ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ И РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

Н. Е. Товмасян, В. С. Закарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 6, 2000

В статье показано как задачу Римана–Гильберта для неправильных эллиптических уравнений можно свести к задаче Дирихле для правильных эллиптических уравнений. Доказывается однозначная разрешимость задачи Дирихле для правильных эллиптических уравнений второго порядка в многосвязных областях.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть D – $(m+1)$-связная область на плоскости, ограниченная гладкими контурами Ляпунова $\Gamma_0, \Gamma_1, ..., \Gamma_m$. Предположим, что кривая Γ_0 охватывает все остальные контуры $\Gamma_1, ..., \Gamma_m$, и область D содержит начало координат. Введём обозначение $\Gamma = \bigcup_{k=0}^{m} \Gamma_k$.

В работе рассматриваются краевые задачи для эллиптических дифференциальных уравнений вида

$$Lu(z) = A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad z = x + iy \in D, \tag{1.1}$$

где A, B, C – комплексные постоянные, $C \neq 0$ и $u = u(z)$ – искомая комплекснозначная функция. Уравнение (1.1) называется эллиптическим, если $C \neq 0$ и характеристическое уравнение

$$A + B\lambda + C\lambda^2 = 0 \tag{1.2}$$

не имеет действительных корней. Пусть λ_1 и λ_2 – корни характеристического уравнения (1.2). Уравнение (1.1) называется правильно эллиптическим, если $\operatorname{Im}\lambda_1 \cdot \operatorname{Im}\lambda_2 < 0$, и неправильно эллиптическим, если $\operatorname{Im}\lambda_1 \cdot \operatorname{Im}\lambda_2 > 0$.

Как показано в [1], стр. 183, в односвязных областях задача Дирихле для правильного эллиптического уравнения (1.1) однозначно разрешима (решение существует и единственно). Напомним, что граничное условие для задачи Дирихле берётся в виде

$$u(z) = f(z), \quad z \in \Gamma, \tag{1.3}$$

где $f(z)$ – заданная непрерывная функция на Γ.

В монографии [2] (стр. 88) на примерах показано, что задача Дирихле для неправильного эллиптического уравнения (1.1) не является нормально разрешимой. В частности, при $\lambda_1 = \lambda_2 = i$ соответствующая однородная задача Дирихле в любом круге имеет бесконечное число линейно независимых решений. Поэтому для таких уравнений рассматриваются другие краевые задачи, в том числе задача Римана–Гильберта (см. [3]). Здесь мы граничные условия задачи Римана–Гильберта берём в виде

$$\mathrm{Re}\; u(z) = f_0(z), \qquad \mathrm{Re}\, \frac{\partial u(z)}{\partial N} = f_1(z), \quad z \in \Gamma, \tag{1.4}$$

где $f_0(z)$ и $f_1(z)$ – вещественнозначные функции на Γ, N – внутренняя нормаль к Γ в точке $z \in \Gamma$.

Пусть s – дуговая абсцисса, соответствующая точке $z \in \Gamma$. Предполагается, что функции $f(z)$, $f_0(z)$, $f_1(z)$, $\dfrac{df(z)}{ds}$ и $\dfrac{df_0(z)}{ds}$ удовлетворяют условию Гёльдера на Γ (см. [4], стр. 20). Мы ищем решения, которые дважды непрерывно дифференцируемы в области D, а первые производные непрерывны в замкнутой области $\overline{D} = D \cup \Gamma$.

Задачи (1.1), (1.3) и (1.1), (1.4) при $f(z) = f_0(z) = f_1(z) \equiv 0$ называются **однородными**. Как показано в [3] (стр. 176), в односвязных областях неоднородная задача (1.1), (1.4) всегда разрешима, а соответствующая однородная задача имеет четыре линейно независимых решения (над полем действительных чисел).

Аналогично можно показать, что в многосвязных областях однородная задача (1.1), (1.4) также имеет ровно четыре линейно независимых решения. Эти решения не зависят от области и могут быть построены в явном виде в терминах коэффициентов уравнения (1.1) (см. [3], Теорема 6.6). В частности, для $\lambda_1 = \lambda_2 = i$ этими линейно независимыми решениями являются i, ix, iy и $i(x^2 + y^2)$.

В этой статье рассматриваются краевые задачи (1.1), (1.3) и (1.1), (1.4) в многосвязных областях. Основная трудность связана с исследованием задачи Римана-Гильберта для аналитических функций в многосвязных областях (см.

