ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

В. А. Ирицян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 6, 2000

В статье рассматривается задача Дирихле для эллиптических уравнений $Lu = 0$, где $L = L_1 \cdots L_{2n}$ – произведение дифференциальных операторов первого порядка с постоянными коэффициентами. В настоящей статье эта задача сводится к интегральному уравнению Фредгольма. Существование и единственность решения доказывается для $n = 2$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть D – ограниченная односвязная или многосвязная область на комплексной плоскости с достаточно гладкой границей Γ, а $L_1, ..., L_{2n}$ – дифференциальные операторы первого порядка вида

$$L_j u = \frac{\partial u}{\partial y} - \lambda_j \frac{\partial u}{\partial x} + a_j u, \quad j = 1, ..., 2n, \tag{1.1}$$

где a_j и λ_j – комплексные постоянные такие, что

$$\operatorname{Im} \lambda_j < 0, \quad \operatorname{Im} \lambda_{n+j} > 0, \quad j = 1, ..., n,$$

$$\lambda_j \neq \lambda_k, \quad j \neq k, \quad k, j = 1, ..., 2n.$$

Будем считать, что все функции и постоянные суть комплекснозначные.

В области D рассмотрим следующую задачу Дирихле :

$$L_1 \cdots L_{2n} u(z) = 0, \quad z = x + iy \in D, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial^k u(z)}{\partial N^k} = f_k(z), \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \tag{1.3}$$

где $u(z)$ – искомая функция в области D, $f_k(z)$, $k = 0, 1, ..., n-1$ – заданные функции на Γ, а N – внутренняя нормаль к границе Γ в точке $z \in \Gamma$. Пусть s есть дуговая абсцисса точки $z \in \Gamma$. Предположим, что функции $\dfrac{d^j f_k(z)}{ds^j}$,

$j = 0, 1, ..., 2n - k$ непрерывны на Γ. Мы ищем решение задачи (1.2), (1.3) в классе функций $2n$-раз непрерывно дифференцируемых в области D и $(2n-1)$-раз непрерывно дифференцируемых в замкнутой области $\overline{D} = D \cup \Gamma$.

Задача (1.2), (1.3) в полуплоскости рассмотрена в монографии [1], стр. 45. В случае, когда $a_j = 0$, $j = 1, ..., 2n$, эта задача в односвязных областях рассмотрена в [1] - [3]. Наличие ненулевых постоянных a_j существенно осложняет исследование этой задачи. Эти осложнения связаны с единственностью представления через аналитические функции и произвольные постоянные общего решения уравнения (1.2) в односвязных или многосвязных областях (см. [3] - [5]).

В настоящей статье задача (1.2), (1.3) сводится к интегральному уравнению Фредгольма, и доказывается существование и единственность решения этой задачи для $n = 2$.

§2. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (1.2)

Пусть D_λ - образ области D при отображении

$$\zeta = x + \lambda y, \quad z = x + iy \in D, \quad \zeta = \xi + i\eta \in D_\lambda,$$

где λ - постоянная, $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$.

Сначала предположим, что D - односвязная область. Не умаляя общности будем предполагать, что $0 \in D$. Рассмотрим уравнение

$$L_1 \cdots L_\rho u(z) = 0, \quad z = x + iy \in D, \tag{2.1}$$

где ρ - натуральное число, $\rho \leq 2n$, а $L_1, ..., L_{2n}$ - операторы из (1.1).

Лемма 2.1. Общее решение уравнения (2.1) в односвязной области D определяется формулой

$$u(x, y) = \sum_{j=1}^{\rho} e^{-a_j y} \varphi_j(x + \lambda_j y), \tag{2.2}$$

где φ_j аналитичны в D_{λ_j} и удовлетворяют условиям

$$\varphi_j^{(k)}(0) = 0, \quad j = 2, ..., \rho, \quad k = 0, 1, ..., j-2, \tag{2.3}$$

причем функции $\varphi_1, ..., \varphi_\rho$ определяются по $u(z)$ единственным образом.

Доказательство : Легко проверить, что функция $e^{-a_j y}\varphi_j(x + \lambda_j y)$ является решением уравнения $L_j u = 0$. Так как операторы $L_1, ..., L_{2n}$ перестановочны, то эта функция является решением уравнения (2.1). Следовательно, любая функция вида (2.2) является решением уравнения (2.1).

