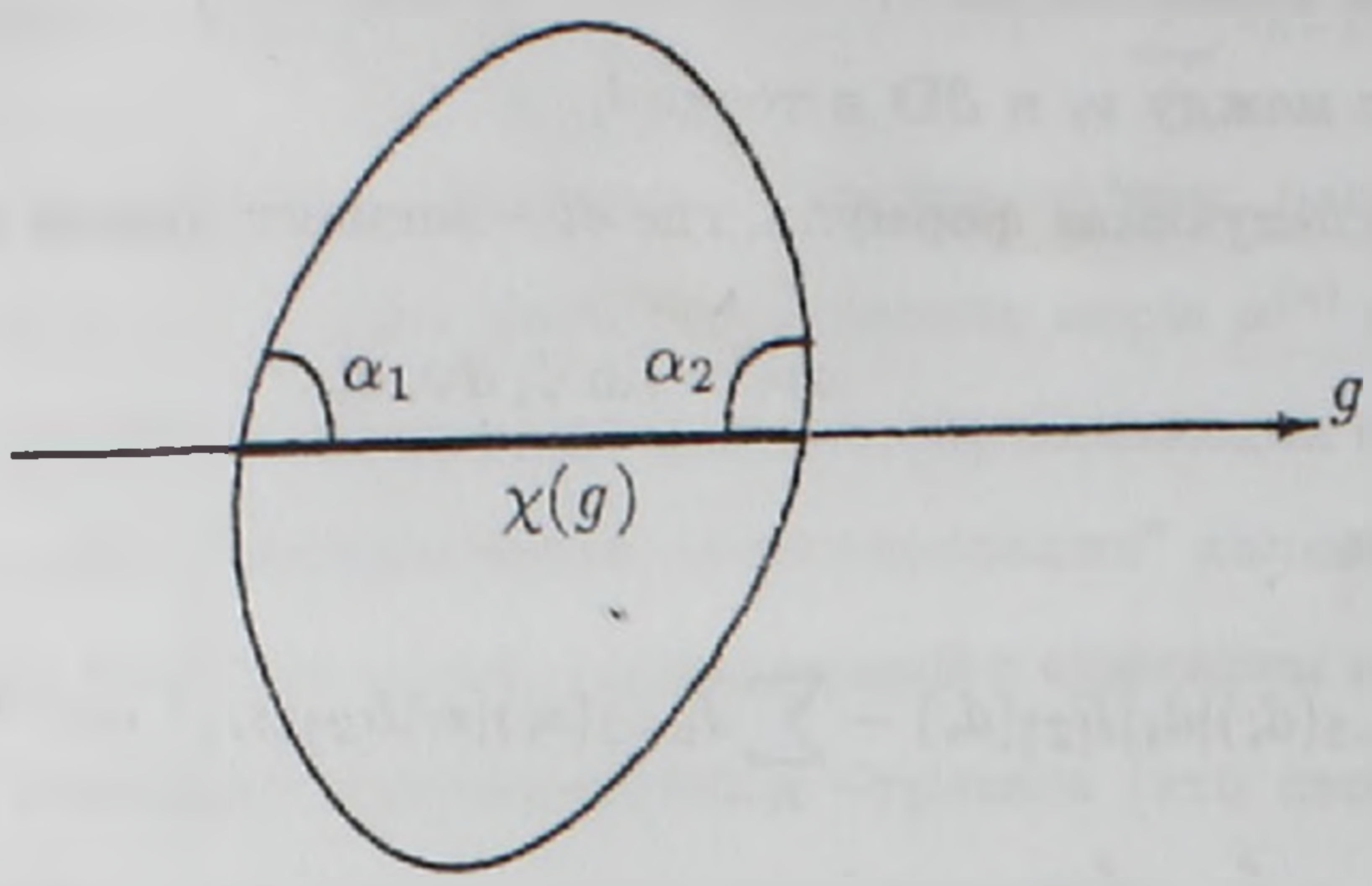

Рис. 2.

где $f(x) = x^n$ и $nx^n = f'(x)x$.

Перейдём к интегрированию слагаемых во второй строке формулы (2.2). Пусть S и T – концы отрезка Z (см. Рис. 1). Отдельно выписывая вклады концов S и T и используя симметрию, получаем

$$\int \left[\sum_{\delta_i} I_{n-1}(\delta_i)|\delta_i| - \sum_{\sigma_i} I_{n-1}(\sigma_i)|\sigma_i| \right] d\mu^{(n)} = X_1 + X_2, \quad \text{где}$$

$$X_1 = 2n \int I_{n-1}(T, l_1)\,|T, l_1|\,[I_\delta(T, l_1) - I_\sigma(T, l_1)]\, d\nu_1 ... d\nu_n \quad \text{и}$$

$$X_2 = 2n \int I_{n-1}(S, l_1)\,|S, l_1|\,[I_\delta(S, l_1) - I_\sigma(S, l_1)]\, d\nu_1 ... d\nu_n.$$

Выше, T, l_1 (или S, l_1) = прямолинейный отрезок, соединяющий T (или S) с точкой входа l_1 хорды ν_1.

Для $P \in \mathbb{R}^2$ и $l \in \partial\mathbf{D}$ определим

$\chi(P, l)$ = длина хорды области $\mathbf{D}$ на прямой Pl,

$\beta(P, l)$ = угол между прямой Pl и прямой, касательной к $\partial\mathbf{D}$ в точке l, внутри области $\mathbf{D}$ и в левой для Pl полуплоскости.

Прямая, проходящая через отрезок Z, разбивает $\partial\mathbf{D}$ на две дуги, L_1 и L_2. Пусть L_1 лежит справа, а L_2 слева от прямой от S к T (см. Рис. 1). Легко находим (см. Рис. 3)

$$I_\delta(T, l_1) = 1 \text{ на } \{(\psi_1, l_1) : \psi_1 \in \beta(T, l_1), l_1 \in L_1 \text{ или } \psi_1 \in [\pi - \beta(T, l_1)], l_1 \in L_2\},$$

$$I_\sigma(S, l_1) = 1 \text{ на } \{(\psi_1, l_1) : \psi_1 \in \beta(S, l_1), l_1 \in L_1 \text{ или } \psi_1 \in [\pi - \beta(S, l_1)], l_1 \in L_2\},$$

