СМЕШАННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

Н. Е. Товмасян, А. А. Терзян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 6, 2000

В статье изучаются смешанные краевые задачи для уравнения Лапласа, сводящиеся к уравнениям Фредгольма, имеющим единственное решение.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть D – $(m+1)$–связная область на комплексной плоскости, ограниченная достаточно гладкими, замкнутыми, непересекающимися кривыми Ляпунова Γ_0, ..., Γ_m. Предположим, что кривая Γ_0 охватывает все остальные кривые Γ_1, ... Γ_m, и обозначим через $\Gamma = \bigcup\limits_{k=0}^{m} \Gamma_k$ границу области D. Не ограничивая общности будем предполагать, что начало координат принадлежит области D. Многие проблемы электродинамики приводятся к следующей смешанной краевой задаче (см., например, [1], [2]) : найти в области D дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad z = x + iy \in D, \tag{1.1}$$

удовлетворяющее следующим граничным условиям :

$$u(z) = f_k(z), \qquad z \in \Gamma_k, \qquad k = 0, ..., n, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u(z)}{\partial N} = f_k(z), \qquad z \in \Gamma_k, \qquad k = n+1, ..., m, \tag{1.3}$$

где $n < m$ – целые неотрицательные числа, $\dfrac{\partial u(z)}{\partial N}$ – производная функции $u(z)$ по внутренней нормали в точке $z \in \Gamma$, $f_k(z)$ суть заданные комплекснозначные функции на контурах Γ_0, ..., Γ_m, соответственно, а i – мнимая единица.

Решение задачи (1.1) — (1.3) ищется в классе комплекснозначных функций, непрерывно дифференцируемых в замкнутой области $\overline{D} = D \bigcup \Gamma$. Мы предполагаем, что функции $f_k(z)$ $(k = 0, ..., m)$ и $\dfrac{df_k}{ds}$ $(k = 0, ..., n)$ (дифференцирование по длине дуги s) принадлежат классу H на Γ, где $H = H(\Gamma)$ - класс функций, удовлетворяющих условию Гёльдера на множестве Γ (см. [3], стр. 20).

Задача (1.1) — (1.3) при $f_k \equiv 0$ $(k = 0, ..., m)$ называется однородной. Из формулы Грина непосредственно следует, что однородная задача (1.1) — (1.3) имеет только нулевое решение (см. [4], стр. 291). В частности, если функции $f_k(z)$ $(k = 0, ..., m)$ - действительные, то решение задачи (1.1) — (1.3) также действительное.

Граничные условия (1.2) можно записать в эквивалентном виде

$$\frac{du(z)}{ds} + u(z) = \frac{df_k(z)}{ds} + f_k(z), \quad z \in \Gamma_k, \quad k = 0, ...n. \tag{1.4}$$

В работах [5], [6] задача (1.1), (1.3), (1.4) сведена к сингулярному интегральному уравнению, и для последнего доказаны существование и единственность решения этой задачи.

Целью данной работы - свести задачу (1.1) — (1.3) к интегральному уравнению Фредгольма второго рода и доказать существование и единственность решения этого уравнения. Этот подход привлекателен тем, что уравнения Фредгольма значительно проще решать с использованием современной вычислительной техники.

§2. НЕКОТОРЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В этом параграфе рассматриваются некоторые интегральные представления аналитических функций, которые доказывают полезность нашего подхода при решении задачи (1.1) — (1.3). Работы [3] и [7] - стандартная литература по интегральным представлениям.

Пусть G_1 - ограниченная, а G_2 - неограниченная односвязные области с достаточно гладкими, замкнутыми, непересекающимися границами L_1 и L_2, соответственно. Область G_2 содержит окрестность бесконечно удалённой точки. Положительным направлением на контуре L_k $(k = 1, 2)$ считается то направление, которое оставляет область G_k слева. Пусть $a_k(z) \neq 0$ и $b_k(z) \neq 0$, $z \in L_k$ $(k = 1, 2)$ заданные, непрерывно дифференцируемые функции. Приращение функции $a_k(z)$, делённое на 2π, когда точка z пробегает контур L_k один раз в положительном направлении, называется индексом функции $a_k(z)$ на контуре L_k. Предполагается, что индексы функции $a_1(z)$ и $b_1(z)$ на L_1 равны 1 или 0, соответственно, а индексы функций $a_2(z)$ и $b_2(z)$ на L_2 равны -1 и 0, соответственно.