[4], стр. 174 и [5], стр. 162). Для того, чтобы сформулировать основной результат работы, рассмотрим также следующую задачу Дирихле

$$\begin{aligned} &\overline{L}LW = 0, \quad z \in D, \\ &W(z) = f_0(z), \quad z \in \Gamma, \\ &\frac{\partial W(z)}{\partial N} = f_1(z), \quad z \in \Gamma, \end{aligned} \tag{1.5}$$

где L - дифференциальный оператор из (1.1), $\overline{L}$ - тот же оператор L с комплексносопряжёнными коэффициентами. $f_0(z)$ и $f_1(z)$ – правые части условий (1.4). Отметим, что первое уравнение в (1.5) является эллиптическим уравнением с действительными коэффициентами, в которое входят только производные четвёртого порядка. Решение задачи (1.5) будем считать вещественнозначным. Как доказано в [2], стр. 114, задача (1.5) в многосвязных областях однозначно разрешима и сводится к интегральному уравнению Фредгольма.

В данной работе получены следующие результаты.

Теорема 1. Задача Дирихле для правильно эллиптического уравнения (1.1) однозначно разрешима.

Теорема 2. Однородная задача (1.1), (1.4) для неправильно эллиптического уравнения (1.1) имеет четыре линейно независимых решения, а соответствующая неоднородная задача имеет решение тогда и только тогда, когда функции $f_0(z)$ и $f_1(z)$ удовлетворяют $4m$ линейно независимым условиям вида

$$\int_\Gamma f_0(t)\psi_{0k}(t)\,ds + \int_\Gamma f_1(t)\psi_{1k}(t)\,ds = 0, \quad k = 1, ..., 4m, \tag{1.6}$$

где $\psi_{0k}(t)$, $\psi_{1k}(t)$ – некоторые непрерывные, вещественнозначные функции, не зависящие от $f_0(z)$ и $f_1(z)$.

Ниже мы сводим задачу Дирихле для правильно эллиптических уравнений (1.1) к интегральному уравнению Фредгольма, которое имеет единственное решение. Решения задачи (1.1), (1.4) для неправильно эллиптических уравнений и условия разрешимости (1.6) запишутся в явном виде через решения задачи (1.5).

§2. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (1.1) В МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

Не ограничивая общности, в дальнейшем будем считать, что $\lambda_1 = i$ (в противном случае делаем замену переменной $x + \lambda_1 y = \xi + i\eta$). Тогда уравнение (1.1) можно записать в виде

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} - i\frac{\partial V_1}{\partial y} = 0, \quad (x,y) \in D, \tag{2.1}$$

где

$$V_1 = \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{2.2}$$

Пусть уравнение (1.1) – правильно эллиптическое, т.е. $\operatorname{Im}\lambda_2 < 0$. Как показано в [1], стр. 134, из (2.1) следует, что $V_1(z)$ – произвольная аналитическая функция в области D. Следовательно

$$V_1(z) = \varphi_0'(z) + \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{z - z_k}, \tag{2.3}$$

где $\varphi_0(z)$ – аналитическая функция в области D, $A_1, ..., A_m$ – постоянные, а $z_1, ..., z_m$ – фиксированные точки, охваченные контурами $\Gamma_1, ..., \Gamma_m$, соответственно. Из (2.2) и (2.3) имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi_0'(z) + \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{z - z_k}. \tag{2.4}$$

Легко проверить, что при $z_k = x_k + iy_k$ функция

$$u_0(z) = \frac{1}{1-\lambda_2 i}\left(\varphi_0(z) + \sum_{k=1}^{m} A_k \ln[(z-z_k)(x+\lambda_2 y - x_k - \lambda_2 y_k)]\right) \tag{2.5}$$

является частным решением уравнения (2.4). Общее решение $u_1(z)$ однородного уравнения (2.4) (при $\varphi_0(z) \equiv 0$, $A_k = 0$, $k = 1, ..., m$) определяется формулой (см. [1], стр. 134)

$$u_1(z) = \psi_0(x + \lambda_2 y), \quad z = x + iy \in D. \tag{2.6}$$

где $\psi_0(\zeta)$ – произвольная аналитическая функция, определённая на образе G области D при отображении

$$\zeta = x + \lambda_2 y, \quad z = x + iy \in D, \quad \zeta = \xi + i\eta \in G. \tag{2.6'}$$