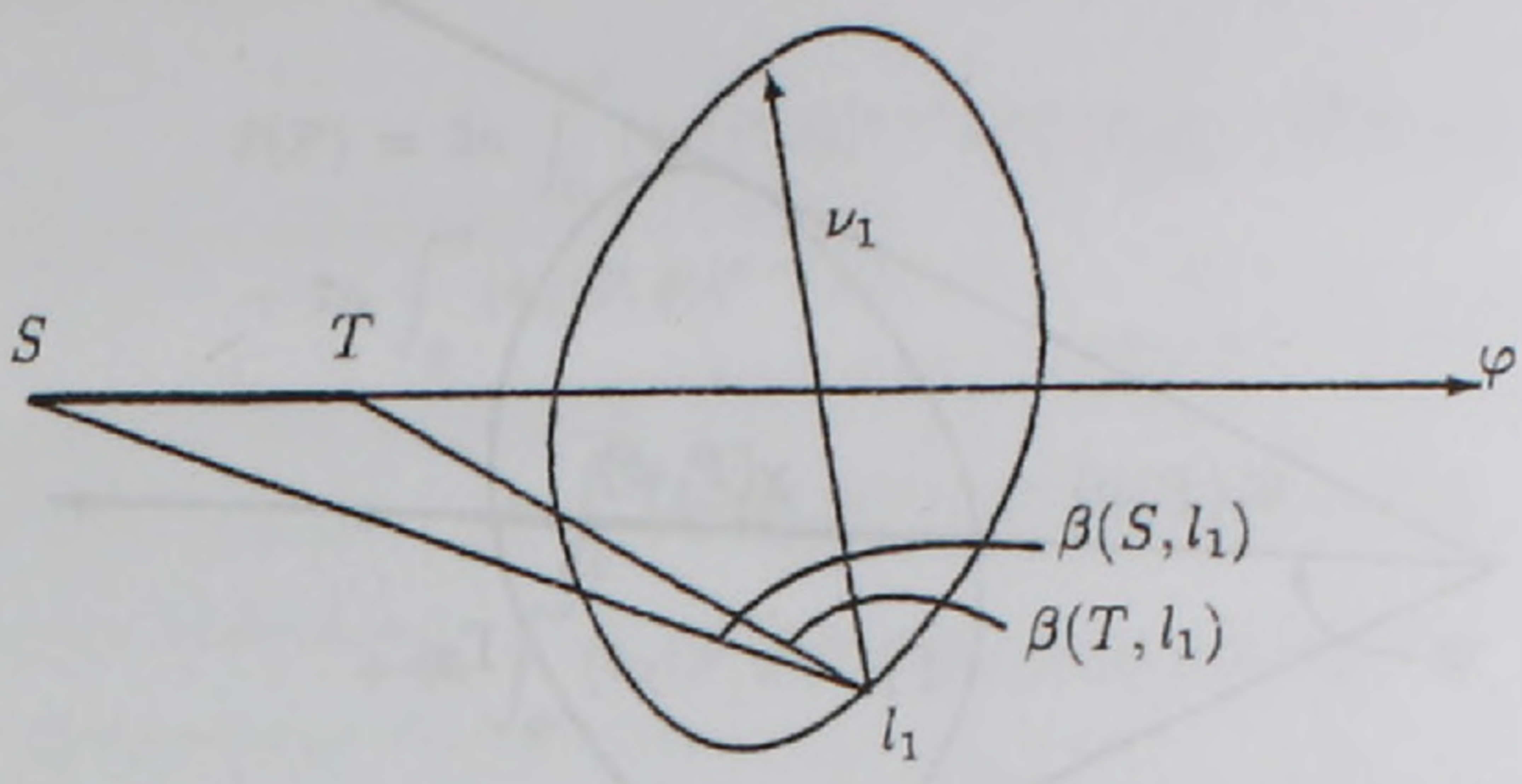

Рис. 3.

где $[\pi - \beta(P,l)]$ – угол смежный к $\beta(P,l)$. Следовательно, используя (2.3) и (2.5), получаем

$$X_1 = -4\,n \int_{L_1} (4\chi(T,l_1))^{n-1}\, |T,l_1| \cos\beta(T,l_1)\, dl_1 + \\ + 4\,n \int_{L_2} (4\chi(T,l_1))^{n-1}\, |T,l_1| \cos\beta(T,l_1)\, dl_1$$

и

$$X_2 = 4\,n \int_{L_1} (4\chi(S,l_1))^{n-1}\, |S,l_1| \cos\beta(S,l_1)\, dl_1 - \\ - 4n \int_{L_2} (4\chi(S,l_1))^{n-1}\, |S,l_1| \cos\beta(S,l_1)\, dl_1.$$

Рассмотрим функцию

$$J(P) = 4n \int_{L_1} (4\chi(P,l))^{n-1}\, |P,l| \cos\beta(P,l)\, dl - \\ - 4n \int_{L_2} (4\chi(P,l))^{n-1} |P,l| \cos\beta(P,l)\, dl,$$

определённую для точек P, лежащих на продолжении хорды, отделяющей L_1 от L_2.

Разобьём ∂D на две ветви (см. Рис. 2)

$$\Gamma_1(P) = \{l \in \partial\mathbf{D} :\ \text{отрезок } P,l \text{ не пересекает внутренность области } \mathbf{D}\},$$

$$\Gamma_2(P) = \{l \in \partial\mathbf{D} :\ \text{отрезок } P,l \text{ проходит через внутренность области } \mathbf{D}\}.$$

На каждой из двух ветвей отображение

$$l \to \phi = \ \text{направление луча от точки } P \text{ к точке } l$$

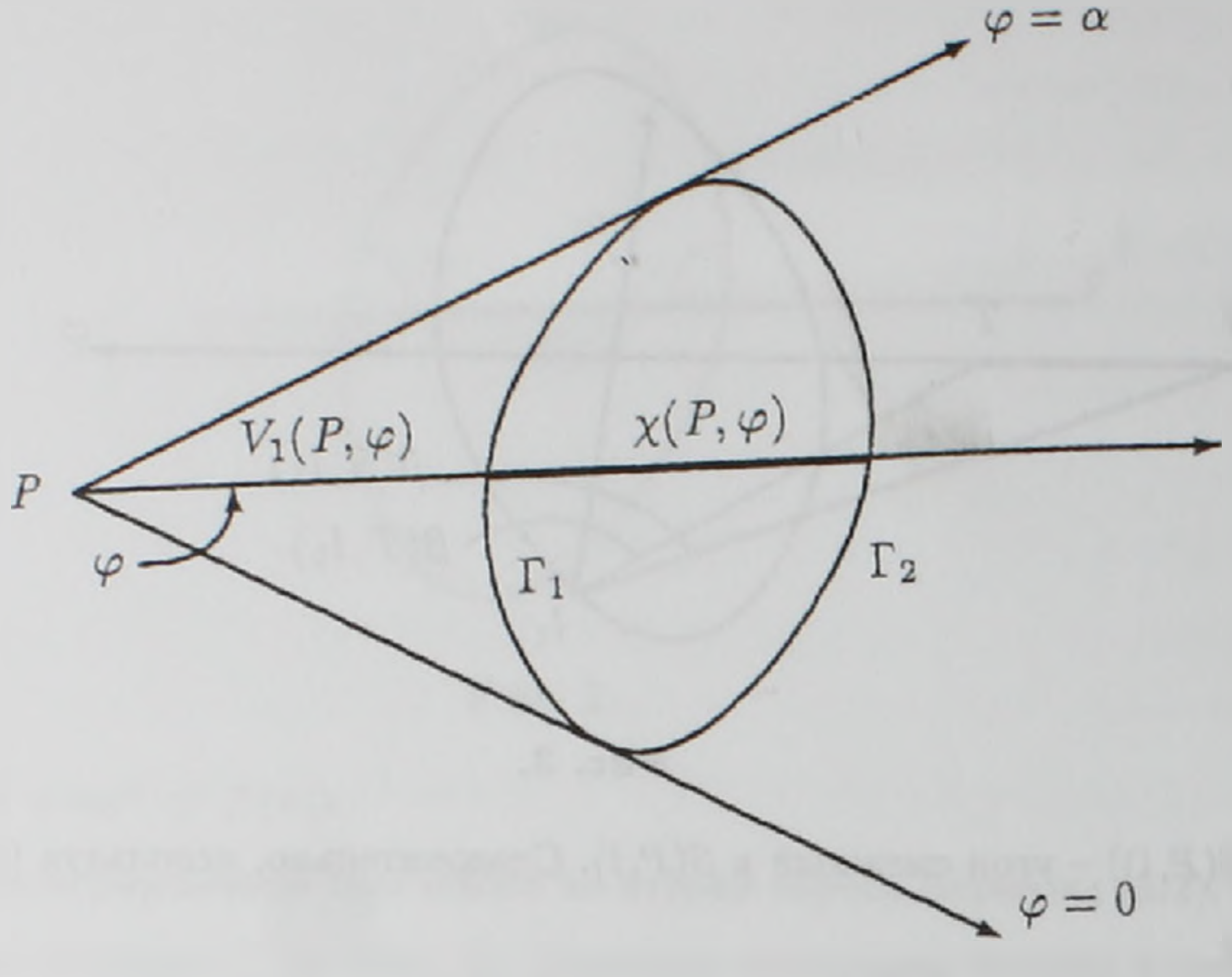

Рис. 4.

взаимно-однозначно. Образ каждой из ветвей = множество направлений, в которых область D видна из точки P. На этом мбожестве имеем следующие три функции :

$\chi(P, \phi) =$ образ $\chi(P, l)$;

$V_i(P, \phi) =$ образ сужения $|P, l|$ на $\Gamma_i(P)$, $i = 1, 2$ и

$V(P, \phi) = \frac{1}{2} V_1(P, \phi) + \frac{1}{2} V_2(P, \phi)$.

