

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н. Е. Товмасян, А. О. Бабалян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 6, 2000

В статье изучаются краевые задачи для некоторых систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих важные приложения. Результаты, касающиеся этих систем (см. [1] – [4]), не распространяются на существование единственного решения задачи Коши в окрестности начальной точки. Доказано существование решения на конечном интервале с фиксированной начальной точкой, конечная точка которого подлежит определению по граничным условиям, и получены оценки, позволяющие разработать приближенный метод решения задачи.

§1. О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ

В интервале $(0, t_0)$ рассмотрим следующую задачу :

$$m(t)V'(t) = k_1 F(t) - f_1(V), \quad (1)$$

$$-k_2 m'(t) = F(t), \quad (2)$$

$$f_2(V) + k_3 F(t) = m(t)k_4, \quad (3)$$

$$m(0) = M_0, \quad V(0) = V_0, \quad (4)$$

$$m(t_0) = m_0, \quad (5)$$

где $f_1(V), f_2(V)$ – непрерывно дифференцируемые функции аргумента $V \geq 0$, M_0, m_0, V_0 и k_j ($j = 1, \dots, 4$) – положительные постоянные, t_0 – искомая положительная величина, а $m(t), F(t), V(t)$ – искомые функции, определенные на $(0, t_0)$. Предположим, что

$$0 < m_0 < M_0, \quad f_1(0) = f_2(0) = 0, \quad f_2(V_0) < k_4 M_0, \quad (6)$$

$$f_1'(V) > 0, \quad f_2'(V) > 0 \quad \text{при } V > 0, \quad (7)$$

$$f_1(V) \rightarrow \infty, \quad f_2(V) \rightarrow \infty \quad \text{при } V \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Представим систему (1) – (3) в виде

$$m(t)V'(t) = bm(t) - \bar{f}_1(V(t)), \quad (9)$$

$$m'(t) = -am(t) + \bar{f}_2(V(t)), \quad (10)$$

где

$$b = \frac{k_1 k_4}{k_3} > 0, \quad a = \frac{k_4}{k_2 k_3} > 0, \quad \bar{f}_1(V) = \frac{k_1}{k_3} f_2(V) + f_1(V), \quad \bar{f}_2(V) = \frac{1}{k_2 k_3} f_2(V).$$

Из (6) – (8) следует, что

$$\bar{f}_1(0) = \bar{f}_2(0) = 0, \quad \bar{f}_1'(V) > 0, \quad \bar{f}_2'(V) > 0 \quad \text{при } V > 0, \quad (11)$$

$$\bar{f}_2(V_0) < aM_0, \quad \bar{f}_1(V) \rightarrow \infty, \quad \bar{f}_2(V) \rightarrow \infty \quad \text{при } V \rightarrow \infty. \quad (12)$$

$$\frac{\bar{f}_1(V)}{b} > \frac{\bar{f}_2(V)}{a} \quad \text{при } V > 0. \quad (13)$$

В этом параграфе доказывается, что имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Задача (9), (10), (4) имеет единственное решение $V(t), m(t)$ на полуоси $[0, \infty)$ и при этом

$$V(t) > 0, \quad m(t) > 0 \quad \text{при } t \geq 0, \quad m(t) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Для доказательства этой теоремы приведем две леммы.

Лемма 1. Пусть $V(t), m(t)$ – решение задачи (9), (10), (4) в интервале $(0, T)$. Если $m(t) > 0$ для точки $t \in (0, T)$, то

$$V(t) > 0, \quad m'(t) < 0, \quad \text{при } t \in (0, T). \quad (15)$$

Лемма 2. Пусть $V(t), m(t)$ – решение задачи (9), (10), (4) в интервале $[0, t_0)$. Если $m(t)$ удовлетворяет условию

$$m_0 \leq m(t) \leq M_0 \quad \text{при } t \in [0, t_0), \quad (16)$$

то

$$0 < A = \min(V_0, V^*) \leq V(t) \leq \max(V_0, V^{**}) = B, \quad (17)$$

$$-aM_0 \leq m'(t) \leq -c < 0, \quad (18)$$

где положительные постоянные c, V^*, V^{**} определяются из равенств

$$\tilde{f}_1(V^*) = bm_0, \quad \tilde{f}_1(V^{**}) = bM_0, \quad (19)$$

$$c = \min \left(\frac{m_{21}Da}{a^2bM_0 + M_{21}}, aM_0 - \tilde{f}_2(V_0) \right), \quad (20)$$

$$m_{21} = \min_{V \in [A, B]} \tilde{f}_2'(V), \quad M_{21} = \max_{V \in [A, B]} \tilde{f}_2'(V), \quad D = \min_{V \in [A, B]} \left(\frac{1}{b} \tilde{f}_1(V) - \frac{1}{a} \tilde{f}_2(V) \right). \quad (21)$$