Из (2.5) и (2.6) получаем, что общее решение правильно эллиптического уравнения (1.1) определяется формулой

$$u(z) = \varphi(z) - \psi(x + \lambda_2 y) + \sum_{k=1}^{m} A_k \ln[(z-z_k)(x+\lambda_2 y - x_k - \lambda_2 y_k)], \tag{2.7}$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(\zeta)$ – произвольные аналитические функции, а $A_1, ..., A_m$ – произвольные постоянные. В (2.7) берётся некоторая непрерывная в области D ветвь логарифма. Подставляя $u(z) \equiv 0$ в (2.7), получаем

$$\varphi(z) = \psi(x + \lambda_2 y) = C, \quad A_k = 0, \quad k = 1, ..., m. \tag{2.8}$$

Не ограничивая общности предположим, что $\varphi(0) = 0$. Тогда из представления (2.7) функции $\varphi(z)$, $\psi(\zeta)$ и постоянные $A_1, \dots, A_m$ определяются через $u(z)$ единственным образом.

Аналогично, если $\operatorname{Im} \lambda_2 > 0$ и $\lambda_2 \neq i$, то общее решение уравнения (1.1) задаётся формулой

$$u(z) = \varphi(z) - \psi(x + \lambda_2 y) + \sum_{k=1}^{m} A_k \ln \frac{z - z_k}{x + \lambda_2 y - x_k - \lambda_2 y_k}, \tag{2.9}$$

где $\varphi(z)$, $\psi(\zeta)$ и $A_1, \dots, A_m$ как и в (2.7). При условии $\varphi(0) = 0$, функции $\varphi(z)$, $\psi(\zeta)$ и постоянные $A_1, \dots, A_m$ определяются единственным образом.

При $\lambda_2 = i$ общее решение уравнение (1.1) задаётся формулой

$$u(z) = \varphi(z) + \bar{z}\psi(z), \quad \bar{z} = x - iy, \tag{2.10}$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ – произвольные аналитические функции в области D, определённые единственным образом (без дополнительного условия $\varphi(0) = 0$).

Лемма 2.1. Однородная задача (1.1), (1.3) для правильно эллиптического уравнения имеет только нулевое решение.

Доказательство : Пусть λ_1 и λ_2 – корни характеристического уравнения (1.2) и $|\operatorname{Im} \lambda_1| \leq |\operatorname{Im} \lambda_2|$. Не умаляя общности мы можем предположить, что

$$\lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta, \quad \beta \geq 1.$$

где α и β – вещественные постоянные. Этого всегда можно добиться при помощи подстановки $\xi + i\eta = x + \lambda_1 y$. Пусть $u(x, y)$ – решение однородной задачи (1.1), (1.3). По формуле Грина имеем

$$\iint_D \left(\frac{\partial V_1(z)}{\partial x} - i\frac{\partial V_1(z)}{\partial y} \right) \overline{u(z)}\, dxdy = - \iint_D V_1(z) \left(\frac{\partial \overline{u(z)}}{\partial x} - i\frac{\partial \overline{u(z)}}{\partial y} \right) dxdy, \tag{2.11}$$

где V_1 определяется по (2.2), а $\overline{u(z)}$ – комплексно сопряжённая к $u(z)$. Из (2.1) и (2.11) имеем

$$\iint_D V_1(z)\overline{V_2(z)}\, dxdy = 0, \tag{2.12}$$

где

$$V_2(z) = \frac{\partial u(z)}{\partial x} + i\frac{\partial u(z)}{\partial y}. \tag{2.13}$$

Продолжим функцию $u(x, y)$ вне области D, полагая $u(x, y) = 0$. Тогда $V_1(z)$ и $V_2(z)$ также нули вне области D. Известно, что

$$\iint\limits_D V_1(z)\overline{V_2(z)}\,dxdy = \iint\limits_E W_1(z)\overline{W_2(z)}\,dxdy, \tag{2.14}$$

где E – плоскость (x, y), а $W_j(z)$ – преобразование Фурье функции $V_j(z)$:

$$W_j(z) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_D V_j(\xi,\eta)\exp[i(x\xi + y\eta)]\,d\xi d\eta, \quad j = 1, 2. \tag{2.15}$$

Так как $u(z) = 0$ на Γ, из (2.2), (2.13) и (2.15) получаем

$$W_1(z) = -i(x - \alpha y + i\beta y)w(z), \quad W_2(z) = -i(x + iy)w(z), \tag{2.16}$$

где $w(z)$ – преобразование Фурье функции $u(z)$. Из (2.12), (2.14) и (2.16) получаем, что

$$\iint\limits_E (x - \alpha y + i\beta y)(x - iy)|w(z)|^2\,dx\,dy = 0. \tag{2.17}$$