Ниже, где необходимо мы отождествляем направление ϕ с углом между ϕ и нулевым направлением, которое выбирается как направление касательной к области ∂D из точки P, оставляющей внутренность области D в левой полуплоскости (предполагаем, что ϕ измеряется против часовой стрелки). По существу, ϕ меняется в интервале $(0, \alpha)$, где α - направление касательной к ∂D из точки P, оставляющей внутренность области D в правой полуплоскости (см. Рис. 4). Для любой точки P, фиксированной вне области D, имеем

$$2\,|P, l|\cos\beta(P, l)\,dl = dV_1^2(P, \phi) \text{ на } \Gamma_1(P),$$

$$2\,|P, l|\cos\beta(P, l)\,dl = -dV_2^2(P, \phi) \text{ на } \Gamma_2(P).$$

Ниже всегда $\varphi =$ направление отрезка Z из S к T, т.е. интервал $(0, \varphi)$ соответствует L_1 и (φ, α) соответствует L_2.

Так как $(0, \varphi)$ служит образом (при отображении $l \to \phi$) как для $L_1 \cap \Gamma_1(P)$, так и для $L_1 \cap \Gamma_2(P)$, а (φ, α) имеет аналогичное свойство для L_2, мы находим

$$J(P) = 2n \int_0^{\varphi} (4\chi(P,\phi))^{n-1}\, d[V_1^2(P,\phi) - V_2^2(P,\phi)] -$$
$$- 2n \int_{\varphi}^{\alpha} (4\chi(P,\phi))^{n-1}\, d[V_1^2(P,\phi) - V_2^2(P,\phi)] =$$

$$= -4n \int_0^{\varphi} (4\chi(P,\phi))^{n-1}\, d[V(P,\phi)\,\chi(P,\phi)] +$$
$$+ 4n \int_{\varphi}^{\alpha} (4\chi(P,\phi))^{n-1}\, d[V(P,\phi)\,\chi(P,\phi)].$$

Так как угол ϕ возрастающий против часовой стрелки, то интегрирование по $(0, \varphi)$ соответствует интегрированию по переменной χ от 0 до $\chi(P, \varphi)$. Интегрирование по (φ, α) соответствует интегрированию по переменной χ от $\chi(P, \varphi)$ до 0. Поэтому, интегрирование по частям даёт

$$J(P) = -nV(P,\varphi)\,(4\chi(P,\varphi))^n + 4n(n-1) \int_0^{\varphi} (4\chi(P,\phi))^{n-1}\, V(P,\phi)\, d\chi(P,\phi) -$$

$$-nV(P,\varphi)\,(4\chi(P,\varphi))^n - 4n(n-1) \int_{\varphi}^{\alpha} (4\chi(P,\phi))^{n-1}\, V(P,\phi)\, d\chi(P,\phi).$$

Так как $V(S, \varphi) - V(T, \varphi) = |Z|$, то имеем

$$\int \left[\sum_{\delta_i} I_{n-1}(\delta_i)|\delta_i| - \sum_{\sigma_i} I_{n-1}(\sigma_i)|\sigma_i| \right] d\mu^{(n)} =$$
$$= -2n|Z|\,(4\chi(Z))^n + 4^n(n-1)\,[k(S,\varphi) - k(T,\varphi)],$$

где $\chi(Z) = \chi(T, \varphi) = \chi(S, \varphi)$ – длина хорды на продолжении отрезка Z и

$$k(P,\varphi) = \int_0^{\varphi} f'(\chi(P,\phi))\, V(P,\phi)\, d\chi(P,\phi) - \int_{\varphi}^{\alpha} f'(\chi(P,\phi))\, V(P,\phi)\, d\chi(P,\phi). \quad (2.8)$$

Здесь $f(x) = x^n$ и $f'(x) = nx^{n-1}$.

Наконец, (см. (2.2))

$$2 \int I_n(Z)|Z|\, d\mu^{(n)} = 2|Z|(4\chi(Z))^n.$$

Итак, получаем

$$\int \left[2\, I_n(Z)|Z| + \sum_{\delta_i} I_{n-1}(\delta_i)|\delta_i| - \sum_{\sigma_i} I_{n-1}(\sigma_i)|\sigma_i| \right] d\mu^{(n)} =$$

$$= 4^n(n-1)\,[k(S,\varphi) - k(T,\varphi) - 2|Z|\, f(\chi(Z))].$$

Это соотношение комбинируем с (2.4) и (2.7). После сокращения на множитель $4^n(n-1)$ получаем тождество типа Плейеля (см. [4], [5])

$$\frac{1}{2}\int_{[Z]}[\,f(\chi(g)) - f'(\chi(g))\,\chi(g)\,\cot\alpha_1\,\cot\alpha_2\,]\,d\mu = k(T,\varphi) - k(S,\varphi) + 2|Z|\,f(\chi(Z)), \tag{2.9}$$

вначале для функций $f(x) = x^n$ при $n > 1$. Благодаря линейности, (2.9) продолжается на многочлены вида $f(x) = a_2x^2 + ... + a_nx^n$. Наконец, по теореме Вейерштрасса о приближении функций многочленами, заключаем, что (2.9) имеет место для любой функции $f(x)$, имеющей непрерывную производную $f'(x)$ и удовлетворяющей условию $f(0) = 0$.

Подставляя $|Z| = V(S,\varphi) - V(T,\varphi)$, преобразуем правую часть формулы (2.9) к виду (1.1), причём

$$K(P,\varphi) = k(P,\varphi) - 2\,V(P,\varphi)\,f(\chi(P,\varphi)). \tag{2.10}$$

§3. ПОРОЖДЕНИЕ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ МЕР И ДЕЗИНТЕГРАЦИЯ

Множество Z ненаправленных отрезков иногда можно ориентировать, т.е. задать непрерывное отображение $z \to (S,T)$, где $z \in \mathbf{Z}$, а в паре (S,T) представлены оба конца отрезка z.

Пусть сегментная функция $w(z)$ на ориентированном множестве отрезков определена с помощью разности

$$w(z) = K(T,\varphi) - K(S,\varphi), \tag{3.1}$$

см. (1.1). Будем говорить, что $w(z)$ принадлежит классу $\mathbf{W}$, если $w(z)$ может быть представлена в виде интеграла по мере μ по множеству $[z]$ от некоторой функции **плотности** (необязательно положительной), определённой в пространстве $\mathbf{G}^*$ ненаправленных прямых на плоскости.

Предположим, что в (3.1) $w(z) \in \mathbf{W}$ и рассмотрим некоторые следствия (необходимые условия) для $K(P,\varphi)$.

Комбинаторная Интегральная геометрия распространяет теорему Крофтона (см. [1], [7]) на меры, которые не являются инвариантными относительно евклидовых движений или даже необязательно неотрицательны. Пусть z_1 и z_2 являются сторонами выпуклого четырёхугольника $\mathbf{Q}$ и не имеют общих концов. Для любой беспучковой знакопеременной меры $\mathbf{m}$ в пространстве $\mathbf{G}^*$ ("беспучковая" означает, что значение меры $\mathbf{m}$ на любом пучке прямых, проходящих через точку, равно нулю) мы имеем тождество Крофтона

$$2\,\mathbf{m}([z_1]\cap[z_2]) = w(d_1) + w(d_2) - w(s_1) - w(s_2), \quad \text{где} \quad w(z) = \mathbf{m}([z]), \tag{3.2}$$

d_1 и d_2 – диагонали, а s_1 и s_2 – стороны четырёхугольника $\mathbf{Q}$, отличные от z_1 или z_2 (см. Рис. 5).