Доказательство Леммы 1 : Сначала докажем, что $V(t) > 0$ при $t \in (0, T)$. Предположим обратное. Пусть для $\tau \in (0, T)$

$$V(\tau) = 0, \quad V(t) > 0 \quad \text{при } t \in [0, \tau). \quad (22)$$

Существование такой точки следует из предположения $V(0) = V_0 > 0$. Из (22) имеем $V'(\tau) \leq 0$. С другой стороны, в точке τ уравнение (9) имеет вид $m(\tau)V'(\tau) = bm(\tau) - \tilde{f}_1(0)$. Так как по предположению $\tilde{f}_1(0) = 0$ и $m(\tau) > 0$, то получим $V'(\tau) = b > 0$. Противоречие доказывает первое неравенство из (15).

Для доказательства второго неравенства из (15) заметим, что функция $m(t)$ имеет непрерывную вторую производную на $(0, T)$, поскольку $\tilde{f}_2(V)$ предполагалась непрерывно дифференцируемой. Из (10) и (12) имеем $m'(0) = -aM_0 + \tilde{f}_2(V_0) < 0$. Следовательно, в окрестности нуля имеем $m'(t) < 0$. Пусть $\tau \in (0, T)$ — точка такая, что $m'(\tau) = 0$, $m'(t) < 0$ при $t \in [0, \tau)$. Тогда $m''(\tau) \geq 0$, а в силу (10) получим

$$m''(\tau) = -am'(\tau) + \tilde{f}_2'(V(\tau))V'(\tau) = \tilde{f}_2'(V(\tau))V'(\tau) \geq 0.$$

Так как $V(t) > 0$ при $t \in [0, \tau)$, то имеем $\tilde{f}_2'(V(\tau)) > 0$, следовательно $V'(\tau) \geq 0$. С другой стороны, из (10) следует

$$m(\tau) - \frac{1}{a} \tilde{f}_2(V(\tau)) = -\frac{1}{a} m'(\tau) = 0.$$

В силу (13)

$$m(\tau) - \frac{1}{b} \tilde{f}_1(V(\tau)) < m(\tau) - \frac{1}{a} \tilde{f}_2(V(\tau)) = 0.$$

Следовательно, из (9) получим

$$V'(\tau) = \frac{b}{m(\tau)} \left[m(\tau) - \frac{1}{b} \tilde{f}_1(V(\tau)) \right] < 0.$$

Это противоречие доказывает Лемму 1.

$$B(t, \alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\cos(nt + t + \alpha\pi/2 - \beta t)}{(n+1-\beta)^r} + \frac{\cos(nt + \beta t + \alpha\pi/2)}{(n+\beta)^r} \right),$$

$$N(t, \alpha, \beta) = (A^2(t, \alpha, \beta) + B^2(t, \alpha, \beta))^{1/2}, \quad \varphi(t, \alpha, \beta) = \arccos \frac{B(t, \alpha, \beta)}{N(t, \alpha, \beta)},$$

$$M(\alpha, \beta) = \frac{\beta^r}{\pi^2} \int_0^{2\pi} N(t, \alpha, \beta) \left(1 - 2 \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\cos 2v\varphi}{4v^2 - 1} \right) dt,$$

$$A_1(\alpha, \beta) = M(\alpha, \beta) + M(-\alpha, \beta), \quad A_2(\alpha, \beta) = \frac{\beta^r}{\pi^2} \int_0^{2\pi} (N(t, \alpha, \beta) + N(t, -\alpha, \beta)) dt.$$

где * означает, что $2vs \equiv 0 \pmod{p}$, $s, p \in \mathbb{N}$.

Теорема 2. Пусть $r > 1$. Тогда

а) если $\beta = 0$, то $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{C_m(0, W_r^\alpha)}{m^{-r} \ln m} = \frac{4}{\pi^2}$,

б) если $\beta \in [0, 1/2]$ иррационально, то $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{C_m(0, W_\alpha^r)}{m^{-r} \ln m} = A_2(\alpha, \beta)$,

г) если $\beta = s/p \in [0, 1/2]$, $s, p \in \mathbb{N}$, $(s, p) = 1$, то

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{C_m(0, W_\alpha^r)}{m^{-r} \ln m} \geq A_1(\alpha, \beta), \quad \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{C_m(0, W_\alpha^r)}{m^{-r} \ln m} \leq A_2(\alpha, \beta),$$