Отсюда следует, что

$$\iint\limits_E (x^2 - \alpha xy + \beta y^2)|w(z)|^2 dxdy = 0, \tag{2.18}$$

$$\iint\limits_E [(\beta - 1)xy + \alpha y^2)]|w(z)|^2 dxdy = 0. \tag{2.19}$$

Подставляя $\alpha = 0$ в (2.18), получаем $w(z) \equiv 0$. Пусть $\alpha \neq 0$ и $\beta = 1$, тогда из (2.19) следует, что $w(z) \equiv 0$. Пусть теперь $\alpha \neq 0$ и $\beta > 1$, тогда из (2.18) и (2.19) получаем

$$\iint\limits_E \left(x^2 + \frac{\alpha^2 y^2}{\beta - 1} + \beta y^2\right)|w(z)|^2 dxdy = 0,$$

т.е. $w(z) \equiv 0$. Следовательно, во всех возможных случаях имеем $w(z) \equiv 0$. Лемма 2.1 доказана.

Пусть область D и контуры $\Gamma_0, \Gamma_1 \cdots, \Gamma_m$ определены как и в §1. Пусть D_j – область ограниченная Γ_j, а D_j^- – дополнение замкнутой области $D_j \cup \Gamma_j$, $j = 0, 1, ..., m$ до полной комплексной плоскости. Пусть $\varphi_0(z)$ – аналитическая функция в области D_0, а $\varphi_j(z)$, $j = 1, ..., m$ аналитичны в областях D_j^- и удовлетворяют условиям

$$\varphi_j(\infty) = \lim_{|z|\to\infty} \varphi_j(z) = 0, \quad j = 1, ..., m.$$

Предполагается также, что функции непрерывны в соответствующих замкнутых областях.

Лемма 2.2. Если

$$\varphi_0(z) + \varphi_1(z) + \cdots + \varphi_m(z) = 0, \quad z \in D, \tag{2.20}$$

то $\varphi_j(z) \equiv 0$, $j = 1, ..., m$.

Доказательство : Из (2.20) следует, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} \frac{\varphi_0(t) + \varphi_1(t) + \cdots + \varphi_m(t)}{t - z}\, dt = 0, \quad j = 1, ..., m. \tag{2.21}$$

Применяя формулу Коши и теорему Коши ([6], стр. 45, 54), получаем утверждение леммы.

§3. ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В этом параграфе задача (1.1), (1.3) сводится к интегральному уравнению Фредгольма и доказывается Теорема 1. Пусть $\lambda_1 = i$ и λ_2 – корни характеристического уравнения (1.2) и $\operatorname{Im} \lambda_2 < 0$. Пусть $\alpha(z) = x + \lambda_2 y$, а $z = \beta(\zeta)$ – обратное к отображению (2.6') :

$$\beta(\zeta) = \xi + \frac{i - a}{b}\eta, \quad a = \operatorname{Re} \lambda_2, \quad b = \operatorname{Im} \lambda_2, \quad \zeta = \xi + i\eta.$$

Пусть G – образ области D при отображении (2.6'), а L – граница области G. Ясно, что G – $(m+1)$–связная область и $L = \bigcup\limits_{k=0}^{m} L_j$, где L_j – образ контура Γ_j при отображении (2.6'), $j = 1, ..., m$.

Решение задачи (1.1), (1.3) мы ищем в виде (2.7), где

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma} \frac{g(t)}{t - z}\, dt - \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{g(t)}{t}\, dt, \quad z \in D, \tag{3.1}$$

$$\psi(\zeta) = -\frac{1}{\pi i}\int_{L} \frac{g(\beta(\tau))}{\tau - \zeta}\, d\tau, \quad \zeta \in G, \tag{3.2}$$

$$A_j = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_j} \frac{g(t)}{t - z_j}\, dt, \quad j = 1, ..., m. \tag{3.3}$$

В (3.1) – (3.3) $z_1, ..., z_m$ – фиксированные точки, входящие в представление (2.7), а $g(t)$ – искомая функция на Γ, удовлетворяющая условию Гёльдера. Отметим также, что в (3.1) – (3.3) интегрирование ведётся по положительному направлению (которое оставляет область D слева).