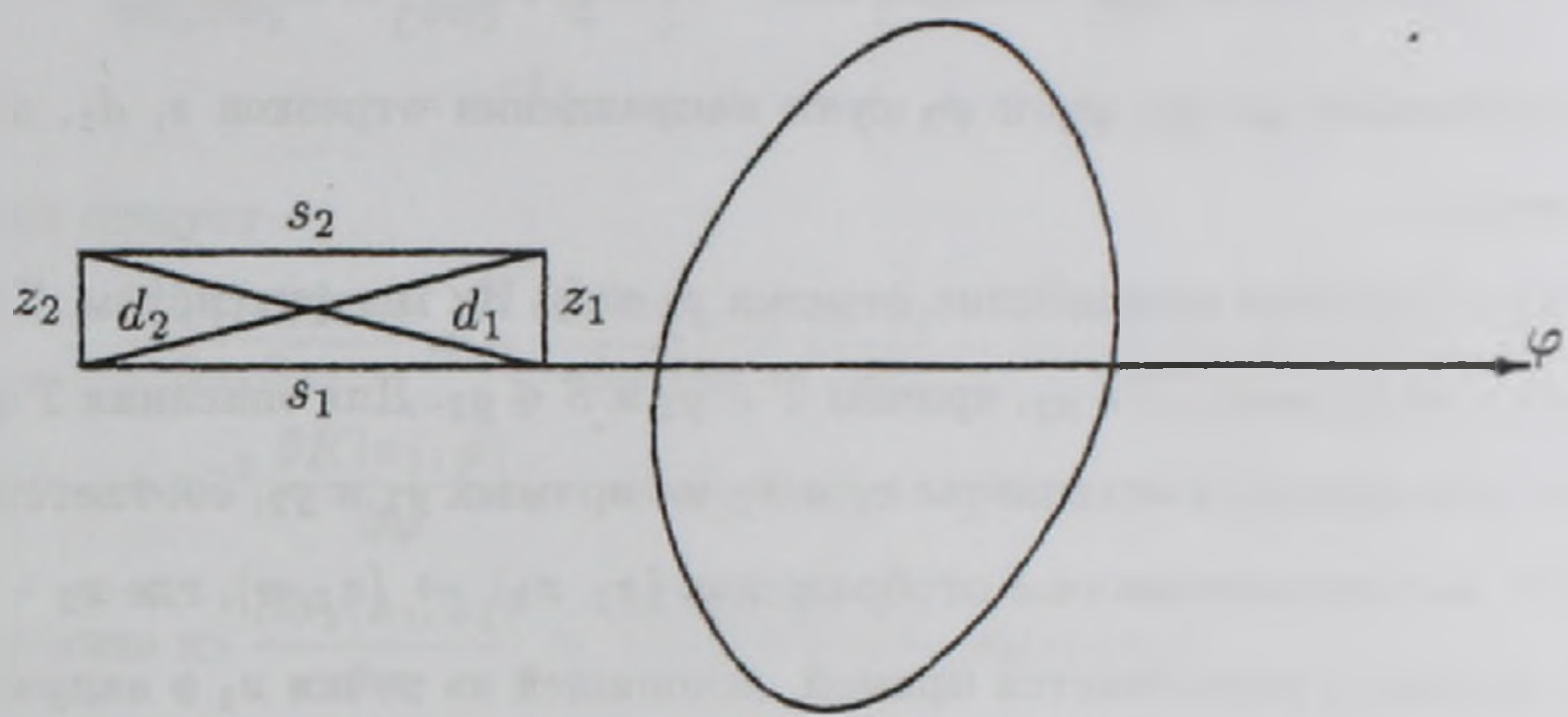

Рис. 5.

В случае когда плотность $h(g)$, $g \in \mathbf{G}^*$ меры $\mathbf{m} \in \mathbf{W}$ непрерывна, то по теореме о среднем значении получаем

$$h(g) = \lim_{l_1, l_2 \to 0} \frac{\mathbf{m}([z_1]\cap[z_2])}{\mu([z_1]\cap[z_2])}, \tag{3.3}$$

где l_i – длина отрезка z_i, $i = 1, 2$, μ – стандартная мера $\mathbf{G}^*$, инвариантная относительно евклидовых движений, множество $[z_1]\cap[z_2]$ сжимается к прямой g. Мы предположим, что сторона s_1 не изменяется, т.е. g – прямая, содержащая отрезок s_1. Для меры μ имеем (см. [7])

$$\mu([z_1]\cap[z_2]) = \frac{\sin\psi_1 \sin\psi_2}{a} l_1 l_2 + o(l^2), \tag{3.4}$$

где a – длина отрезка s_1, а ψ_1 и ψ_2 суть внутренние углы между сторонами s_1 и сторонами z_1 и z_2 четырёхугольника $\mathbf{Q}$, см. Рис. 5. Из (3.2)–(3.4) получаем

$$h(g) = \frac{1}{2} \frac{a}{\sin\psi_1 \sin\psi_2} \lim_{l_1, l_2 \to 0} (l_1 l_2)^{-1} [w(d_1) + w(d_2) - w(s_1) - w(s_2)]. \tag{3.5}$$

Если для отрезка s_1 определены S и T, то для достаточно малых l_1 и l_2 то же имеет место для d_1, d_2 и s_2. Будем обозначать вершины четырёхугольника $\mathbf{Q}$

через S, T, S_1 и T_1, так что $z_1 = SS_1$, $z_2 = TT_1$, $d_1 = ST_1$, $d_2 = S_1T$, $s_1 = ST$ и $s_2 = S_1T_1$. В силу (3.1) для достаточно малых l_1 и l_2

$$w(d_1) + w(d_2) - w(s_1) - w(s_2) = \Delta_T - \Delta_S,$$

где

$$\Delta_T = K(T,\varphi_1) + K(T_1,\varphi_2) - K(T_1,\varphi_3) - K(T,\varphi),$$

$$\Delta_S = K(S,\varphi_2) + K(S_1,\varphi_1) - K(S_1,\varphi_3) - K(S,\varphi).$$

В этих выражениях φ, φ_1, φ_2 и φ_3 суть направления отрезков s, d_1, d_2 и s_2, соответственно.

Пусть g_1 и g_2 – прямые содержащие отрезки z_1 и z_2. Их мы фиксируем. Точки T и S меняются на прямых g_1 и g_2, причём $T \in g_1$ и $S \in g_2$. Для описания T и S мы используем одномерные координаты x_1 и x_2 на прямых g_1 и g_2, соответственно. Рассмотрим взаимнооднозначное отображение $(x_1, x_2) \to (x_1, \varphi)$, где x_2 – точка, в которой прямая g_2 пересекается прямой, исходящей из точки x_1 в направлении φ. Это отображение определяет функцию $U_1(x_1, x_2) : U_1(x_1, x_2) = K(x_1, \varphi) = K(T, \varphi)$. Имеем

$$\lim_{l_1, l_2 \to 0} (l_1 l_2)^{-1} \Delta_T = \lim_{l_1, l_2 \to 0} (l_1 l_2)^{-1} \left[U_1(x_1 + l_1, x_2) + U_1(x_1, x_2 + l_2) - \right.$$
$$\left. - U_1(x_1 + l_1, x_2 + l_2) - U_1(x_1, x_2)\right] = -\frac{\partial^2 U_1(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2},$$

так как в квадратных скобках стоит смешанная вторая разность. Аналогично, используя отображение $(x_1, x_2) \to (x_2, \varphi)$, где x_1 – точка, в которой прямая g_1 пересекается прямой, исходящей из точки x_2 в направлении φ, определим $U_2(x_1, x_2) = K(x_2, \varphi) = K(S, \varphi)$. Находим

$$\lim_{l_1, l_2 \to 0} (l_1 l_2)^{-1} \Delta_S = -\frac{\partial^2 U_2(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Таким образом,

$$h(g) = \frac{1}{2} \frac{a}{\sin\psi_1 \sin\psi_2} \left[\frac{\partial^2 U_2(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 U_1(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}\right]. \tag{3.6}$$

