ВНЕШНЯЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Н. Е. Товмасян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 6, 2000

В статье доказывается, что задача Дирихле для правильного эллиптического уравнения имеет единственное решение вне круга. Для неправильного эллиптического уравнения дефектные числа задачи Дирихле вне круга равны бесконечности.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть D – область на плоскости $\{z \in \mathbb{R}^2 : |z| > 1\}$ с границей $\Gamma = \{z \in \mathbb{R}^2 : |z| = 1\}$. В области D рассмотрим следующую задачу Дирихле :

$$\sum_{k=0}^{2n} A_k \frac{\partial^{2n} u(z)}{\partial y^k \partial x^{2n-k}} = 0, \quad z = x + iy \in D, \tag{0.1}$$

$$\frac{\partial^k u(z)}{\partial r^k} = f_k(z), \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \tag{0.2}$$

где $A_k \neq 0$ – комплексные постоянные, $f_k(z)$, $k = 0, 1, ..., n-1$ – заданные комплекснозначные функции на Γ, а $\dfrac{\partial u(z)}{\partial r}$ – производные по направлению радиус-вектора в точке $z \in \Gamma$.

Будем говорить, что функция $f(z)$, $z \in \Gamma$ принадлежит классу $H(\Gamma)$, если она удовлетворяет условию Гёльдера на Γ. Функция $u(z)$ принадлежит классу $H(\overline{D})$, если $u(z)$ определена в замкнутой области $\overline{D} = D \cup \Gamma$ и удовлетворяет условию Гёльдера в любом замкнутом кольце $1 \leq |z| \leq R$. Пусть s – дуговая абсцисса точки $z \in \Gamma$. Предполагая, что функции

$$\frac{d^j f_k(z)}{ds^j}, \quad j = 0, 1, ..., 2n-k, \quad k = 0, 1, ..., n-1$$

принадлежат классу $H(\Gamma)$, мы ищем решение задачи (0.1), (0.2) в классе комплекснозначных функций $u(z)$, которые $2n$-раз непрерывно дифференцируемы в

D, частные производные которых до $(2n-1)$-го порядка принадлежат классу $H(\overline{D})$ и в окрестности бесконечности удовлетворяют условиям

$$\left|\frac{\partial^{j+k} u(z)}{\partial x^k \partial y^j}\right| \leq c|z|^{n-1-j-k}, \quad j+k \leq 2n-1, \tag{0.3}$$

где c – некоторая положительная постоянная, зависящая от u.

Рассмотрим характеристическое уравнение к уравнению (0.1)

$$\sum_{k=0}^{2n} A_k \lambda^k = 0. \tag{0.4}$$

Уравнение (0.1) называется **эллиптическим**, если характеристическое уравнение (0.4) не имеет действительных корней. Будем предполагать, что уравнение (0.1) является эллиптическим, а характеристическое уравнение (0.4) имеет только простые корни.

Пусть p и q – число корней характеристического уравнения (0.4) при $\operatorname{Im}\lambda > 0$ и $\operatorname{Im}\lambda < 0$, соответственно. Уравнение (0.1) называется **правильно эллиптическим**, если $p = q$, и **неправильно эллиптическим**, если $p \neq q$. Не ограничивая общности будем считать, что $p \geq q$.

В [1] доказано, что при $n = 2$ задача Дирихле для правильного эллиптического уравнения (0.1) в круге фредгольмова, однако существование и единственность решения существенно зависят от коэффициентов A_k. С другой стороны, задача Дирихле для неправильного эллиптического уравнения (0.1) в круге не фредгольмова и не нетерова. В зависимости от коэффициентов A_k, число линейно независимых решений соответствующей однородной задачи может быть конечным или бесконечным. Например, если $n = 2$ и корнями характеристического уравнения (0.4) являются

$$i, \quad \frac{i(1-\varepsilon)}{1+\varepsilon}, \quad \frac{i(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon^2}, \quad -i,$$

где комплексное число ε удовлетворяет $|\varepsilon| < 1$, то уравнение (0.1) является неправильно эллиптическим, и однородная задача Дирихле в круге имеет только нулевое решение. Если $n = 2$ и $i = \sqrt{-1}$ является трехкратным корнем характеристического уравнения (0.4), то число линейно независимых решений в круге равно бесконечности.