Пусть $t_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in \Gamma$. Согласно формуле Сохоцкого–Племеля (см. [4], стр. 66), граничные значения $\varphi(t_0)$ и $\psi(\xi_0 + \lambda_2\eta_0)$ интегралов типа Коши (3.1) и (3.2) изнутри области D определяются при $z \to t_0$, $z \in D$ по формулам

$$\varphi(t_0) = g(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma} \frac{g(t)}{t - t_0}\, dt - \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{g(t)}{t}\, dt, \quad t_0 \in \Gamma, \tag{3.4}$$

$$\psi(\zeta_0) = -g(t_0) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{g(\beta(\tau))}{\tau - \zeta_0}\,d\tau, \quad \zeta_0 = \xi_0 + \lambda_2\eta_0. \tag{3.5}$$

В (3.4) и (3.5) сингулярные интегралы определяются по главному значению (см. [4], стр. 50). Делая в (3.5) замену переменной $\tau = \alpha(t)$, получаем

$$\psi(\zeta_0) = -g(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{g(t)\alpha'(t)}{\alpha(t) - \alpha(t_0)}\,dt, \quad t_0 \in \Gamma \tag{3.6}$$

(заметим изменение направления обхода). Рассмотрим функцию

$$K_1(t_0, t) = \frac{1}{t - t_0} - \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t) - \alpha(t_0)}.$$

Как показано в [4], стр. 573, при $t, t_0 \in \Gamma$ имеем представление

$$K_1(t_0, t) = \frac{1}{|t - t_0|^\gamma}K_0(t_0, t), \quad 0 < \gamma < 1,$$

где $K_0(t_0, t)$ удовлетворяет условию Гёльдеру на Γ относительно t и t_0. Подставляя $u(z)$ из (2.7) в (1.3) и используя формулы (3.3), (3.4) и (3.6), получаем

$$g(t_0) = \int_\Gamma K(t_0, t)g(t)\,dt = f(t_0). \tag{3.7}$$

где $K = K_1 + K_2$ и $K_2(t_0, t)$ – некоторая вполне определенная. бесконечно дифференцируемая функция от t и t_0.

Таким образом. для определения функции $g(t)$ мы получаем интегральное уравнение Фредгольма. Для того. чтобы доказать. что это уравнение имеет единственное решение, достаточно показать. что соответствующее однородное уравнение имеет только нулевое решение.

Пусть $g(t)$ – решение однородного уравнения (3.7) (при $f(t) \equiv 0$). Тогда $u(z)$, определённая по (2.7) и (3.1) – (3.3), является решением однородной задачи (1.1). (1.3). Согласно Лемме 2.1 имеем $u(z) = 0$, $z \in D$. Отсюда и из (2.7) получаем (2.8). Подставляя $\varphi(z)$, $\psi(\zeta)$ и A_j из (3.1) – (3.3) в (2.8) и используя Лемму 2.2. получаем

$$\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{g(t)}{t - z}\,dt - \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{g(t)}{t}\,dt = c, \quad z \in D_0, \tag{3.8}$$

$$-\frac{1}{\pi i}\int_{L_0} \frac{g(\beta(\tau))}{\tau - x - \lambda_2 y}\,d\tau = c, \quad z = x + iy \in D_0, \tag{3.9}$$

$$\int_{\Gamma_j} \frac{g(t)}{t - z}\,dt = 0, \quad z \in D_j^-, \tag{3.10}$$

$$\int_{L_j} \frac{g(\beta(\tau))}{\tau - x - \lambda_2 y}\,d\tau = 0, \quad z = x + iy \in D_j^-, \tag{3.11}$$

$$\int_{\Gamma_j} \frac{g(t)}{t - z_j}\, dt = 0, \quad j = 1, ..., m. \tag{3.12}$$

Подставляя $z = 0$ в (3.8), получаем $c = 0$. Из (3.8) - (3.11) (см. [7] и [4], стр. 240) следует, что

$$g(t) = 0, \quad t \in \Gamma_0, \qquad g(t) = c_j, \quad t \in \Gamma_j, \quad j = 1, ..., m, \tag{3.13}$$

где $c_1, ..., c_m$ - некоторые постоянные. Из (3.12) и (3.13) получаем $c_1 = ... = c_m = 0$. Следовательно, однородное уравнение Фредгольма (3.7) имеет только тривиальное решение, а соответствующее неоднородное уравнение всегда разрешимо. Теорема 1.1 доказана.