Производные функции $U_1(x_1, x_2)$ выразим через $K(x_1, \varphi)$:

$$\frac{\partial U_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{\partial K(x_1, \varphi)}{\partial x_1} + \frac{\partial K(x_1, \varphi)}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad \text{отсюда следует, что}$$

$$\frac{\partial^2 U_1(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 K(x_1, \varphi)}{\partial x_1 \partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 K(x_1, \varphi)}{\partial \varphi^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial K(x_1, \varphi)}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Из "узких" треугольников x_1, x_2, x_1+l_1 и x_1, x_2, x_2+l_2 находим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = \frac{\sin\psi_1}{a} \quad \text{и} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = -\frac{\sin\psi_2}{a}.$$

Используя аналогичные соотношения

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} = -\frac{\sin\psi_2}{a} \quad \text{и} \quad \frac{\partial a}{\partial x_2} = -\cos\psi_2,$$

получаем

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2} = \left[\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\sin\psi_1}{a}\right] = a^{-2}\left[\cos\psi_1\, a\,\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} - \sin\psi_1\frac{\partial a}{\partial x_2}\right] =$$
$$= a^{-2}\left[-\cos\psi_1\sin\psi_2 + \sin\psi_1\cos\psi_2\right].$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U_1(x_1,x_2)}{\partial x_1\partial x_2} &= -\frac{\partial^2 K(x_1,\varphi)}{\partial x_1\partial\varphi}\frac{\sin\psi_2}{a} - \frac{\partial^2 K(x_1,\varphi)}{\partial\varphi^2}\frac{\sin\psi_1\sin\psi_2}{a^2} + \\ &+ a^{-2}\frac{\partial K(x_1,\varphi)}{\partial\varphi}\left[-\cos\psi_1\sin\psi_2 + \sin\psi_1\cos\psi_2\right]\end{aligned} \tag{3.7}$$

Аналогично из $\dfrac{\partial U_2(x_1,x_2)}{\partial x_1} = \dfrac{\partial K(x_2,\varphi)}{\partial\varphi}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}$ вытекает

$$\frac{\partial^2 U_2(x_1,x_2)}{\partial x_1\partial x_2} = \frac{\partial^2 K(x_2,\varphi)}{\partial x_2\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 K(x_2,\varphi)}{\partial\varphi^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial K(x_2,\varphi)}{\partial\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}.$$

Итак, находим

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U_2(x_1,x_2)}{\partial x_1\partial x_2} &= \frac{\partial^2 K(x_2,\varphi)}{\partial x_2\partial\varphi}\frac{\sin\psi_1}{a} - \frac{\partial^2 K(x_2,\varphi)}{\partial\varphi^2}\frac{\sin\psi_1\sin\psi_2}{a^2} + \\ &+ a^{-2}\frac{\partial K(x_2,\varphi)}{\partial\varphi}\left[-\cos\psi_1\sin\psi_2 + \sin\psi_1\cos\psi_2\right].\end{aligned} \tag{3.8}$$

Подставляя (3.7) и (3.8) в (3.6) и заменяя x_1 на T и x_2 на S и используя стандартные формулы для производных по направлению, получаем

$$\frac{\partial^2 K(x_1,\varphi)}{\partial x_1\partial\varphi} = -\frac{\partial^2 K(T,\varphi)}{\partial_\varphi T\partial\varphi}\cos\psi_1 + \frac{\partial^2 K(T,\varphi)}{\partial_n T\partial\varphi}\sin\psi_1,$$
$$\frac{\partial^2 K(x_2,\varphi)}{\partial x_2\partial\varphi} = \frac{\partial^2 K(S,\varphi)}{\partial_\varphi S\partial\varphi}\cos\psi_2 + \frac{\partial^2 K(S,\varphi)}{\partial_n S\partial\varphi}\sin\psi_2,$$

где $\dfrac{\partial}{\partial_\varphi P}$ и $\dfrac{\partial}{\partial_n P}$ обозначают дифференцирование по аргументу P в направлении φ и направлении нормальном к φ. В результате имеем

$$\begin{aligned}2h(g) &= \frac{\partial^2 K(S,\varphi)}{\partial_\varphi S\partial\varphi}\cot\psi_2 + \frac{\partial^2 K(S,\varphi)}{\partial_n S\partial\varphi} - a^{-1}\frac{\partial^2 K(S,\varphi)}{\partial\varphi^2} + \\ &+ a^{-1}\frac{\partial K(S,\varphi)}{\partial\varphi}\left[-\cot\psi_1 + \cot\psi_2\right] - \\ &- \frac{\partial^2 K(T,\varphi)}{\partial_\varphi T\partial\varphi}\cot\psi_1 + \frac{\partial^2 K(T,\varphi)}{\partial_n T\partial\varphi} + a^{-1}\frac{\partial^2 K(T,\varphi)}{\partial\varphi^2} - \\ &- a^{-1}\frac{\partial K(T,\varphi)}{\partial\varphi}\left[-\cot\psi_1 + \cot\psi_2\right].\end{aligned} \tag{3.9}$$

Примечательным свойством этого выражения для $h(g)$ является присутствие слагаемых, пропорциональных $\cot\psi_1$ или $\cot\psi_2$. Однако, предел (3.3) не зависит от геометрии множества $[z_1]\cap[z_2]$. Поэтому необходимо имеем

$$a^{-1}\frac{\partial K(T,\varphi)}{\partial\varphi}-a^{-1}\frac{\partial K(S,\varphi)}{\partial\varphi}-\frac{\partial^2 K(T,\varphi)}{\partial_\varphi T\partial\varphi}=0, \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial^2 K(S,\varphi)}{\partial S\partial\varphi}+a^{-1}\frac{\partial K(S,\varphi)}{\partial\varphi}-a^{-1}\frac{\partial K(T,\varphi)}{\partial\varphi}=0. \tag{3.11}$$

Умножая (3.10) на a и дифференцируя по S в направлении φ, получаем

$$\frac{\partial^2 K(S,\varphi)}{\partial_\varphi S\partial\varphi}=\frac{\partial^2 K(T,\varphi)}{\partial_\varphi T\partial\varphi}.$$

То же получаем из (3.11). Сформулируем этот результат.

Будем говорить, что флаговая функция $F(P,\varphi)$ определена на $\mathbf{G}^*$, если существует функция $H(g)$, определённая на $\mathbf{G}^*$ такая, что

$$F(P,\varphi)=H(g), \tag{3.12}$$

где $g\in\mathbf{G}^*$ – прямая, содержащая точку P и имеющая направление φ (в этом случае говорим, что флаг (P,φ) принадлежит прямой g).

Если достаточно гладкая флаговая функция $K(P,\varphi)$ с помощью формул (3.1) и (3.2) соответствует знакопеременной мере $\mathfrak{m}$ в пространстве прямых $\mathbf{G}^*$, то $\dfrac{\partial^2 K(P,\varphi)}{\partial_\varphi P\partial\varphi}$ определена на $\mathbf{G}^*$.

Свойство определённости $\dfrac{\partial^2 K(P,\varphi)}{\partial_\varphi P\partial\varphi}$ на $\mathbf{G}^*$ есть достаточное условие порождения знакопеременной меры. Доказательство можно получить с помощью критерия, полученного в [10]. По критерию, условие равномерной ограниченности отношения

$$\frac{a}{\sin\psi_1\,\sin\psi_2}(l_1l_2)^{-1}[w(d_1)+w(d_2)-w(s_1)-w(s_2)]$$

(см. (3.5)) является достаточным условием порождения знакопеременной меры функцией $w(z)$. При некоторых условиях гладкости на $K(P,\varphi)$ (достаточно существование непрерывных производных третьего порядка) это свойство следует из (3.10) и (3.11). Но (3.10) и (3.11) имеют место тогда и только тогда, когда $\dfrac{\partial^2 K(P,\varphi)}{\partial_\varphi P\partial\varphi}$ является функцией, определённой на $\mathbf{G}^*$. Мы приходим к следующему результату, касающемуся класса $\mathbf{W}$ (см. начало §3).