Положение иное для задачи Дирихле (0.1), (0.2) вне круга. Докажем следующие две теоремы.

Теорема 1. Для правильного эллиптического уравнения (0.1) задача Дирихле (0.2) вне круга имеет единственное решение.

Теорема 2. Дефектные числа задачи Дирихле для неправильного эллиптического уравнения (0.1) вне круга равны бесконечности.

Описывается также эффективный метод решения задачи Дирихле для правильного эллиптического уравнения (0.1) вне круга.

§1. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (0.1) ВНЕ КРУГА

Формулу для общего решения эллиптических систем уравнений с постоянными коэффициентами в ограниченных односвязных областях можно найти в [2]. Так как решение уравнения (0.1) в области $D = \{z : |z| > 1\}$ может иметь особенности до порядка $n-1$ в точке $z = \infty$, то формула для общего решения уравнения (0.1) в области D немного отличается от формулы приведенной в [2]. Эта новая формула помимо аналитических функций содержит также некоторые логарифмические функции и полиномы. Приведем эту формулу в Лемме 1 без доказательства, поскольку оно аналогично доказательству в [2].

Пусть λ – комплексная постоянная с $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$. Обозначим через D_λ образ области D при отображении $\zeta = x + \lambda y$, $z = x + iy \in D$, $\zeta = \xi + i\eta \in D_\lambda$. Ясно, что D_λ – внешность некоторого эллипса с центром O.

Определение 1. Будем говорить, что **функция** $\varphi(x+\lambda y)$ **аналитична относительно аргумента** $x + \lambda y$, если она является суперпозицией аналитической в области D_λ функции $\varphi(\zeta)$ и функции $\zeta = x + \lambda y$. Аналогично, функция $u(z)$ аналитична относительно аргумента $x + \lambda y$, если $u(z)$ бесконечно дифференцируема в D и удовлетворяет условию

$$\frac{\partial u(z)}{\partial y} - \lambda \frac{\partial u(z)}{\partial x} = 0, \quad z = x + iy \in D. \tag{1.1}$$

Заметим, что (1.1) является аналогом условия Коши–Римана для аналитических функций.

В дальнейшем под $\ln z$ будем понимать следующую ветвь логарифма : $\ln z = \ln|z| + i\arg z$, $0 \leq \arg z < 2\pi$. Пусть $\lambda_1, ..., \lambda_{2n}$ – корни характеристического уравнения (0.4), и

$$\operatorname{Im}\lambda_j > 0, \quad j = 1, ..., p, \quad n \leq p \leq 2n, \tag{1.2}$$

$$\operatorname{Im}\lambda_j < 0, \quad j = p+1, ..., 2n, \tag{1.3}$$

где p – целое число.

Лемма 1. Общее решение уравнения (0.1), удовлетворяющее условиям (0.3), определяется формулой

$$u(z)=\sum_{j=1}^{2n}\varphi_j(x+\lambda_j y)+\sum_{j=1}^{2n}\sum_{k=0}^{n-2}b_{jk}(x+\lambda_j y)^k\ln(x+\lambda_j y)+$$

$$+\sum_{j=1}^{p}d_j(x+\lambda_j y)^{n-1}\ln(x+\lambda_j y)+\sum_{j+k\le n-1}c_{kj}x^k y^j,\quad z=x+iy\in D,\qquad(1.4)$$