§4. ЗАДАЧА РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В этом параграфе мы исследуем задачу (1.1), (1.4) для неправильно эллиптического уравнения (1.1) и доказываем Теорему 2. Для простоты предположим, что область D - двусвязная, т.е. $m = 1$ и $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. Пусть λ_1 и λ_2 - корни характеристического уравнения (1.2), удовлетворяющие условиям $\operatorname{Im} \lambda_1 > 0$ и $\operatorname{Im} \lambda_2 > 0$. Сначала рассмотрим случай, когда $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Пусть $z_0 = x_0 + iy_0$ - фиксированная точка, охваченная контуром Γ_1, а t_0, t_1 - фиксированные точки на контурах Γ_0 и Γ_1, соответственно. Пусть γ - непрерывная, гладкая кривая с концами t_0 и t_1 без самопересечений. Тогда область $D_\gamma = D \setminus \gamma$ является односвязной областью. Аналогично формуле (2.7) можно показать, что общее решение первого уравнения из (1.5) определяется формулой

$$W(x,y) = a_{00} + a_{10}x + a_{11}y + a_{20}x^2 + a_{21}xy + a_{22}y^2 + \operatorname{Re}\Big[\varphi_1(x + \lambda_1 y) -$$
$$-\psi_1(x + \lambda_2 y) + \sum_{k=0}^{2}\sum_{j=1}^{2} c_{kj}(x - x_0 + \lambda_j(y - y_0))^k \ln(x - x_0 + \lambda_j(y - y_0))\Big], \tag{4.1}$$

где $x + iy \in D$, a_{jk} - произвольные вещественные постоянные, $\varphi_1(\zeta_1)$ и $\psi_1(\zeta_2)$ - произвольные аналитические функции относительно аргументов $\zeta_j = x + \lambda_j y$, $j = 1, 2$, удовлетворяющие следующему условию :

$$\varphi_1^{(k)}(0) = 0, \quad \psi_1^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, 2,$$

а c_{kj} - комплексные постоянные, удовлетворяющие условиям

$$\operatorname{Im}\,(c_{k1}\lambda_1^j + c_{k2}\lambda_2^j) = 0, \quad j = 0, .., k, \quad k = 0, 1, 2. \tag{4.2}$$

В (4.1) мы берём непрерывную в области D_γ ветвь логарифма. Условия (4.2) необходимы и достаточны, чтобы функция вида (4.1) была бы бесконечно дифференцируемой в области D.

Как было отмечено во Введении, задача (1.5) однозначно разрешима. Пусть $W(z)$ является решением этой задачи, которое представлено в виде (4.1), и пусть задача (1.1), (1.4) имеет решение $u(z)$. Согласно (2.9) действительная часть $u(z)$ представляется в виде

$$\mathrm{Re}\; u(z) = b_{00} + b_{10}x + b_{11}y + b_{20}x^2 + b_{21}xy + b_{22}y^2 + \tag{4.3}$$

$$+ \;\mathrm{Re}\left[\varphi_0(x+\lambda_1 y) - \psi_0(x+\lambda_2 y) + A\ln(x-x_0+\lambda_1(y-y_0)) - A\ln(x-x_0+\lambda_2(y-y_0))\right],$$

где $z = x + iy \in D$, b_{jk} – вещественные постоянные, A – комплексная постоянная, а $\varphi_0(\zeta_1)$ и $\psi_0(\zeta_2)$ суть аналитические функции относительно $\zeta_j = x + \lambda_j y$, $j = 1, 2$, удовлетворяющие условиям $\varphi_0^{(k)}(0) = 0$, $\psi_0^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, 2$. Из представления (4.3) следует, что $\mathrm{Re}\; u(z)$ является решением первого уравнения в (1.5). Из (1.4) следует, что $\mathrm{Re}\; u(z)$ удовлетворяет граничным условиям (1.5). Из единственности решения задачи (1.5) следует, что

$$W(z) = \mathrm{Re}\; u(z). \tag{4.4}$$

Следовательно, если при заданных $f_0(z)$ и $f_1(z)$ решение задачи (1.1), (1.4) существует, то решение $W(z)$ задачи (1.5) представляется одновременно в виде (4.1) и (4.3). Из единственности этого представления следует, что

$$c_{01} = A, \quad c_{02} = -A, \quad c_{jk} = 0, \quad k = 1, 2, \quad j = 1, 2. \tag{4.5}$$

Из (4.5) получаем

$$\begin{gathered} \mathrm{Re}\;(c_{01} + c_{02}) = 0, \quad \mathrm{Re}\;(c_{11} + c_{12}) = 0, \\ \mathrm{Re}\;(c_{11}\lambda_1 + c_{12}\lambda_2) = 0, \quad \mathrm{Im}\;(c_{21}\lambda_1^2 + c_{22}\lambda_2^2) = 0. \end{gathered} \tag{4.6}$$

Следовательно, условия (4.6) необходимы для разрешимости задачи (1.1), (1.4). Теперь докажем, что эти условия также достаточны. Предположим, что условия (4.6) выполнены. Тогда из (4.2) и (4.6) получаем уравнения (4.5) с постоянной A. Представим полином $a_{20}x^2 + a_{21}xy + a_{22}y^2$ в виде

$$a_{20}x^2 + a_{21}xy + a_{22}y^2 = B_1(x+\lambda_1 y)^2 + B_2(x+\lambda_2 y)^2 + B_3(x+\overline{\lambda}_1 y)^2, \tag{4.7}$$