Теперь, применяя индукцию по ρ докажем, что любое решение уравнения (2.1) представляется в виде (2.2). Уравнение (2.1) при $\rho = 1$ имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x} + a_1 u = 0. \tag{2.4}$$

Уравнение (2.4) можно записать в виде

$$\frac{\partial v}{\partial y} - \lambda_1 \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad v(z) = e^{a_1 y} u(z). \tag{2.5}$$

Известно (см. [2], стр. 134), что общее решение уравнения (2.5) определяется формулой

$$v(z) = \varphi_1(x + \lambda_1 y), \quad z = x + iy \in D, \tag{2.6}$$

где φ_1 – произвольная аналитическая функция в D_{λ_1}. Из (2.5) и (2.6) имеем

$$u(z) = e^{-a_1 y} \varphi_1(x + \lambda_1 y), \quad z = x + iy, \tag{2.7}$$

откуда следует представление (2.2) для $\rho = 1$. Предполагая, что представление (2.2) верно для $\rho = m$, докажем, что оно верно для $\rho = m + 1$. Пусть $u_0(z)$ – решение уравнения (2.1) при $\rho = m + 1$. Тогда имеем

$$L_2 \cdots L_{m+1} v(z) = 0, \quad v(z) = L_1 u_0(z). \tag{2.8}$$

Так как $v(z)$ – решение уравнения (2.8) и (2.2) верно для $\rho = m$, то

$$v(x, y) = \sum_{j=2}^{m+1} e^{-a_j y} \varphi_j(x + \lambda_j y), \tag{2.9}$$

где функции φ_j аналитичны в D_{λ_j} и удовлетворяют условиям (2.3) при $j > 2$. Заметим, что при $m = 1$ условие (2.3) отсутствует. Подставляя $v(z)$ из (2.9) в (2.8), получим

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} - \lambda_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + a_1 u_0 = \sum_{j=2}^{m+1} e^{-a_j y} \varphi_j(x + \lambda_j y).$$

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение

$$\frac{\partial u_j}{\partial y} - \lambda_1 \frac{\partial u_j}{\partial x} + a_1 u_j = e^{-a_j y} \varphi_j(x + \lambda_j y). \tag{2.10}$$

Частное решение уравнения (2.10) ищем в виде

$$u_j(z) = e^{-a_j y}\psi_j(x + \lambda_j y), \quad z = x + iy, \tag{2.11}$$

где ψ_j – аналитическая функция в D_{λ_j}. Подставляя $u_j(z)$ из (2.11) в (2.10), получим

$$\psi_j'(\zeta) - v_j\psi_j(\zeta) = \frac{\varphi_j(\zeta)}{\lambda_j - \lambda_1}, \quad \zeta \in D_{\lambda_j}, \tag{2.12}$$

где $v_j = \frac{a_j - a_1}{\lambda_j - \lambda_1}$.

Частное решение уравнения (2.12) определяется формулой

$$\psi_j(\zeta) = \frac{1}{\lambda_j - \lambda_1} e^{v_j\zeta} \int_0^\zeta e^{-v_j t}\varphi_j(t)\,dt. \tag{2.13}$$

Из (2.3) и (2.13) имеем

$$\psi_j^{(k)}(0) = 0, \quad j = 2, \dots, m+1, \quad k = 0, 1, \dots, j-2. \tag{2.14}$$

Из формул (2.7) и (2.11) имеем

$$u_0(z) = \sum_{j=1}^{m+1} e^{-a_j y}\psi_j(x + \lambda_j y),$$

откуда следует представление (2.2) для $\rho = m+1$. Таким образом, представление (2.2) доказано для любого натурального числа $\rho \le 2n$.

Теперь докажем единственность представления (2.2). Достаточно показать, что если $u(z) \equiv 0$ в представлении (2.2), то $\varphi_j(x + \lambda_j y) \equiv 0$ для любого $j = 1, \dots, \rho$. Предположим, что $u(z) \equiv 0$. Применяя оператор $L_1 \cdots L_{\rho-1}$ к обеим частям (2.2), получим

$$\varphi_\rho^{(\rho-1)}(\zeta) + \sum_{k=0}^{\rho-2} A_k \varphi_\rho^{(k)}(\zeta) = 0, \quad \zeta \in D_{\lambda_\rho}, \tag{2.15}$$

где $A_0, \dots, A_{\rho-2}$ – некоторые постоянные. Из (2.3) и (2.15) при $j = \rho$ получим $\varphi_\rho(x + \lambda_\rho y) \equiv 0$. Аналогично получим $\varphi_j(x + \lambda_j y) \equiv 0$ при $j = 1, \dots, \rho - 1$. Лемма 2.1 доказана.