Лемма 2.1. Пусть функции $\phi_k(z)$ и $\omega_k(z)$ – аналитические в области G_k ($k = 1,2$), принадлежат классу H в замкнутой области $\overline{G_k} = G_k \bigcup L_k$ и $\phi_2(\infty) = \omega_2(\infty) = 0$. Тогда имеют место следующие представления :

$$\phi_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{\mu_k(t)\,dt}{a_k(t)\,(t-z)}, \qquad z \in G_k, \quad k = 1,2, \tag{2.1}$$

$$\omega_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{\overline{\mu_k(t)}\,dt}{b_k(t)\,(t-z)}, \qquad z \in G_k, \quad k = 1,2, \tag{2.2}$$

где $\mu_k(t) \in H(L_k)$, а $\overline{\mu_k(t)}$ – комплексно сопряжённое к $\mu_k(t)$. Функция $\mu_k(t)$ единственным способом определяется по $\phi_k(t)$ и $\omega_k(t)$. В (2.1), (2.2) переменная интегрирования $t = \xi + i\eta$ пробегает контур L_k в положительном направлении.

Аналогичное интегральное представление для пары аналитических функций $\phi_k(z)$ и $\omega_k(z)$ приведены в [7], стр. 240. Поэтому мы опускаем доказательство представлений (2.1), (2.2).

§3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

Используя Лемму 2.1 мы получим интегральное представление решения уравнения (1.1) в многосвязных областях, которое сводит задачу (1.1) — (1.3) к интегральному уравнению Фредгольма и позволяет доказать единственность решения этого уравнения.

Пусть D_j^+ - односвязная, ограниченная область с границей Γ_j, $j = 0, ..., m$, а D_j^- - дополнение замкнутой области $D_j^+ \bigcup \Gamma_j$ до полной комплексной плоскости. Пусть $z_j = x_j + iy_j \in D_j^+$, $j = 1, ..., m$.

Общее решение уравнения (1.1) в области D определяется формулой (см. [6])

$$u(z) = \varphi(z) + \overline{\psi(z)} + \sum_{k=1}^{m} c_k \ln|z - z_k|, \tag{3.1}$$

где функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ – аналитические в области D, а $c_1, ..., c_m$ – произвольные комплексные постоянные, $\overline{\psi(z)}$ – комплексно сопряжённое к $\psi(z)$.

Из формулы Коши (см. [8], стр. 54) следует, что

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{m} \varphi_k(z), \qquad \psi(z) = \sum_{k=0}^{m} \psi_k(z), \tag{3.2}$$

где $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ аналитичны в области D_0^+, $\varphi_k(z)$ и $\psi_k(z)$ ($k = 1, ..., m$) аналитичны в области D_k^- и

$$\varphi_k(\infty) = 0, \qquad \psi_k(\infty) = 0, \qquad k = 1, ..., m. \tag{3.3}$$

Подставляя $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ из (3.2) в (3.1), получим

$$u(z) = z\phi_0(z) + \overline{\omega_0(z)} + \sum_{k=1}^{m} \left(\varphi_k(z) + \overline{\psi_k(z)} + c_k \ln|z - z_k| \right), \tag{3.4}$$

где $z\,\phi_0(z) = \varphi_0(z) - \varphi_0(0)$ и $\omega_0(z) = \psi_0(z) + \overline{\varphi_0(0)}$.

Ясно, что $\phi_0(z)$ и $\omega_0(z)$ – аналитические в области D_0. Следовательно, решение уравнения (1.1) представляется в виде (3.4), где $\phi_0(z)$ и $\omega_0(z)$ суть аналитические в области D_0^+, а $\varphi_k(z)$, $\phi_k(z)$ $(k = 1, ..., m)$ аналитичны в D_k^- и удовлетворяют условиям (3.3), причём c_1, ..., c_m – комплексные постоянные.

Положим в (3.4) $u(z) \equiv 0$. Тогда применяя к обеим частям (3.4) дифференциальные операторы $\dfrac{\partial}{\partial \bar z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\,\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ и $\dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - i\,\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$, получим $\phi_0 \equiv 0$, $\omega_0 \equiv 0$, $\varphi_k \equiv 0$, $\psi_k \equiv 0$ и $c_k = 0$ $(k = 1, ..., m)$. Следовательно, функции $\phi_0(z)$, $\omega_0(z)$, $\varphi_k(z)$, $\psi_k(z)$ и постоянные $c_k = 0$ $(k = 1, ..., m)$ в (3.4) определяются единственным образом по решениям $u(z)$ уравнения (1.1).