где d_j, b_{jk} и c_{kj} – произвольные постоянные, а $\varphi_1,\dots,\varphi_{2n}$ – произвольные аналитические функции в области D относительно аргументов $x+\lambda_1 y,\dots,x+\lambda_{2n}y$, соответственно, удовлетворяющие условиям

$$\varphi_j(\infty)=\lim_{|z|\to\infty}\varphi_j(x+\lambda_j y)=0,\quad j=1,\dots,2n,\qquad(1.5)$$

$$\sum_{j=1}^{p}b_{jk}\lambda_j^m-\sum_{j=p+1}^{2n}b_{jk}\lambda_j^m=0,\quad m=0,1,\dots,k,\quad k=0,1,\dots,n-2,\qquad(1.6)$$

$$\sum_{j=1}^{p}d_j\lambda_j^m=0,\quad m=0,1,\dots,n-1.\qquad(1.7)$$

Все функции и постоянные в (1.4) определяются по $u(z)$ единственным образом.

Замечание. Согласно (1.7) при $p=n$ имеем $d_1=\cdots=d_n=0$. Из (1.6) и (1.7) следует, что общее решение (1.4) содержит $2n^2-2n+p$ произвольных постоянных.

§2. СЛУЧАЙ $n=2$

В этом параграфе доказываем Теорему 1 для $n=2$. В этом случае граничные условия (0.2) имеют вид

$$\frac{du(z)}{ds}=\frac{df_0(z)}{ds},\quad z\in\Gamma,\qquad(2.1)$$

$$\frac{\partial u(z)}{\partial r}=f_1(z),\quad z\in\Gamma,\qquad(2.2)$$

$$u(1)=f_0(1).\qquad(2.3)$$

Так как Γ – единичная окружность $|z|=1$, то имеем

$$\frac{du(z)}{ds}=-y\frac{\partial u(z)}{\partial x}+x\frac{\partial u(z)}{\partial y},\quad z\in\Gamma,\qquad(2.4)$$

$$\frac{\partial u(z)}{\partial r}=x\frac{\partial u(z)}{\partial x}+y\frac{\partial u(z)}{\partial y},\quad z\in\Gamma.\qquad(2.5)$$

В силу (2.4) и (2.5), граничные условия (2.1) и (2.2) можно записать в виде

$$\frac{\partial u(z)}{\partial x} = g_1(z), \quad z \in \Gamma, \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial u(z)}{\partial y} = g_2(z), \quad z \in \Gamma, \tag{2.7}$$

где

$$g_1(z) = -y\frac{df_0(z)}{ds} + xf_1(z), \quad g_2(z) = x\frac{df_0(z)}{ds} + yf_1(z). \tag{2.8}$$

Из (2.8) получим

$$\int_\Gamma [g_1(z)\,dx + g_2(z)\,dy] = \int_\Gamma [-yg_1(z) + xg_2(z)\,dy]\,ds = \int_\Gamma \frac{df_0(z)}{ds}\,ds = 0. \tag{2.9}$$

Здесь и ниже интегрирование по Γ понимается против часовой стрелки. Пусть $\lambda_1, ..., \lambda_4$ – корни характеристического уравнения (0.4). Пусть

$$\operatorname{Im}\lambda_1 > 0, \quad \operatorname{Im}\lambda_2 > 0, \quad \operatorname{Im}\lambda_3 < 0, \quad \operatorname{Im}\lambda_4 < 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \lambda_3 \neq \lambda_4. \tag{2.10}$$

В этом случае общее решение (1.4) запишется в виде

$$u(z) = \sum_{j=1}^{4}[\varphi_j(x + \lambda_j y) + a_j \ln(x + \lambda_j y)] + c_0 + c_1 x + c_2 y, \quad z = x + iy \in D. \tag{2.11}$$

где $\varphi_1, ..., \varphi_4$ - произвольные аналитические функции в D относительно аргументов $x + \lambda_1 y, ..., x + \lambda_4 y$, соответственно, а a_j и c_j - произвольные постоянные, удовлетворяющие условиям

$$a_1 + a_2 - a_3 - a_4 = 0, \quad \varphi_j(\infty) = 0, \quad j = 1, ..., 4. \tag{2.12}$$