Теорема. Пусть на некотором ориентированном множестве отрезков функция

$$w(z) = K(T,\varphi) - K(S,\varphi)$$

определяется с помощью трижды непрерывно дифференцируемой флаговой функции $K(P,\varphi)$. Необходимым и достаточным условием для $w(z) \in \mathbf{W}$ является определённость на $\mathbf{G}^*$ смешанной производной $\dfrac{\partial^2 K(P,\varphi)}{\partial_\varphi P \partial\varphi}$. В этом случае соответствующая знакопеременная мера m обладает плотностью $h(g)$ относительно стандартной, инвариантной относительно евклидовых движений меры, причём

$$2h(g) = \frac{\partial^2 K(T,\varphi)}{\partial_n T \partial\varphi} + \frac{\partial^2 K(S,\varphi)}{\partial_n S \partial\varphi} + \frac{1}{a}\frac{\partial^2 K(T,\varphi)}{\partial\varphi^2} - \frac{1}{a}\frac{\partial^2 K(S,\varphi)}{\partial\varphi^2}, \tag{3.13}$$

коль скоро флаги (T,φ) и (S,φ) принадлежат одной и той же прямой g.

Отметим удобный предельный вид (при $a \to 0$) выражения (3.13)

$$2h(g) = 2\frac{\partial^2 K(P,\varphi)}{\partial_n P \partial\varphi} + \frac{\partial^3 K(P,\varphi)}{\partial_\varphi P \partial\varphi^2} = L(K(P,\varphi)). \tag{3.14}$$

Возвращаясь к предыдущему параграфу, рассмотрим функцию $K(P,\varphi)$, задаваемую по формулам (2.8) – (2.10). Как следует из (2.9), соответствующая $w(z)$ принадлежит классу $\mathbf{W}$, причём

$$h(g) = f(\chi(g)) - f'(\chi(g))\,\chi(g)\,\cot\alpha_1\,\cot\alpha_2. \tag{3.15}$$

Проверим, что в этом случае выполнен приведённый выше критерий. Имеем

$$\frac{\partial k(P,\varphi)}{\partial\varphi} = 2\,f'(\chi(P,\varphi))\,V(P,\varphi)\frac{\partial\chi(P,\varphi)}{\partial\varphi},$$

поэтому

$$\frac{\partial K(P,\varphi)}{\partial\varphi} = -2\,f(\chi(P,\varphi))\,\frac{\partial V(P,\varphi)}{\partial\varphi}.$$

Из приведённых ниже формул (4.5) и (4.6) имеем $\dfrac{\partial V(P,\varphi)}{\partial\varphi} = H_1(g)\,V(P,\varphi)$, где $H_1(g)$ – функция прямой. Поэтому свойство (3.12) для $\dfrac{\partial^2 K(P,\varphi)}{\partial_\varphi P \partial\varphi}$ вытекает из $\dfrac{\partial V(P,\varphi)}{\partial_\varphi P} = -1.$

Вычисление $L(K(P,\varphi))$ для $K(P,\varphi)$, заданного по формулам (2.8) – (2.10) удобно проводить, исходя из (3.5) при $\psi_1 = \psi_2 = \dfrac{\pi}{2}$ и $l_1 = l_2 = l$, т.е. для прямоугольного $\mathbf{Q}$. В этом случае, из линейности L получаем

$$2h(g) = L(k(P,\varphi)) + 2\lim_{l\to 0}\frac{a}{l^2}\left[\sqrt{a^2+l^2}\,f(\chi(T,\varphi-\frac{l}{a}))+\right.$$
$$\left.+\sqrt{a^2+l^2}\,f(\chi(T+l\mathbf{n},\varphi+\frac{l}{a})) - a\,f(\chi(T+l\mathbf{n},\varphi)) - a\,f(\chi(T,\varphi))\right],$$

где n – вектор единичной длины, имеющий направление z-сторон прямоугольника Q. Используя разложение по формуле Тейлора, легко находим, что последний предел равен

$$2a\,\frac{\partial^2 f(\chi(T,\varphi))}{\partial_n T\partial\varphi} + 2\,\frac{\partial^2 f(\chi(T,\varphi))}{\partial\varphi^2} + 2\,f(\chi(T,\varphi)).$$

Подставляем это значение при $a = 0$ в выражения для $h(g)$, и приравниваем к (3.15). После сокращения слагаемых $2f(\chi(P,\varphi))$, получаем

$$-\,f'(\chi(g))\,\chi(g)\,\cot\alpha_1\,\cot\alpha_2 = \frac{\partial^2 f(\chi(P,\varphi))}{\partial\varphi^2} + L(k(P,\varphi)), \tag{3.16}$$

где (см. (2.8))

$$\begin{aligned} L(k(P,\varphi)) = {} & 2\,\frac{\partial}{\partial_n P}\left[f'(\chi(P,\varphi))V(P,\varphi)\,\frac{\partial\chi(P,\varphi)}{\partial\varphi}\right] + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial_\varphi P\partial\varphi}\left[f'(\chi(P,\varphi))V(P,\varphi)\,\frac{\partial\chi(P,\varphi)}{\partial\varphi}\right]. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Результат (3.16) мы называем "дезинтеграцией" формулы (2.9). Заметим, что (3.16) остаётся в силе, если вместо V в выражении для $L(k(P,\varphi))$ положим

$$V_1 = V - \frac{\chi}{2} \quad \text{или} \quad V_2 = V + \frac{\chi}{2}.$$

Доказательство : Заменяя в (2.8) $V(P,\varphi)$ на функцию $V(P,\varphi) - \dfrac{1}{2}\,\chi(P,\varphi)$, для $K(P,\varphi)$ получаем дополнительное слагаемое, пропорциональное

$$\int_0^{\chi(z)} f'(x)\,U(x)\,dx - \int_{\chi(z)}^0 f'(x)\,U(x)\,dx = 2\int_0^{\chi(z)} f'(x)\,U(x)\,dx.$$

Оно не зависит от точки P, лежащей на прямой, содержащей отрезок Z. Следовательно, подстановка не меняет величины $K(T,\varphi) - K(S,\varphi)$, т.е. сегментная функция $w(Z)$ остаётся без изменения.

Формулы (3.16) – (3.17) имеют интересную связь с геометрической томографией [8].

§4. К ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТОМОГРАФИИ

Далее мы не будем указывать аргументы P и φ функций χ и V.

Заметим, что (3.16) в действительности имеет вид

$$Y_1(P,\varphi)\,f'(\chi) + Y_2(P,\varphi)\,f''(\chi) + Y_3(P,\varphi)\,f'''(\chi) = 0,$$

где $Y_i(P, \varphi)$ – некоторые функции. Однако, производные $f'(\chi)$, $f''(\chi)$ и $f'''(\chi)$ являются независимыми параметрами, и поэтому необходимо имеем тождества $Y_i(P, \varphi) = 0$, $i = 1, 2, 3$. Очевидно, $Y_3(P, \varphi) = 0$ следует из

$$\frac{\partial \chi}{\partial_\varphi P} = 0, \tag{4.1}$$

означающая, что длина хорды $\chi(P, \varphi)$ постоянна для точек, расположенных на одной и той же прямой. Используя последнее тождество, находим

$$Y_2(P, \varphi) = \left[\frac{\partial \chi}{\partial \varphi}\right]^2 + 2\,\frac{\partial \chi}{\partial_n P} V \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial_\varphi P}\left(V\left[\frac{\partial \chi}{\partial \varphi}\right]^2\right).$$

Имеем также

$$\frac{\partial V}{\partial_\varphi P} = \frac{\partial V_1}{\partial_\varphi P} = \frac{\partial V_2}{\partial_\varphi P} = -1, \tag{4.2}$$

откуда следует, что уравнение $Y_2(P, \varphi) = 0$ можно переписать как

$$\frac{\partial \chi}{\partial_n P} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial_\varphi P\, \partial \varphi} = 0. \tag{4.3}$$

Уравнение $Y_1(P, \varphi) = 0$ записывается в виде

$$\chi \cot \alpha_1 \cot \alpha_2 + \frac{\partial^2 \chi}{\partial \varphi^2} + 2\,\frac{\partial}{\partial_n P}\left[V\,\frac{\partial \chi}{\partial \varphi}\right] + \frac{\partial^2}{\partial_\varphi P\, \partial \varphi}\left[V\,\frac{\partial \chi}{\partial \varphi}\right] = 0, \tag{4.4}$$

где $\chi(g) = \chi(P, \varphi) = \chi$. Из (4.4) имеется возможность исключить $\cot \alpha_1$ и $\cot \alpha_2$ и получить обыкновенные дифференциальные уравнения по переменной φ для функций расстояний V_1 и V_2.