и для любого $\gamma \in [A_1(\alpha, \beta), A_2(\alpha, \beta)]$ существуют $m_n, q_n \in \mathbb{N}$ такие, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n}{q_n} = s/p \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_{m_n}(0, W_\alpha^r)}{m_n^{-r} \ln m_n} = \gamma.$$

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1 И 2

Доказательство Теоремы 1: Так как $T_m(x, S_m(x, f)) = S_m(x, f)$, то получим

$$f(x) - T_m(x, f) = f(x) - S_m(x, f) - T_m(x, f - S_m) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_m(x, t) \varphi(t) dt, \quad (3)$$

где

$$G_m(x, t) = \gamma(t, x, m, \alpha) - \frac{2}{q} \sum_{l=0}^{q-1} D_{r, \alpha}^{m+1}(t - x_l) D_m(x - x_l). \quad (4)$$

Из (3) следует, что

$$C_m(x, W_\alpha^r) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |G_m(x, t)| dt. \quad (5)$$

С другой стороны, легко видеть, что 2π -периодическая функция

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} \text{sign} G_m(x, t), & \text{при } |t| \leq \frac{\pi}{2}, \\ -\varphi_0(t - \pi), & \text{при } \frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$+ \frac{\tilde{f}_2'(V(\tau))}{bm(\tau)} \left[\frac{1}{a} \tilde{f}_2(V(\tau)) - \frac{1}{b} \tilde{f}_1(V(\tau)) \right] \geq 0,$$

или эквивалентно

$$\left[a^2 + \frac{\tilde{f}_2'(V(\tau))}{bm(\tau)} \right] \cdot \left[m(\tau) - \frac{1}{a} \tilde{f}_2(V(\tau)) \right] \geq \frac{\tilde{f}_2'(V(\tau))}{bm(\tau)} \left[\frac{1}{b} \tilde{f}_1(V(\tau)) - \frac{1}{a} \tilde{f}_2(V(\tau)) \right]. \quad (25)$$

Поскольку неравенство (17) выполняется на $[0, t_0)$, то из (11) и (13) постоянные, определенные в (21), суть положительные. Из (25) имеем

$$m(\tau) - \frac{1}{a} \tilde{f}_2(V(\tau)) \geq \frac{m_{21}D}{a^2bM_0 + M_{21}}.$$

Следовательно, при всех $t \in [0, t_1]$ (а значит в $[0, t_0)$) имеем

$$m(t) - \frac{1}{a} \tilde{f}_2(V(t)) \geq \min \left(\frac{m_{21}D}{a^2bM_0 + M_{21}}, M_0 - \frac{1}{a} \tilde{f}_2(V_0) \right) = \frac{c}{a} > 0. \quad (26)$$

Заметим, что из (12) следует, что $M_0 - \frac{1}{a} \tilde{f}_2(V_0) > 0$. Из (10) получим

$$m'(t) = -a \left(m(t) - \frac{1}{a} \tilde{f}_2(V(t)) \right).$$

Отсюда и из (26) следует $m'(t) \leq -c$ при $t \in [0, t_0)$, откуда вытекает первое неравенство из (18). Второе неравенство следует из (16) и (10). Лемма 2 доказана.

Доказательство Теоремы 1 : Согласно общей теореме (см. [3]), задача (9), (10), (4) имеет единственное решение в окрестности нуля. Поскольку $m(0) = M_0 > 0$, то в этой окрестности имеем $m(t) > 0$. Пусть t_1 есть точка такая, что $0 < \epsilon \leq m(t) \leq M_0$ при $t \in [0, t_1]$. По Лемме 2 $0 < A_1 \leq V(t) \leq B_1$, $-C_1 \leq m'(t) \leq -aM_0$ при $t \in [0, t_1]$, где A_1, B_1, C_1 — положительные постоянные, зависящие только от ϵ, M_0, V_0 . Следовательно, $\tilde{f}_1(V(t))$ ограничена на $[0, t_1]$. Поэтому $V'(t)$ остается ограниченной при $t \rightarrow t_1 - 0$. Таким образом, $m(t) \rightarrow m_1$, $V(t) \rightarrow V_1$ при $t \rightarrow t_1 - 0$, причем $m_1 \geq \epsilon > 0$, $V_1 \geq A_1 > 0$. Рассмотрим задачу Коши для системы (9), (10) с начальным условием $m(t_1) = m_1$, $V(t_1) = V_1$. Эта задача имеет единственное решение в окрестности $[t_1, t_1 + \epsilon)$. Поэтому $[0, t_1]$ не является максимальным интервалом, на котором существует решение задачи (9), (10), (4).