Пусть теперь D – $(m+1)$-связная область на плоскости, ограниченная гладкими кривыми $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_m$. Предположим, что Γ_0 охватывают контуры $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$. Пусть $z_1, \dots, z_m$ – фиксированные точки, охваченные контурами $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$, соответственно. Общее решение уравнения (2.1) в многосвязных областях отличается от формулы (2.2) некоторыми произвольными постоянными, число которых зависит как от числа m, так и от порядка уравнения (2.1). Здесь мы приведем общее решение уравнения (2.1) в многосвязной области при $\rho = 2$, $\operatorname{Im}\lambda_1 < 0$ и $\operatorname{Im}\lambda_2 > 0$.

Лемма 2.2. Если $\rho = 2$, $\operatorname{Im}\lambda_1 < 0$ и $\operatorname{Im}\lambda_2 > 0$, то общее решение уравнения (2.1) в $(m+1)$-связной области D определяется формулой

$$u(x,y) = e^{-a_1 y}\varphi_1(x+\lambda_1 y) + e^{-a_2 y}\varphi_2(x+\lambda_2 y) +$$

$$+e^{v_2 x+\delta y}\sum_{k=1}^{m} c_k \ln[(x+\lambda_1 y - x_k - \lambda_1 y_k)(x+\lambda_2 y - x_k - \lambda_2 y_k)]. \qquad (2.16)$$

где $\delta = \frac{a_1\lambda_2 - a_2\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}$, v_2 определяется через (2.12), c_k, $k = 1,...,m$ – произвольные постоянные, φ_1 и φ_2 – произвольные аналитические функции в D_{λ_1} и D_{λ_2}, соответственно, и $\varphi_2(0) = 0$. Постоянные $c_1,...,c_m$ и функции φ_1, φ_2 определяются через $u(z)$ единственным образом.

В (2.16) берем одну из непрерывных в области D ветвей логарифма. Так как $\operatorname{Im}\lambda_1$ и $\operatorname{Im}\lambda_2$ имеют разные знаки, то такая ветвь всегда существует. Доказательство Леммы 2.2 аналогично доказательству Леммы 2.1, поэтому оно опускается.

§3. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ $n = 2$

В этом параграфе исследуется задача (1.2), (1.3) в случае, когда D – односвязная область и $n = 2$. В этом случае задача (1.2), (1.3) имеет вид

$$L_1L_2L_3L_4u(z) = 0, \quad z \in D. \qquad (3.1)$$

$$u(z) = f_0(z), \quad z \in \Gamma, \qquad (3.2)$$

$$\frac{\partial u(z)}{\partial N} = f_1(z), \quad z \in \Gamma, \qquad (3.3)$$

где L_j, $j = 1,2,3,4$ – дифференциальные операторы из (1.1), причем

$$\operatorname{Im}\lambda_1 < 0, \quad \operatorname{Im}\lambda_2 < 0, \quad \operatorname{Im}\lambda_3 > 0, \quad \operatorname{Im}\lambda_4 > 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \lambda_3 \neq \lambda_4. \qquad (3.4)$$

Условие (3.2) эквивалентно условию

$$\frac{du(z)}{ds} + u(z) = \frac{df_0(z)}{ds} + f_0(z), \quad z \in \Gamma. \qquad (3.5)$$

Обозначим через (N,x) и (N,y) углы между внутренней нормалью N в точке $z \in \Gamma$ и осями OX и OY, соответственно. Так как

$$\frac{\partial u}{\partial N} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(N,x) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(N,y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(N,y) - \frac{\partial u}{\partial y}\cos(N,x), \qquad \cos^2(N,y) + \cos^2(N,x) = 1,$$

то условия (3.3) и (3.5) можно записать в виде

$$\frac{du(z)}{dx}+\alpha_1(z)u(z)=g_1(z),\quad z\in\Gamma, \tag{3.6}$$

$$\frac{du(z)}{dy}+\alpha_2(z)u(z)=g_2(z),\quad z\in\Gamma, \tag{3.7}$$

где $\alpha_1(z)=\cos(N,y)$, $\alpha_2(z)=-\cos(N,x)$,

$$g_1(z)=f_1(z)\cos(N,x)+f_2(z)\cos(N,y),$$

$$g_2(z)=f_1(z)\cos(N,y)-f_2(z)\cos(N,x),\quad f_2(z)=\frac{df_0(z)}{ds}+f_0(z).$$