Определение 3.1. Будем говорить, что решение уравнения (1.1) принадлежит классу $M_{m,n}$, если оно представляется в виде (3.4) с дополнительными условиями : $\phi_0(z)$, $\omega_0(z) \in H(\overline{D_0})$, $\varphi_k(z)$ и $\psi_k(z)$ $(k = 1, ..., m)$ принадлежат классу $H(\overline{D_k^-})$, а производные $\varphi_k'(z)$ и $\psi_k'(z) \in H(\overline{D_k^-})$ $(k = n+1, ..., m$. $\overline{D_0} = D_0 \bigcup \Gamma_0$, $\overline{D_k^-} = D_k^- \bigcup \Gamma_k)$.

В [6] доказано следующее утверждение : при сделанных предположениях на функции $f_k(z)$ $(k = 0, ..., m)$, если $u(z)$ является непрерывно дифференцируемым решением задачи (1.1) –- (1.3) в замкнутой области $\overline{D}$, то $u(z) \in M_{m,n}$, и наоборот, если $u(z) \in M_{m,n}$ и удовлетворяет условиям (1.2), (1.3), то $u(z)$ - непрерывно дифференцируема в области $\overline{D}$. Следовательно, не умаляя общности, мы можем решение задачи (1.1) — (1.3) искать в классе $M_{m,n}$. Используя (3.4) и Лемму 2.1, запишем интегральное представление решения уравнения (1.1) в классе $M_{m,n}$. Применяя представление (2.1) — (2.2) при $k = 1$, $G_1 = D_0^+$, $a_1(t) \equiv t$, $b_1(t) \equiv 1$, $\phi_1(z) = \phi_0(z)$ и $\omega_1(z) = \omega_0(z)$, получим

$$\phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{\mu(t)\,dt}{t\,(t-z)}, \qquad \omega_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{\overline{\mu(t)}\,dt}{t-z}, \tag{3.5}$$

где $\mu(t) \in H(\Gamma_0)$ определяется единственным способом по $\phi_0(z)$ и $\omega_0(z)$.

Пусть c_1, ...,c_m – постоянные из представления (3.4). Используя (2.1) — (2.2) при $k = 2$, $G_2 = D_j^-$, $a_2(t) = t - z_j$, $b_2(t) = 1$, $\phi_2(z) = (c_j + \varphi_j(z))(z - z_j)^{-1}$.

$\omega_2(z) = \psi_j(z)$ $(j = 1, ..., n)$, получаем

$$\frac{c_j + \varphi_j(z)}{z - z_j} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{\mu(t)\, dt}{(t - z_j)\,(t - z)}, \quad z \in D_j^-, \quad j = 1, ..., n, \tag{3.6}$$

$$\psi_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{\overline{\mu(t)}\, dt}{t - z}, \quad z \in D_j^-, \quad j = 1, ..., n, \tag{3.7}$$

где $\mu(t) \in H(\Gamma_j)$ определяется единственным образом по c_j, $\varphi_j(z)$ и $\psi_j(z)$.

Пусть $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ суть углы между внутренней нормалью контура Γ в точке $t \in \Gamma$ и положительными направлениями осей OX и OY, соответственно. Рассмотрим функцию

$$\gamma(t) = \cos\alpha(t) + i\,\cos\beta(t). \tag{3.8}$$

Положительное направление на Γ_j считается то, которое оставляет D слева. Индекс функции $\gamma(t)$ на Γ_0 равен 1, а на Γ_j, $j = 1, ..., m$ равен -1. Пусть $n < j \le m$. Применяя представление (2.1) - (2.2) при $k = 2$, $G_2 = D_j^-$, $a_2(t) = \gamma(t)$, $b_2(t) = \gamma(t)\,(t - z_j)^{-1}$, $\phi_2(z) = \dfrac{c_j}{z - z_j} + \varphi_j'(z)$ и $\omega_2(z) = \psi_j'(z)\,(z - z_j)$, получим

$$\frac{c_j}{z - z_j} + \varphi_j'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{\mu(t)\, dt}{\gamma(t)\,(t - z)}, \quad z \in D_j^-, \quad j = n + 1, ..., m, \tag{3.9}$$

$$\psi_j'(z)\,(z - z_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{(t - z_j)\,\overline{\mu(t)}\, dt}{\gamma(t)\,(t - z)}, \quad z \in D_j^-, \quad j = n + 1, ..., m, \tag{3.10}$$

где $\mu(t) \in H(\Gamma_j)$ определяется по c_j, $\varphi_j(z)$ и $\psi_j(z)$ единственным образом.