Пусть углы α_1, α_2 измеряются в левой полуплоскости относительно луча из точки P в направлении φ. Пусть α_1 измерена в конце отрезка V_1, а α_2 – в конце отрезка $V_2 = V_1 + \chi$. Тогда

$$\cot \alpha_1 = \frac{\partial V_1}{\partial_n P} = \frac{1}{V_1}\frac{\partial V_1}{\partial \varphi}, \tag{4.5}$$

$$\cot \alpha_2 = -\frac{\partial V_2}{\partial_n P} = -\frac{1}{V_2}\frac{\partial V_2}{\partial \varphi}. \tag{4.6}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial \chi}{\partial \varphi} = \frac{\partial (V_2 - V_1)}{\partial \varphi} = -\cot \alpha_1 V_1 - \cot \alpha_2 V_2. \tag{4.7}$$

Так как $\dfrac{\partial}{\partial_\varphi P} \cot \alpha_i = 0$, из (4.2) получаем

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial_\varphi P \partial \varphi} = \cot \alpha_1 + \cot \alpha_2 = \frac{\partial V_1}{\partial_n P} - \frac{\partial V_2}{\partial_n P} = -\frac{\partial \chi}{\partial_n P}, \tag{4.8}$$

что подверждает (4.3).

Перейдём к выводу обыкновенных дифференциальных уравнений для $V_1 = V_1(P,\varphi)$ и $V_2 = V_2(P,\varphi)$. Согласно замечанию в конце §3, в (4.4) можно подставить V_i вместо V, т.е. для $i = 1,2$ имеем

$$\chi\cot\alpha_1\cot\alpha_2 + \frac{\partial^2\chi}{\partial\varphi^2} + 2\,\frac{\partial}{\partial_n P}\left[V_i\,\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}\right] + \frac{\partial^2}{\partial_\varphi P\,\partial\varphi}\left[V_i\,\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}\right] = 0. \qquad (4.9)$$

Запишем (4.5) в виде $\dfrac{\partial V_1}{\partial\varphi} = V_1\cot\alpha_1$ и применим $\dfrac{\partial}{\partial_\varphi P}$. Из (4.2) и (4.5) $\dfrac{\partial^2 V_1}{\partial_\varphi P\partial\varphi} = -\cot\alpha_1 = -\dfrac{1}{V_1}\dfrac{\partial V_1}{\partial\varphi}$. Аналогично, из (4.6) и (4.2) имеем $\dfrac{\partial^2 V_2}{\partial_\varphi P\partial\varphi} = \cot\alpha_2 = -\dfrac{1}{V_2}\dfrac{\partial V_2}{\partial\varphi}$. Это выражение используем для преобразования последнего слагаемого в (4.9). Слагаемое, содержащее $\dfrac{\partial}{\partial_n P}$, преобразуем, используя (4.5) или (4.6). Наконец, из (4.5) и (4.6) имеем $\cot\alpha_1\cot\alpha_2 = -\dfrac{1}{V_1V_2}\dfrac{\partial V_1}{\partial\varphi}\dfrac{\partial V_2}{\partial\varphi}$. Этим путём для $i = 1,2$, (4.9) преобразуется к виду

$$-\frac{\chi}{V_1V_2}\frac{\partial V_1}{\partial\varphi}\frac{\partial V_2}{\partial\varphi} + \frac{1}{V_i}\frac{\partial V_i}{\partial\varphi}\frac{\partial\chi}{\partial\varphi} + 2\,V_i\,\frac{\partial^2\chi}{\partial_n P\partial\varphi} + \frac{\partial^2\chi}{\partial_\varphi P\,\partial\varphi}\frac{\partial V_i}{\partial\varphi} + V_i\,\frac{\partial^3\chi}{\partial_\varphi P\,\partial\varphi^2} = 0. \qquad (4.10)$$

Третье и пятое слагаемые исчезают, так как

$$2\,\frac{\partial^2\chi}{\partial_n P\partial\varphi} + \frac{\partial^3\chi}{\partial_\varphi P\,\partial\varphi^2} = 0. \qquad (4.11)$$

Для доказательства этого утверждения, перепишем (4.3), используя координаты x,y :

$$-\frac{\partial\chi}{\partial x}\sin\varphi + \frac{\partial\chi}{\partial y}\cos\varphi + \frac{\partial^2\chi}{\partial x\,\partial\varphi}\cos\varphi + \frac{\partial^2\chi}{\partial y\,\partial\varphi}\sin\varphi = 0. \qquad (4.12)$$

В координатной версии (4.1) имеет вид $\dfrac{\partial\chi}{\partial x}\cos\varphi + \dfrac{\partial\chi}{\partial y}\sin\varphi = 0$. Дифференцируя тождество (4.12) по φ, получаем (4.11) в координатной версии. Это замечание сводит формулу (4.10) к следующему соотношению :

$$-\frac{\chi}{V_1V_2}\frac{\partial V_1}{\partial\varphi}\frac{\partial V_2}{\partial\varphi} + \frac{1}{V_i}\frac{\partial V_i}{\partial\varphi}\frac{\partial\chi}{\partial\varphi} + \frac{\partial^2\chi}{\partial_\varphi P\,\partial\varphi}\,\frac{\partial V_i}{\partial\varphi} = 0. \qquad (4.13)$$

Для разделения функций V_1 и V_2 достаточно использовать $V_2 - V_1 = \chi$.

Запишем результат для V_1. Рассмотрим (4.13) для $i = 1$. Замечая, что V_1 не может содержать круговые дуги с центром в точке P (предположение, что P лежит вне замыкания **D** остаётся в силе), сокращаем на $\dfrac{\partial V_1}{\partial\varphi}$. После подстановки $V_2 = V_1 + \chi$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-\frac{\chi}{V_1(V_1+\chi)}\,\frac{dV_1}{d\varphi} + \frac{1}{V_1+\chi}\frac{\partial\chi}{\partial\varphi} + \frac{\partial^2\chi}{\partial_\varphi P\,\partial\varphi} = 0. \qquad (4.14)$$

Очевидно, уравнение (4.14) эквивалентно

$$-\frac{dV_1}{d\varphi}+V_1\left[\chi^{-1}\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}+\frac{\partial^2\chi}{\partial_\varphi P\,\partial\varphi}\right]+V_1^2\chi^{-1}\frac{\partial^2\chi}{\partial_\varphi P\,\partial\varphi}=0. \qquad (4.15)$$

Подставкой $U=V_1^{-1}$ (4.15) сводится к линейному дифференциальному уравнению первого порядка : $\dfrac{dU}{d\varphi}+a(\varphi)U+b(\varphi)=0$, где

$$a(\varphi)=\chi^{-1}\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}+\frac{\partial^2\chi}{\partial_\varphi P\,\partial\varphi}\quad \text{и}\quad b(\varphi)=\chi^{-1}\frac{\partial^2\chi}{\partial_\varphi P\,\partial\varphi}.$$

Общее решение уравнения (4.15) легко находится :

$$V_1(P,\varphi)=\frac{\exp\left(\displaystyle\int_\tau^\varphi a(u)\,du\right)}{C-\displaystyle\int_\tau^\varphi b(v)\,dv\,\exp\left(\int_\tau^v a(u)\,du\right)}, \qquad (4.16)$$

где C - произвольная постоянная и $\tau\in(0,\alpha)$.