Согласно Лемме 2.1, общее решение уравнения (3.1) определяется формулой

$$u(z)=\sum_{j=1}^{4}e^{-a_j y}\varphi_j(x+\lambda_j y),\quad z=x+iy, \tag{3.8}$$

где $\varphi_1,\dots,\varphi_4$ – аналитичные функции в $D_{\lambda_1},\dots,D_{\lambda_4}$, соответственно, удовлетворяющие условиям

$$\varphi_2(0)=0,\quad \varphi_3(0)=0,\quad \varphi_3'(0)=0, \tag{3.9}$$

$$\varphi_4(0)=0,\quad \varphi_4'(0)=0,\quad \varphi_4''(0)=0. \tag{3.10}$$

Используя граничные условия (3.6) и (3.7), запишем общее решение (3.8) в более удобном виде. Функцию φ_1 представим в виде

$$\varphi_1(x+\lambda_1 y)=c+\psi_1(x+\lambda_1 y), \tag{3.11}$$

где c – постоянная, а ψ_1 – аналитическая функция в D_{λ_1}, удовлетворяющая условию $\psi_1(0)=0$. Ясно, что в (3.11) постоянная c и функция ψ_1 определяются через φ_1 единственным образом. Положим

$$\psi_4(x+\lambda_4 y)=c(x+\lambda_4 y)^2+\varphi_4(x+\lambda_1 y), \tag{3.12}$$

где c – постоянная из (3.11). Ясно, что ψ_4 аналитична в D_{λ_4}. Из (3.10) получим

$$\psi_4(0)=0,\quad \psi_4'(0)=0. \tag{3.13}$$

Так как $\varphi_4''(0)=0$, то из (3.12) получим $c=\frac{1}{2}\psi_4''(0)$. Подставляя c в (3.11) и (3.12), получим

$$\begin{aligned}\varphi_1(x+\lambda_1 y)&=\frac{1}{2}\psi_4''(0)+\psi_1(x+\lambda_1 y),\\ \varphi_4(x+\lambda_4 y)&=\psi_4(x+\lambda_4 y)-\frac{1}{2}\psi_4''(0)(x+\lambda_4 y)^2.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Если функция ψ_4 удовлетворяет (3.13), то функция φ_4, определенная формулой (3.14), удовлетворяет условиям (3.10). Следовательно, функции φ_1 и φ_4 в (3.8) допускают представление (3.14), где ψ_1 и ψ_4 – произвольные аналитические функции в D_{λ_1} и D_{λ_4}, соответственно, удовлетворяющие условиям $\psi_1(0) = 0$ и (3.13).

Отметим, что в (3.14) функции ψ_1 и ψ_2 определяются через φ_1 и φ_2 единственным образом по формуле

$$\psi_1(x + \lambda_1 y) = \varphi_1(x + \lambda_1 y) - \varphi_1(0),$$
$$\psi_4(x + \lambda_4 y) = \varphi_4(x + \lambda_4 y) + \frac{1}{2}\varphi_1(0)(x + \lambda_4 y)^2.$$

Положим

$$\psi_2 = \varphi_2, \quad \psi_3 = \varphi_3, \quad \omega_j(x + \lambda_j y) = \psi_j'(x + \lambda_j y), \quad j = 1, 2, 3, 4. \tag{3.15}$$

Из (3.9), (3.13) и (3.15) следует, что $\omega_1, ..., \omega_4$ – аналитические функции в D_{λ_1}, ..., D_{λ_4}, соответственно, а

$$\omega_3(0) = 0, \quad \omega_4(0) = 0, \tag{3.16}$$

$$\psi_j(x + \lambda_j y) = \int_0^{x+\lambda_j y} \omega_j(\zeta)\, d\zeta, \quad j = 1, 2, 3, 4. \tag{3.17}$$