Подставляя общее решение (2.11) в граничные условия (2.3), (2.6) и (2.7), получим

$$c_0 = -c_1 - \sum_{k=1}^{4}\varphi_k(1), \tag{2.13}$$

$$c_1 + \sum_{k=1}^{4}\left[\omega_k(x + \lambda_k y) + \frac{a_k}{x + \lambda_k y}\right] = g_1(z), \quad z \in \Gamma, \tag{2.14}$$

$$c_2 + \sum_{k=1}^{4}\left[\lambda_k\omega_k(x + \lambda_k y) + \frac{\lambda_k a_k}{x + \lambda_k y}\right] = g_2(z), \quad z \in \Gamma, \tag{2.15}$$

где $\omega_k(x + \lambda_k y)$ – производное функции $\varphi_k(\zeta)$ в точке $\zeta = x + \lambda_k y$, $k = 1, 2, 3, 4$. Функции $\omega_1, ..., \omega_4$ аналитичны в D относительно аргументов $x + \lambda_1 y, ..., x + \lambda_4 y$ соответственно, а в бесконечности они удовлетворяют оценкам

$$|\omega_k(x + \lambda_k y)| \leq \frac{C_k}{|x + \lambda_k y|^2}, \quad k = 1, 2, 3, 4. \tag{2.16}$$

где C_k – некоторая положительная постоянная, зависящая от ω_k. Обозначим через v_1 и v_2 левые части (2.14) и (2.15), соответственно. Имеем

$$\int_\Gamma [v_1(z)\,dx + v_2(z)\,dy] = \sum_{k=1}^{4}\left[\omega_k(x+\lambda_k y) + \frac{a_k}{x+\lambda_k y}\right] d(x+\lambda_k y). \tag{2.17}$$

Из теории вычетов и условий (2.10), (2.16) получим

$$\int_\Gamma \omega_k(x+\lambda_k y)\,d(x+\lambda_k y) = 0, \quad k=1,2,3,4, \tag{2.18}$$

$$\int_\Gamma \frac{a_k}{x+\lambda_k y}\,d(x+\lambda_k y) = 2\pi i a_k, \quad k=1,2, \tag{2.19}$$

$$\int_\Gamma \frac{a_k}{x+\lambda_k y}\,d(x+\lambda_k y) = -2\pi i a_k, \quad k=3,4. \tag{2.20}$$

Из (2.9), (2.14) и (2.15) имеем

$$\int_\Gamma [v_1(z)\,dx + v_2(z)\,dy] = \int_\Gamma [g_1(z)\,dx + g_2(z)\,dy] = 0. \tag{2.21}$$

Из соотношений (2.17) – (2.21) следует (2.12). Таким образом, (2.12) непосредственно следует из граничных условий (2.14) и (2.15). Так как $\lambda_3 \neq \lambda_4$, то постоянные c_1 и c_2 единственным образом можно представить в виде

$$c_1 = b_3 + b_4, \quad c_2 = \lambda_3 b_3 + \lambda_4 b_4, \tag{2.22}$$

где b_3 и b_4 – произвольные постоянные. В силу (2.22) граничные условия (2.14) и (2.15) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{4} \psi_k(x+\lambda_k y) = g_1(z), \quad z\in\Gamma, \tag{2.23}$$

$$\sum_{k=1}^{4} \lambda_k \psi_k(x+\lambda_k y) = g_2(z), \quad z\in\Gamma, \tag{2.24}$$

где

$$\psi_k(x+\lambda_k y) = \omega_k(x+\lambda_k y) + \frac{a_k}{x+\lambda_k y}, \quad k=1,2,$$

$$\psi_k(x+\lambda_k y) = \omega_k(x+\lambda_k y) + \frac{a_k}{x+\lambda_k y} + b_k, \quad k=3,4.$$