Умножая обе части (3.6) и (3.9) на $z - z_j$ и переходя к пределу при $|z| \to +\infty$, получим

$$c_j = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{\mu(t)\, dt}{t - z_j}, \quad j = 1, .., n, \tag{3.11}$$

$$c_j = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{\mu(t)\, dt}{\gamma(t)}, \quad j = n + 1, ... m. \tag{3.12}$$

Подставляя c_j из (3.11) и (3.12) в (3.6) и (3.9), соответственно, получим

$$\varphi_j(z) = \frac{z - z_j}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{\mu(t)\, dt}{(t - z_j)\,(t - z)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{\mu(t)\, dt}{(t - z_j)}, \quad j = 1, ..., n, \tag{3.13}$$

$$\varphi_j(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{\mu(t)}{\gamma(t)} \ln\left(1 - \frac{t - z_j}{z - z_j}\right) dt, \quad j = n + 1, ..., m. \tag{3.14}$$

Из (3.10) следует, что

$$\psi_j(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{\overline{\mu(t)}}{\gamma(t)} \ln\left(1 - \frac{t - z_j}{z - z_j}\right) dt, \quad z \in D_j^-, j = n + 1, ..., m. \tag{3.15}$$

В (3.14) и (3.15), ln означает непрерывную ветвь в области D_j^-, которая стремится к нулю при $|z| \to +\infty$. Мы доказали следующее утверждение.

Лемма 3.1. Общее решение $u(z)$ уравнения (1.1) определяется по формуле (3.4), где функции $\phi_0(z)$, $\omega_0(z)$, $\varphi_k(z)$, $\psi_k(z)$ и c_k определяются формулами (3.5), (3.7), (3.11) — (3.15). Функция $\mu(t) \in H(\Gamma)$ определяется через $u(z)$ единственным образом.

§4. ЗАДАЧА (1.1) — (1.3)

Рассмотрим следующий интеграл типа Коши :

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\mu(t)\,dt}{t-z}, \tag{4.1}$$

где $\mu(t) \in H(\Gamma)$, а интегрирование на Γ ведётся в положительном направлении. Пусть $\phi_0^+(t_0)$ – предел функции $\phi(z)$, когда $z \to t_0 \in \Gamma$ изнутри области D. Согласно формуле Сохоцкого–Племеля (см. [3], стр. 66) имеем

$$\phi_0^+(t_0) = \frac{1}{2}\,\mu(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\mu(t)\,dt}{t-t_0}, \tag{4.2}$$

где сингулярный интеграл понимается в смысле главного значения Коши (см. [3], стр. 50). Положим

$$\gamma_1(t,t_0) = \frac{1}{t-t_0} - \frac{(\bar{t})'}{\bar{t}-\bar{t}_0}, \tag{4.3}$$

где $t = \xi + i\eta \in \Gamma$, $t_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in \Gamma$

$$(\bar{t})' = \lim_{\substack{z\to t\\ z\in\Gamma}} \frac{\bar{z}-\bar{t}}{z-t} = \left(\frac{dt}{ds}\right)^{-2}.$$

Так как контур Γ достаточно гладкий, то функция $\gamma_1(t,t_0)$ имеет следующий вид (см. [3], стр. 573) :

$$\gamma_1(t,t_0) = \frac{\gamma_0(t,t_0)}{|t-t_0|^\delta}, \tag{4.4}$$

где $\delta \in (0,1)$ и $\gamma_0(t,t_0) \in H(\Gamma)$.