В частности, из (3.17) следует $\psi_4''(0) = \omega_4'(0)$. Подставляя ψ_j из (3.17) в (3.14) и (3.15), получим

$$\varphi_1(x + \lambda_1 y) = \int_0^{x+\lambda_1 y} \omega_1(\zeta)\, d\zeta + \frac{1}{2}\omega_4'(0), \quad \varphi_2(x + \lambda_2 y) = \int_0^{x+\lambda_2 y} \omega_2(\zeta)\, d\zeta,$$

$$\varphi_3(x+\lambda_3 y) = \int_0^{x+\lambda_3 y} \omega_3(\zeta)\, d\zeta, \quad \varphi_4(x+\lambda_4 y) = \int_0^{x+\lambda_4 y} \omega_4(\zeta)\, d\zeta - \frac{1}{2}\omega_4'(0)(x+\lambda_4 y).$$

Отсюда и из (3.8) получим

$$u(z) = \sum_{j=1}^{4} e^{-a_j y} \int_0^{x+\lambda_j y} \omega_j(\zeta)\, d\zeta + \frac{1}{2}e^{-a_1 y}\omega_4'(0) - \frac{1}{2}e^{-a_4 y}\omega_4'(0)(x + \lambda_4 y)^2. \tag{3.18}$$

Следовательно, общее решение уравнения (3.1) определяется также формулой (3.18), где $\omega_1, ..., \omega_4$ – произвольные аналитические функции в D_{λ_1}, ..., D_{λ_4} соответственно, удовлетворяющие условию (3.16). Кроме того, эти функции определяются через $u(z)$ единственным образом.

Подставляя $u(z)$ из (3.18) в граничные условия (3.6) и (3.7), получим

$$\sum_{j=1}^{4}\left[e^{-a_j y}\omega_j(x+\lambda_j y)+A_{j1}(z)\int_0^{x+\lambda_j y}\omega_j(\zeta)\,d\zeta\right]+B_1(z)\omega_4'(0)=g_1(z),\quad z\in\Gamma, \tag{3.19}$$

$$\sum_{j=1}^{4}\left[\lambda_j e^{-a_j y}\omega_j(x+\lambda_j y)+A_{j2}(z)\int_0^{x+\lambda_j y}\omega_j(\zeta)\,d\zeta\right]+B_2(z)\omega_4'(0)=g_2(z),\quad z\in\Gamma, \tag{3.20}$$

где A_{jk} и B_k, $k=1,2$, $j=1,2,3,4$ - некоторые вполне определенные достаточно гладкие функции. Таким образом, задачу Дирихле (3.1) – (3.3) свели к односторонней задаче Гильберта (3.19, (3.20) с дополнительным условием (3.16). Задача (3.19), (3.20) полностью исследована в [6], стр. 239. Используя методы из работы [6], задачу (3.19), (3.20) с дополнительным условием (3.16) можно свести к эквивалентному интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

Предположим теперь, что в (1.2) $n\geq 3$. Тогда аналогично, граничные условия (1.3) можно записать в виде

$$\frac{\partial^{n-1}u(z)}{\partial x^k\partial y^{n-1-k}}+\sum_{k+j\leq n-2}b_{jk}(z)\frac{\partial^{k+j}u(z)}{\partial x^k\partial y^j}=g_k(z),\quad z\in\Gamma,\quad k=0,1,...,n-1, \tag{3.21}$$

где b_{jk} и g_k – некоторые вполне определенные функции на Г. Используя общее представление (2.2) при $\rho=2n$ аналогично, задачу (1.2), (3.21) можно свести к интегральному уравнению Фредгольма.

ABSTRACT. The paper considers Dirichlet problem for elliptic equations $Lu=0$, where $L=L_1\cdots L_{2n}$ is a product of first order differential operators with constant coefficients. The paper reduces the problem to Fredholm integral equation. The existence and uniqueness of solution is proved for $n=2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. E. Tovmasian, Non-Regular Differential Equations and Calculations in Electromagnetic Field, World Scientific Publ., Singapore, 1998.
2. N. E. Tovmasian, Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications in Electrodynamics, World Scientific Publ., Singapore, 1994.
3. А. В. Бицадзе, Краевые Задачи для Эллиптических Уравнений Второго Порядка, Наука, Москва, 1966.
4. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные Интегральные Уравнения, Наука, Москва, 1962.
5. И. Н. Векуа, Новые Методы Решения Эллиптических Уравнений, Гостехиздат, Москва, 1948.
6. Н. П. Векуа, Системы Сингулярных Интегральных Уравнений, Наука Москва, 1970.

21 сентября 2000

Армянский государственный инженерный университет