Функции $\psi_1,\dots,\psi_4$ аналитичны в области D относительно аргументов $x+\lambda_1 y$, ..., $x+\lambda_4 y$, соответственно, $\psi_1(\infty)=0$, $\psi_2(\infty)=0$, а ψ_3 и ψ_4 ограничены в бесконечности. Положим

$$\gamma_j = \frac{1}{2i(i+\lambda_j)}, \quad \nu_j = \frac{i-\lambda_j}{i+\lambda_j}, \quad j=1,2,$$

$$\gamma_j = \frac{1}{2i(i-\lambda_j)}, \quad \nu_j = \frac{i+\lambda_j}{i-\lambda_j}, \quad j = 3, 4,$$

$$\beta_j(z) = z + \frac{\nu_j}{z}, \quad j = 1, 2, \quad \beta_k(z) = \frac{1}{z} + \nu_k z, \quad k = 3, 4.$$

Из (2.10) следует, что

$$0 < |\gamma_j| < \infty, \quad |\nu_j| < 1, \quad j = 1, 2, 3, 4. \tag{2.25}$$

Так как Γ – единичная окружность $|z| = 1$, то для точки $z = x + iy$ имеем

$$x = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad y = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right),$$

$$x + \lambda_j y = \gamma_j \beta_j(z), \quad j = 1, 2, 3, 4. \tag{2.26}$$

Положим

$$\Phi_j(z) = \psi_j(\gamma_j \beta_j(z)), \quad j = 1, 2, 3, 4. \tag{2.27}$$

Из (2.25) и (2.26) следует, что $\beta_1(z)$ и $\beta_2(z)$ конформно отображают $D = \{z : |z| > 1\}$ на области D_{λ_1} и D_{λ_2}, а функции $\beta_3(z)$ и $\beta_4(z)$ конформно отображают круг $\{z : |z| < 1\}$ на области D_{λ_3} и D_{λ_4}, соответственно. Следовательно, функции $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ аналитичны в области D и удовлетворяют условиям $\Phi_1(\infty) = 0$ и $\Phi_2(\infty) = 0$, а функции $\Phi_3(z)$ и $\Phi_4(z)$ аналитичны в круге $\{z : |z| < 1\}$.

В силу (2.26) и (2.27) граничные условия (2.23) и (2.24) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{4} \Phi_k(z) = g_1(z), \quad z \in \Gamma,$$

$$\sum_{k=1}^{4} \lambda_k \Phi_k(z) = g_2(z), \quad z \in \Gamma.$$

Таким образом, мы получили задачу сопряжения для аналитических функций $\Phi_k(z)$, $k = 1, 2, 3, 4$. Решение определяется формулой (см. [2])

$$\Phi_1(z) + \Phi_2(z) = -F_1(z), \quad \lambda_1\Phi_1(z) + \lambda_2\Phi_3(z) = -F_2(z), \quad |z| > 1, \tag{2.28}$$

$$\Phi_3(z) + \Phi_4(z) = F_1(z), \quad \lambda_3\Phi_3(z) + \lambda_4\Phi_4(z) = F_2(z), \quad |z| < 1, \tag{2.29}$$

где

$$F_j(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g_j(t)}{t - z}\, dt, \quad j = 1, 2.$$

Из (2.28) и (2.29) функции $\Phi_k(z)$, $k = 1, 2, 3, 4$ определяются однозначно. Из (2.27) имеем

$$\psi_k(\zeta) = \Phi_k(\alpha_k(\zeta)), \quad \zeta \in D_{\lambda_k}, \quad k = 1, 2, 3, 4. \tag{2.30}$$

где $\alpha_k(\zeta)$ - обратная функция к $\gamma_k\beta(z)$.

Из (2.28) - (2.30) следует, что функции $\psi_1(\zeta), ..., \psi_4(\zeta)$ аналитичны в областях D_{λ_1}, ..., D_{λ_4}, соответственно, $\psi_1(\infty) = \psi_2(\infty) = 0$, а функции $\psi_3(\zeta)$ и $\psi_4(\zeta)$ ограничены в бесконечности. Из (2.23) и (2.24) имеем

$$\psi_k(\zeta) = \omega_k(\zeta) + \frac{a_k}{\zeta}, \quad \zeta \in D_{\lambda_k}, \quad k = 1, 2, \tag{2.31}$$

$$\psi_k(\zeta) = \omega_k(\zeta) + \frac{a_k}{\zeta} + b_k, \quad \zeta \in D_{\lambda_k}, \quad k = 3, 4. \tag{2.32}$$