где B_j, $j = 1, 2, 3$ – постоянные, удовлетворяющие системе уравнений

$$B_1\lambda_1^k + B_2\lambda_2^k + B_3\overline{\lambda}_1^k = a_{2k}, \quad k = 0, 1, 2. \tag{4.8}$$

Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\operatorname{Im}\lambda_1 > 0$ и $\operatorname{Im}\lambda_2 > 0$, то $\lambda_1 \neq \overline{\lambda}_1$, $\lambda_2 \neq \overline{\lambda}_1$, и система (4.8) однозначно разрешима. Так как a_{20}, a_{21} и a_{22} вещественны, то (4.7) можно переписать в виде

$$a_{20}x^2 + a_{21}xy + a_{22}y^2 = \operatorname{Re}\left[B_1(x+\lambda_1 y)^2 + B_4(x+\lambda_2 y)^2\right], \tag{4.9}$$

где $B_4 = B_2 + \overline{B}_3$. Из (4.1), (4.5) и (4.9) следует, что функция $W(z)$ представима в виде (4.4), где

$$u(z) = a_{00} + a_{10}x + a_{11}y + B_1(x+\lambda_1 y)^2 + B_4(x+\lambda_2 y)^2 +$$

$$+\varphi_1(x+\lambda_1 y) - \psi_1(x+\lambda_2 y) + c_{01}\ln\frac{x - x_0 + \lambda_1(y-y_0)}{x - x_0 + \lambda_2(y-y_0)}. \tag{4.10}$$

Из (4.10) следует, что $u(z)$ является решением уравнения (1.1). Из условий (1.5) и (4.4) получаем, что $u(z)$ удовлетворяет условиям (1.4). Следовательно, условия (4.6) достаточны для разрешимости задачи (1.1), (1.4). Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $W(z)$ – решение задачи (1.5), представленное в виде (4.1). Тогда задача (1.1), (1.4) имеет решение тогда и только тогда, когда выполнены условия (4.6), при этом частное решение этой задачи определяется формулой (4.10).

Таким образом, для окончательного решения поставленной задачи достаточно найти функции $\varphi_1(x+\lambda_1 y)$, $\psi_1(x+\lambda_2 y)$ и постоянные, входящие в представление (4.1) через решения $W(z)$ задачи (1.5). Для этого перепишем представление (4.1) в виде

$$W(z) = a_{00} + a_{10}x + a_{11}y + a_{20}x^2 + a_{21}xy + a_{22}y^2 + \frac{1}{2}\left(\omega(z) + \overline{\omega(z)}\right), \tag{4.11}$$

где $\omega(z)$ – функция в квадратных скобках в (4.1). Положим

$$W_1(z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \lambda_2\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - \overline{\lambda}_1\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - \overline{\lambda}_2\frac{\partial}{\partial y}\right)W. \tag{4.12}$$

Подставляя $W(z)$ из (4.11) в (4.12), получаем

$$W_1(z) = B_0\varphi_1^{(3)}(x+\lambda_1 y) + \sum_{k=0}^{2}\frac{c_{1k}A_{1k}}{[x - x_0 + \lambda_1(y-y_0)]^{3-k}}, \tag{4.13}$$

где B_0 и A_{1k} – некоторые вполне определённые, отличные от нуля постоянные. Из (4.13) имеем

$$c_{1k}A_{1k} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} W_1(z)(x+\lambda_1 y)^{2-k}\,d(x+\lambda_1 y), \quad k=0,1,2, \tag{4.14}$$

$$B_0\varphi_1(x+\lambda_1 y) = \frac{1}{2}\int_0^z (x+\lambda_1 y-\xi-\lambda_1\eta)^2\left(W_1(\zeta)-\sum_{k=0}^{2}\frac{c_{1k}A_{1k}}{\xi-x_0+\lambda_1(\eta-y_0)}\right)d\zeta, \tag{4.15}$$

причём $\zeta=\xi+i\eta$. В (4.15) интегрирование идёт от точки 0 до точки $z=x+iy\in D$ по кривой, которая целиком находится в области D. Равенства (4.14) обеспечивают однозначность функции $B_0\varphi_1(x+\lambda_1 y)$.