Пусть $a(t,t_0)$ и $b(t,t_0)$ – заданные непрерывно дифференцируемые функции на контуре Γ, причём $a(t_0,t_0) = 1$ и $b(t_0,t_0) = 1$. Тогда функция

$$\gamma_2(t,t_0) = \frac{a(t,t_0)}{t-t_0} - \frac{b(t,t_0)\,(\bar{t})'}{\bar{t}-\bar{t}_0} \tag{4.5}$$

имеет представление вида (4.4). Граничные условия (1.3) запишем в виде (см. (3.8))

$$\frac{\partial u(z)}{\partial x}\cos\alpha(z) + \frac{\partial u(z)}{\partial y}\cos\beta(z) = f_k(z), \quad z \in \Gamma_k, \quad k = n+1,\dots,m. \tag{4.6}$$

В предыдущем параграфе мы получили интегральное представление (3.4) для решения уравнения (1.1) в классе $M_{m,n}$, где функции $\phi_0(z)$, $\omega_0(z)$, $\varphi_k(z)$, $\psi_k(z)$ и c_k определяются по формулам (3.5), (3.7), (3.11) — (3.15). Подставляя это интегральное представление в (1.2) и (4.6) и вычисляя предел, когда $z \to t_0 \in \Gamma$ изнутри области D, согласно формуле Сохоцкого-Племеля (4.2) и представлений (4.3) и (4.5), для $\mu(t)$, получаем интегральное уравнение типа Фредгольма

$$\mu(t_0) + \int_\Gamma K(t_0, t)\, \mu(t)\, dt = f(t_0), \qquad t_0 \in \Gamma, \tag{4.7}$$

где $K(t_0, t)$ - вполне определённая функция вида (4.4), а $f(t_0) = f_k(t_0)$ при $t_0 \in \Gamma_k$, $k = 0, \ldots, m$. Уравнение (4.7) мы можем решать в классе непрерывных функций на Γ, так как любое непрерывное решение уравнения (4.7) принадлежит классу $H(\Gamma)$.

Теперь докажем существование и единственность решения уравнения (4.7). Для этого достаточно показать, что однородное уравнение (4.7) (при $f(t) \equiv 0$) имеет только нулевое решение. Действительно, пусть $\mu(t)$ - решение однородного уравнения (4.7). Тогда функция $u(z)$, определённая через $\mu(t)$ по формулам (3.4), (3.5), (3.7), (3.11) — (3.15), является решением однородной задачи (1.1) — (1.3). Следовательно, $u(z) \equiv 0$. Отсюда и из единственности интегрального представления (Лемма 3.1), $\mu(t) \equiv 0$. Таким образом, мы доказали следующее утверждение

Теорема 4.1. Решение задачи (1.1) — (1.3) удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма (4.7). Последнее интегральное уравнение имеет единственное решение, которое задаётся по формулам (3.4), (3.5), (3.7), (3.11) — (3.15).

Аналогичный подход можно использовать, если заменить граничные условия (1.3) на следующие :

$$\frac{\partial u(z)}{\partial N} + a_k(z)\, u(z) = f_k(z), \qquad z \in \Gamma_k, \qquad k = n+1, \ldots, m, \tag{4.8}$$

где $a_k(z) \in H(\Gamma_k)$ - заданная комплекснозначная функция. По Лемме 3.1 задачу (1.1), (1.2) и (4.8) можно свести к интегральному уравнению Фредгольма вида (4.7). В случае, когда функции $a_k(z)$ вещественные, и $a_k(z) \geq 0$ при $z \in \Gamma_k$, $k = n+1, \ldots, m$, то доказывается существование и единственность решения этого интегрального уравнения.

ABSTRACT. The paper studies mixed boundary value problems for Laplace equation, replacing them by Fredholm equations which have unique solution.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. E. Tovmasyan, Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications in Electrodynamics. "World Scientific", Singapore, 1994.
2. А. А. Терзян, Теория Систем Автоматизированного Проектирования. "NTUA Press", Ереван– Лос-Анжелес – Афины. 1995.
3. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные Интегральные Уравнения. Москва, Наука, 1962.
4. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Уравнения Математической Физики. Москва, Наука, 1966.
5. А. В. Бицадзе, Краевые Задачи для Эллиптических Уравнений Второго Порядка. Москва. Наука, 1968.
6. И. Н. Векуа, Новые Методы Решения Эллиптических Уравнений. Москва, ГосТехИздат, 1948.
7. Н. П. Векуа, Системы Сингулярных Интегральных Уравнений. Москва. Наука, 1970.
8. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы Теории Функций Комплексного Переменного. Москва, Наука. 1973.

26 апреля 2000

Армянский государственный инженерный университет