Пусть $[0, T)$ — интервал, где $m(t) > 0$. По Лемме 1, $V(t) > 0$ на $[0, T)$, следовательно $\tilde{f}_2(V(t)) > 0$ на $[0, T)$. Из (10) имеем $m'(t) + am(t) > 0$, $t \in [0, T)$. Так как $m(t) > 0$, то $(\ln m(t))' > -a$, $t \in [0, T)$. Интегрируя последнее неравенство от 0 до

t , получим $\ln m(t) - \ln M_0 > -at$, или $m(t) > M_0 \exp(-at)$, $t \in [0, T)$. Если $T < \infty$, то $m(t) \geq M_0 \exp(-aT) > 0$ при $t \in [0, T)$. Используя предыдущие рассуждения, можно продолжить решение на интервал $[T, T + \epsilon)$. Следовательно, $T = \infty$.

Итак, решение задачи (9), (10), (4) определено на $[0, \infty)$, и $m(t) > 0$ при $t \geq 0$. Покажем, что $m(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Действительно, если это не тот случай, когда $m(t) \geq \epsilon$ при $t \geq 0$, то по Лемме 1 $m'(t) < 0$. Согласно Лемме 2, $m'(t) \leq -c$ при всех $t \geq 0$. Следовательно, $m(t) \leq M_0 - ct$, т.е. функция $m(t)$ не может оставаться положительной при $t \rightarrow \infty$. Теорема 1 доказана.

§2. ПРИБЛИЖЁННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ

Из Леммы 1 ($m'(t) < 0$) следует, что

$$m_0 \leq m(t) \leq M_0, \quad \text{при } t \in [0, t_0]. \quad (27)$$

Укажем метод приближенного решения задачи (9), (10), (4) на интервале $[0, t_0]$, где $m(t_0) = m_0$ с дополнительным условием (27). Из Леммы 2 следует, что из (27) вытекает $m'(t) \leq -c$, где c определяется в (20). Следовательно, в (8) и (9) можем перейти к переменной m . Имеем

$$\frac{dV}{dm} = -\frac{1}{m} \frac{bm - \bar{f}_1(V(m))}{am - \bar{f}_2(V(m))}. \quad (28)$$

Начальное условие запишется в виде

$$V(M_0) = V_0. \quad (29)$$

Решение задачи (28), (29) ищем в интервале $[m_0, M_0]$. Рассмотрим эквивалентное интегральное уравнение

$$V(x) = V(M_0) + \int_x^{M_0} \frac{1}{m} \frac{bm - \bar{f}_1(V(m))}{am - \bar{f}_2(V(m))} dm. \quad (30)$$

Докажем теперь, что при надлежащем выборе h уравнение (30) можно решить методом последовательных приближений на интервале $[M_0 - h, M_0]$. При $m_0 \leq m \leq M_0$ из Леммы 2 следует, что $0 < A \leq V(m) \leq B$, $aM_0 \geq am - \bar{f}_2(V(m)) \geq c > 0$, где A, B, c определены в (17) - (20). Из непрерывности функции $\bar{f}_2(V)$ для любого положительного ϵ существует функция $\delta(\epsilon)$ такая, что из неравенств

$$0 < A - \epsilon \leq V(m) \leq B + \epsilon \quad (31)$$

вытекает $aM_0 \geq am - \bar{f}_2(V(m)) \geq c - \delta(\epsilon) > 0$. Следовательно, на интервале $[M_0 - h, M_0]$ функция

$$(KV)(x) = V(M_0) + \int_x^{M_0} \frac{1}{m} \frac{bm - \bar{f}_1(V(m))}{am - \bar{f}_2(V(m))} dm$$

удовлетворяет неравенствам

$$A - \frac{h}{m_0} \frac{\bar{f}_1(B + \epsilon)}{c - \delta(\epsilon)} \leq (KV)(m) \leq B + \frac{h}{m_0} \frac{BM_0}{c - \delta(\epsilon)}.$$

Если h удовлетворяет неравенству

$$h \leq \min \left(\frac{\epsilon m_0 (c - \delta(\epsilon))}{\bar{f}_1(B + \epsilon)}, \frac{\epsilon m_0 (c - \delta(\epsilon))}{bM_0} \right),$$