Аналогично, заменяя в формуле (4.12) λ_1 на λ_2 и λ_2 на λ_1, получим функцию ψ_1 и постоянные c_{2k}, $k=0,1,2$. Следовательно, в (4.11) мы можем считать функцию $\omega(z)$ как известную. Из (4.11) единственным образом определяются постоянные a_{jk}, $j,k=0,1,2$ через частные производные функций $W(z)$ и $\omega(z)$ до второго порядка в точке $z=0$.

Так как задача (1.5) однозначно разрешима, то из (4.14) следует, что постоянные c_{jk}, $j=1,2$, $k=0,1,2$ – линейные, ограниченные функционалы от $(f_0(t), f_1(t))$, и линейно независимые условия (4.6) можно переписать в виде (1.6). Обозначим через κ число линейно независимых решений задачи (1.1), (1.4), а через κ' – число линейно независимых условий разрешимости вида (1.6) для разрешимости соответствующей неоднородной задачи. Разность $\kappa-\kappa'$ называется **индексом** задачи (1.1), (1.4).

Используя представление (2.9), эту задачу можно свести к задаче Римана–Гильберта для аналитических функций. Такие задачи исследованы в работах [2], стр. 162 и [8], стр. 1081. Из результатов этих работ следует, что

$$\kappa-\kappa' = 4-4m, \tag{4.16}$$

где $m+1$ – число связных компонент области D. Так как $\kappa=4$ (см. Введение), из (4.16) имеем $\kappa'=4m$. Следовательно, в двусвязных областях число линейно независимых условий разрешимости равно 4. Это означает, что условия (4.6) линейно независимы.

Пусть теперь $\lambda_1=\lambda_2=i$. Общее решение первого уравнения из (1.5) в двусвязной области D представляется в виде (см. [8])

$$W(z) = a_0+a_1x+a_2y+a_3(x^2+y^2)+\ \mathrm{Re}\ [\varphi_0(z)+\bar{z}\psi_0(z)]+$$

$$+[c_0+c_1(x-x_0)+c_2(y-y_0)+c_3((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)]\ln[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2)], \quad (4.17)$$

где $z = x + iy$, a_k и c_k, $k = 0, 1, 2, 3$ – произвольные вещественные постоянные, а $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ – произвольные аналитические функции в области D, удовлетворяющие условиям $\varphi_0(0) = \varphi_0'(0) = 0$, $\psi_0(0) = \psi_0'(0) = 0$. Причём все величины в правой части (4.17) определяются через $W(z)$ единственным образом.

Пусть $W(z)$ – решение задачи (1.5), представленное в виде (4.17). Тогда аналогично Теореме 3 доказывается следующее утверждение.

Теорема 4. Если $\lambda_1 = \lambda_2 = i$, то задача (1.1), (1.4) имеет решение тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$c_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \qquad (4.18)$$

при этом общее решение этой задачи определяется формулой

$$U(z) = \varphi_0(z) + \bar{z}\psi_0(z) + c_0 + c_1x + c_2y + c_3(x^2+y^2) + id_0 + id_1x + id_2y + id_3(x^2+y^2),$$

где d_k, $k = 0, 1, 2, 3$ – произвольные вещественные постоянные.

Рассуждая как и выше, можно доказать, что условия (4.18) линейно независимы.

ABSTRACT. The paper shows how Riemann–Hilbert problem for non-regular elliptic equations can be reduced to a Dirichlet problem for regular elliptic equations. Unique solvability of Dirichlet problem for second order regular elliptic equations in multiply connected domains is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. E. Tovmasian, Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications in Electrodynamics, World Scientific Publ., Singapore, 1994.
2. А. В. Бицадзе, Краевые Задачи для Эллиптических Уравнений Второго Порядка, Наука, Москва, 1966.
3. N. E. Tovmasian, Non-Regular Differential Equations and Calculations in Electromagnetic Field, World Scientific Publ., Singapore, 1998.
4. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные Интегральные Уравнения, Наука, Москва, 1962.
5. Н. П. Векуа, Системы Сингулярных Интегральных Уравнений, Наука, Москва, 1970.
6. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы Теории Функций Комплексного Переменного, Москва, Наука, 1973.
7. Д. А. Квеселава, "Некоторые граничные задачи теории функций", Труды Тбил. Инст. Матем., том 16, стр. 39 – 90, 1948.
8. П. А. Солдатов, "Методы теории граничных задач на плоскости. Гладкий случай", Изв. АН СССР, серия матем., том 55, № 5, стр. 1070 – 1100, 1991.
9. И. Н. Векуа, Новые Методы Решения Эллиптических Уравнений, Москва, ГосТехИздат, 1948.

21 сентября 2000

Армянский государственный
инженерный университет