В действительности, (4.16) можно упростить, если заметить, что

$$\exp\left(\int_\tau^\varphi \chi^{-1}\frac{\partial\chi(P,u)}{\partial u}\,du\right)=\frac{\chi(P,\varphi)}{\chi(P,\tau)},$$

и использовать тождество

$$\int_\tau^v \frac{\partial^2\chi}{\partial_\varphi P\,\partial\varphi}\,x(\varphi)\,d\varphi=-\int_\tau^v \frac{\partial\chi}{\partial_n P}\,x(\varphi)\,d\varphi$$

(следует из (4.3) для произвольной функции $x(\varphi)$). Отсюда

$$\exp\left(\int_\tau^\varphi a(u)\,du\right)=[\chi(P,\tau)]^{-1}\chi(P,\varphi)\exp\left(-\int_\tau^\varphi\frac{\partial\chi(P,u)}{\partial_n P}\,du\right)$$

и

$$\begin{aligned}&\int_\tau^\varphi b(v)\,dv\,\exp\left(\int_\tau^v a(u)\,du\right)=\\&=[\chi(P,\tau)]^{-1}\int_\tau^\varphi\frac{\partial^2\chi(P,v)}{\partial_v P\,\partial v}\,dv\,\exp\left(-\int_\tau^v\frac{\partial\chi(P,u)}{\partial_n P}\,du\right)=\\&=-[\chi(P,\tau)]^{-1}\int_\tau^\varphi\frac{\partial\chi(P,v)}{\partial_n P}\,dv\,\exp\left(-\int_\tau^v\frac{\partial\chi(P,u)}{\partial_n P}\,du\right)=\\&=-[\chi(P,\tau)]^{-1}\left[1-\exp\left(-\int_\tau^\varphi\frac{\partial\chi(P,u)}{\partial_n P}\,du\right)\right].\end{aligned}$$

Итак, получено окончательное выражение

$$V_1(P,\varphi)=\frac{[\chi(P,\tau)]^{-1}\chi(P,\varphi)\exp\left(-\displaystyle\int_\tau^\varphi\frac{\partial\chi(P,u)}{\partial_n P}\,du\right)}{C+[\chi(P,\tau)]^{-1}\left[1-\exp\left(-\displaystyle\int_\tau^\varphi\frac{\partial\chi(P,u)}{\partial_n P}\,du\right)\right]}. \qquad (4.17)$$

Когда $\chi(P,\varphi)$ является Х-реем из точки P вне $\mathbf{D}$, то существует значение $C = C_0$, для которого выражение (4.16) даёт соответствующее $V_1(P,\varphi)$. Имеются ли другие значения C, которые соответствуют выпуклым областям, которые не покрывают точки P? При условии, что $\partial\mathbf{D}$ обладает гладкой не равной нулю кривизной, ответ отрицательный. Как показано в [9], при этом условии интегралы в числителе и в знаменателе формулы (4.17) обладают конечным предельным значением при $\varphi \to \alpha$. Тогда для всех значений C, отличных от

$$C_0 = -\chi(P,\tau)]^{-1}\left[1 - \exp\left(-\int_\tau^\alpha \frac{\partial\chi(P,u)}{\partial_n P}\,du\right)\right], \tag{4.18}$$

имеем $V_1(\alpha) = 0$, откуда следует, что все значения C, отличные от (4.18), должны быть отвергнуты. Таким образом, C_0, задаваемая по формуле (4.18), есть единственное пригодное значение. Подставляя эту величину в (4.17) получаем окончательный результат

$$V_1(P,\varphi) = \frac{\chi(P,\varphi)}{\exp\left(-\int_\varphi^\alpha \frac{\partial\chi(P,u)}{\partial_n P}\,du\right) - 1}. \tag{4.19}$$

Следствия.

1. Для любой ограниченной выпуклой области $\mathbf{D}$ и точки P вне замыкания $\mathbf{D}$

$$\int_0^\alpha \frac{\partial\chi(P,u)}{\partial_n P}\,du = 0.$$

2. Предположим, что на прямой имеется замкнутый отрезок ν, а точка P лежит вне ν. Тогда интеграл $\int_\varphi^\alpha \frac{\partial\chi(P,u)}{\partial_n P}\,du$ имеет постоянное значение для любой ограниченной выпуклой области $\mathbf{D}$, для которой ν является хордой.

Результат (4.19) представляет интерес в геометрической томографии. Производная $\frac{\partial\chi(P,\phi)}{\partial_n P}$ может быть приближённо вычислена, если имеем два параллельных Х-рея, один из точки P, а другой из точки $P + \varepsilon\mathbf{n}$ (единичный вектор $\mathbf{n}$, ортогональный φ, см. §3). Так как ε мало, можно говорить об одном **двойном** X**-рее**, исходяшем из точки P в направлении ϕ (ε становится параметром). Следовательно, функцию $\frac{\partial\chi(P,\phi)}{\partial_n P}$ можно называть **двойным** Х-реем из точки P. По существу, (4.19) утверждает, что **задавая Х-рей и двойной Х-рей, оба исходяших из одной и той же точки P вне области $\mathbf{D}$, область $\mathbf{D}$ может быть полностью восстановлена**.

Результат (4.19) можно независимо проверить, используя "дополнительные" уравнения (4.5) и (4.6), так как из (4.8) имеем

$$-\frac{\partial\chi}{\partial_n P} = \frac{1}{V_1}\frac{\partial V_1}{\partial\varphi} - \frac{1}{V_2}\frac{\partial V_2}{\partial\varphi} = \frac{\partial}{\partial\varphi}\ln\frac{V_1}{V_2} = \frac{\partial}{\partial\varphi}\ln\frac{V_1}{V_1+\chi}.$$

Следовательно
$$\int_{\varphi}^{\alpha} \frac{\partial \chi(P,u)}{\partial_n P}\, du = \ln \frac{V_1 + \chi}{V_1},$$

откуда следует (4.19).

ABSTRACT. In the paper the term "disintegration" stands for a special analytical procedure of recovery of integrands, given a family of integrals extended over the space of lines in the plane. Integrals of the family are related to the so-called Pleijel identity. They are derived in complete detail in one of the sections. Disintegration is based on a criterion of signed measure generation in the space of lines presented in the paper for the first time. Disintegration leads to a result in tomography of planar convex domains. A simple formula for reconstruction of the convex domain based on an X-ray and a "double" X-ray taken from a single point is presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology, John Wiley & Sons, Chichester, 1982.
2. "Комбинаторные принципы в стохастической геометрии", под редакцией Р. В. Амбарцумяна, Издательство АН Армянской ССР, Ереван, 1980.
3. Р. В. Амбарцумян, "Аналитические результаты комбинаторной интегральной геометрии : Обзор", Изв. НАН Армении, Математика, том 34, № 6, стр. 2 — 46, 1999.
4. A. Pleijel, "Zwei kurze Beweise der isoperimetrischen Ungleichung", Archiv der Math., 7, pp. 317 — 319, 1956.
5. A. Pleijel, "Zwei kennzeichende Kreiseigenschaften", Archiv der Math., 7, pp. 420 — 424, 1956.
6. R. V. Ambartzumian, "Measure generation by Euler functionals", Adv. Appl. Prob. (SGSA), vol. 27, pp. 606 — 626, 1995.
7. R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge University Press, 1990.
8. R. J. Gardner, Geometric Tomography, Cambridge University Press, 1995.
9. Н. Г. Агаронян, В. К. Оганян, "Два комментария к статье Р. В. Амбарцумяна о дезинтеграции", Изв. НАН Армении, Математика, том 36, № 1, стр. 37 — 47, 2001.
10. Р. В. Амбарцумян, "Замечания о порождении мер в пространстве прямых в $\mathbb{R}^3$", Изв. НАН Армении, Математика, том 27, № 5, стр. 1- 21, 1992.

8 декабря 2000

Институт математики
НАН Армении
E-mail : rhambart@aua.am