Учитывая (2.16), (2.31) и (2.32) получим

$$a_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \psi_j(\zeta)\, d\zeta, \quad j = 1, 2, 3, 4, \tag{2.33}$$

$$b_j = \psi_j(\infty), \quad j = 3, 4, \tag{2.34}$$

где Γ_j – граница области D_{λ_j}. Из (2.31) - (2.34) функции $\omega_k(\zeta)$, $k = 1, 2, 3. 4$ определяются единственным образом, а в бесконечности они удовлетворяют оценкам

$$|\omega_k(\zeta)| \le \frac{c}{|\zeta|^2}, \quad k = 1, 2, 3, 4 \tag{2.35}$$

для некоторой положительной постоянной c. Так как $\omega_j = \varphi_j'$, то из (2.35) получим

$$\varphi_j(\zeta) = -\int_\zeta^\infty \omega_j(t)\, dt, \quad \zeta \in D_{\lambda_j}, \quad j = 1, 2, 3, 4, \tag{2.36}$$

где интегрирование проводится от точки ζ до ∞ по лучу $\arg t = \arg\zeta$, $|\zeta| \le |t| < \infty$. Функции $\varphi_1(\zeta), ..., \varphi_4(\zeta)$, определенные в (2.36) аналитичны в областях D_{λ_1}, ..., D_{λ_4} соответственно, а $\varphi_1(\infty) = \cdots = \varphi_4(\infty) = 0$. Подставляя φ_j, a_j и b_j из (2.33), (2.34) и (2.36) в (2.13) и (2.22), получим постоянные c_0, c_1 и c_2. Таким образом, все функции и постоянные в общем решении (2.11) определяются единственным образом. Теорема 1 доказана.

Используя общее решение (1.4), аналогично можно доказать Теорему 2 для $n = 2$.

§3. СЛУЧАЙ $n > 2$

При $n \ge 3$ доказательства Теорем 1 и 2 аналогичны, поэтому приведем только краткие замечания. Сначала заметим, что граничные условия (0.2) эквивалентны условиям

$$\frac{\partial^{n-1}u(z)}{\partial y^k \partial x^{n-1-k}} = \frac{\partial^{n-1}u_0(z)}{\partial y^k \partial x^{n-1-k}}, \quad z = x + iy \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial^{k+j} u(1)}{\partial x^k \partial y^j} = \frac{\partial^{k+j} u_0(1)}{\partial x^k \partial y^j}, \quad k + j \leq n - 2, \tag{3.2}$$

где функция $u_0(z)$ в полярных координатах (r, θ) запишется в виде

$$u_0(r, \theta) = f_0(e^{i\theta}) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(r-1)^k}{k!} f_k(e^{i\theta}).$$

Снова ищем общее решение уравнения (0.1) в виде (1.4) и докажем, что из (3.1) следует (1.6). Следовательно, можно применить Лемму 1. Тогда остается повторить рассуждения доказательства для случая $n = 2$.

Замечание. При помощи линейных преобразований переменных задачу Дирихле для уравнения (0.1) вне эллипса можно свести к той же задаче вне круга. Следовательно, утверждения Теорем 1 и 2 остаются верными вне эллипса.

ABSTRACT. The paper proves that the Dirichlet problem for properly elliptic equation has unique solution outside a disk. For improperly elliptic equation the deficiency numbers of the Dirichlet problem outside a disk are infinite.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. О. Бабаян, "Об однозначной разрешимости задачи Дирихле для правильных эллиптических уравнений четвертого порядка", Изв. НАН Армении. Математика, том 34, № 5, стр. 1 – 15, 1999.
2. А. В. Бицадзе, Краевые Задачи для Эллиптических Уравнений Второго Порядка, Наука, Москва, 1966.

21 сентября 2000

Армянский государственный инженерный университет