то функция $(KV)(m)$ удовлетворяет (31). Далее, имеем

$$\begin{aligned} (KV_1)(x) - (KV_2)(x) &= \int_x^{M_0} \frac{1}{m} \left[\frac{bm - \bar{f}_1(V_1(m))}{am - \bar{f}_2(V_1(m))} - \frac{bm - \bar{f}_1(V_2(m))}{am - \bar{f}_2(V_2(m))} \right] dm = \\ &= \int_x^{M_0} \frac{1}{m} \left[\frac{[am - \bar{f}_2(V_2(m))] \cdot [\bar{f}_1(V_2(m)) - \bar{f}_1(V_1(m))]}{[am - \bar{f}_2(V_1(m))] \cdot [am - \bar{f}_2(V_2(m))]} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{[bm - \bar{f}_1(V_2(m))] \cdot [\bar{f}_2(V_1(m)) - \bar{f}_2(V_2(m))]}{[am - \bar{f}_2(V_1(m))] \cdot [am - \bar{f}_2(V_2(m))]} \right] dm. \end{aligned}$$

Следовательно

$$\|(KV_1)(m) - (KV_2)(m)\| \leq h \frac{aM_0M_{11} + bM_0M_{21}}{m_0(c - \delta(\epsilon))^2} \|V_1(m) - V_2(m)\|,$$

где $\|\cdot\|$ — равномерная норма на отрезке $[M_0 - h, M_0]$, причем

$$M_{k1} = \max_{A - \epsilon \leq V \leq B + \epsilon} \bar{f}'_k(V), \quad k = 1, 2.$$

Таким образом, если h определить по формуле

$$h = \min \left(\frac{\epsilon m_0 (c - \delta(\epsilon))}{2\bar{f}_1(B + \epsilon)}, \frac{\epsilon m_0 (c - \delta(\epsilon))}{2bM_0}, \frac{m_0 (c - \delta(\epsilon))^2}{2M_0(aM_{11} + bM_{21})} \right),$$

то K — сжимающее отображение с коэффициентом сжатия $1/2$, действующее в пространстве функций, удовлетворяющих неравенству (31). Следовательно, на интервале $[M_0 - h, M_0]$ уравнение (30) можно решить методом последовательных приближений со скоростью геометрической прогрессии. Определив решение $V(m)$ на $[M_0 - h, M_0]$ с точностью $\epsilon/4$, рассмотрим уравнение

$$V(x) = V(M_0 - h) + \int_x^{M_0 - h} \frac{1}{m} \frac{bm - \bar{f}_1(V(m))}{am - \bar{f}_2(V(m))} dm, \quad (32)$$

эквивалентное задаче (28), (29) на $[M_0 - 2h, M_0 - h]$. В силу выбора h получим

$$B + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} \geq V(M_0 - h) + \int_x^{M_0 - h} \frac{1}{m} \frac{bm - \bar{f}_1(V(m))}{am - \bar{f}_2(V(m))} dm \geq A - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{4}.$$

Используя предыдущие рассуждения к уравнению (32), заключаем, что на $[M_0 - 2h, M_0 - h]$ уравнение (32) можно решить методом последовательных приближений со скоростью геометрической прогрессии. Находим решение с точностью $\epsilon/8$ и на интервале $[M_0 - 3h, M_0 - 2h]$ решаем уравнение

$$V(x) = V(M_0 - 2h) + \int_x^{M_0 - 2h} \frac{1}{m} \frac{bm - \bar{f}_1(V(m))}{am - \bar{f}_2(V(m))} dm.$$

Используя предыдущие рассуждения, через конечное число шагов получим решение задачи (28), (29) на $[m_0, M_0]$ с заданной точностью ϵ . Определив $V(m)$ из (10), можем найти решение $m(t_0) = m_0$ по формуле

$$t_0 = \int_{m_0}^{M_0 - 2h} \frac{dm}{-am + \bar{f}_2(V(m))}.$$

ABSTRACT. The paper studies boundary value problems for some systems of nonlinear ordinary differential equations, that have important applications. The earlier knowledge (see [1] – [4]) on similar systems did not extend beyond existence of unique solution of the Cauchy problem in a neighborhood of the origin. The existence of a solution in a finite interval with starting point fixed, whose endpoint has to be determined from the boundary conditions is proved, and estimates that allow to construct approximate solutions are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Г. Петровский, Лекции по Теории Обыкновенных Дифференциальных Уравнений, Наука, Москва, 1970.
2. Ф. Трикоми, Дифференциальные Уравнения, Москва, ИЛ, 1962.
3. Ф. Хартман, Обыкновенные Дифференциальные Уравнения, Мир, Москва, 1970.
4. В. И. Арнольд, Дополнительные Главы Теории Обыкновенных Дифференциальных Уравнений, Наука, Москва, 1978.

17 сентября 2000

Армянский государственный
инженерный университет