

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ОБЩИХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

Г. Г. Геворкян, М. П. Погосян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 35, № 5, 2000

Вопросы единственности ортогональных рядов остаются одними из важнейших вопросов в теории ортогональных рядов. Основной литературой в этом направлении являются работы [1 – 12]. Известно, что для тригонометрической системы существует ряд, который п.в. сходится к нулю, и при этом не все коэффициенты равны нулю [11]. Возникает следующий вопрос : при каких дополнительных условиях из п.в. сходимости ряда к нулю следует, что все коэффициенты равны нулю.

В [3] доказано, что если для ряда по тригонометрической системе имеет место равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \mu \{x : S^*(x) > \lambda\} = 0, \quad (*)$$

где $S^*(x)$ – мажоранта ряда, то из п.в. сходимости к нулю частичных сумм этого ряда следует, что все коэффициенты равны нулю. Это утверждение было доказано для систем Хаара, Уолша, Радемахера и Фраяклина. Возникает вопрос : можно ли обобщить это утверждение для рядов по произвольным ортонормированным системам ? В настоящей заметке доказывается, что такое обобщение невозможно, а конкретно, доказывается следующее утверждение.

Теорема 1. Для любой функции $\varphi(x)$, $x \in (0, 1)$, удовлетворяющей условиям

1° $\varphi(x) \geq 0$, $x \in (0, 1)$,

2° $\varphi(x)$ убывает на $(0, 1)$,

3° $\int_0^1 \varphi(x) dx = +\infty$,

существуют ортогональная система $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ на $[0, 1]$ и последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ такие, что

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| > 0. \quad (1)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n f_n(x) = 0 \quad \text{п.в. на } [0, 1], \quad (2)$$

$$\mu\{x \in [0, 1] : S^*(x) > \lambda\} \leq \mu\{x \in [0, 1] : \varphi(x) > \lambda\}, \quad (3)$$

где $S^*(x) := \sup_N \left| \sum_{n=0}^N a_n f_n(x) \right|$ — мажоранта ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n f_n(x)$.

Доказательство : Будем определять функции $f_n(x)$ по индукции. Пусть $a_0 f_0(x) = a_0^{(1)} f_0^{(1)}(x) \equiv 1/2 \cdot \varphi(1/2)$ (функция ранга 0),

$$a_1 f_1(x) = a_1^{(1)} f_1^{(1)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \varphi\left(\frac{1}{2}\right), & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \cdot \varphi\left(\frac{1}{2}\right), & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

(функция ранга 1). Тогда

$$S^{(0)}(x) := a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) = \begin{cases} \varphi\left(\frac{1}{2}\right), & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Интервал $[0, 1/2]$ назовем интервалом порядка 1 и обозначим через $I_1^{(1)} := [0, 1/2]$.

Функцию $a_2 f_2(x) = a_2^{(1)} f_2^{(1)}(x)$ определим следующим образом : пусть $a_2 f_2(x) = 0$ при $x \notin I_1^{(1)}$, $a_2 f_2(x) = -S^{(0)}(x)$ на правой половине $I_1^{(1)}$, а на левой половине $a_2 f_2(x)$ определим кусочно-постоянным на конечном числе интервалов так, что

$$\int_0^1 a_2 f_2(x) dx = \int_{I_1^{(1)}} a_2 f_2(x) dx = 0,$$

$$\mu\{x \in [0, 1] : S^{(0)}(x) + a_2 f_2(x) > \lambda\} \leq \mu\{x \in [0, 1] : \varphi(x) > \lambda\}$$

при $\lambda \geq \varphi(1/2)$. Так как $\int_0^1 \varphi(x) dx = +\infty$, то этого всегда можно достичь.

Интервалы постоянства функции $S^{(1)} := S^{(0)} + a_2 f_2(x)$ назовем интервалами порядка 2, а функцию $a_2 f_2(x)$ назовем функцией ранга 2.

Пусть построены функции ранга меньше n , обладающие свойствами :

функции $f_k^{(i)}$ и $f_m^{(j)}$ ортогональны при $(k, i) \neq (m, j)$;

функция $f_k^{(i)}$ кусочно-постоянна на конечном числе интервалов;

для функции $S^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(i)} f_k^{(i)}$ имеем $\mu\{x \in [0, 1] : S^{(n)}(x) > \lambda\} \leq \mu\{x \in [0, 1] : \varphi(x) > \lambda\}$.

Интервалы постоянства функции $S^{(n)}$ назовем интервалами порядка $n-1$ и обозначим их через $I_{n-1}^{(i)}$, $i = 1, \dots, k_{n-1}$, занумеровав слева направо. Положим $M = \max_{x \in [0,1]} S^{(n)}(x)$. Тогда определим функцию $f_n^{(i)}(x)$ и число $a_n^{(i)}$, $i = 1, \dots, k_{n-1}$ следующим образом: пусть $a_n^{(i)} f_n^{(i)}(x) = 0$ при $x \notin I_{n-1}^{(i)}$, $a_n^{(i)} f_n^{(i)}(x) = -S^{(n)}(x)$ на правой половине $I_{n-1}^{(i)}$, а на левой половине $a_n^{(i)} f_n^{(i)}(x)$ определим кусочно-постоянным на конечном числе интервалов так, что

$$\int_0^1 a_n^{(i)} f_n^{(i)}(x) dx = \int_{I_{n-1}^{(i)}} a_n^{(i)} f_n^{(i)}(x) dx = 0,$$

$$S^{(n)}(x) + a_n^{(i)} f_n^{(i)}(x) > M \quad \text{при} \quad x \in \text{supp } f_n^{(i)}(x) \cap I_{n-1,1}^{(i)},$$

$$\mu\{x \in I_{n-1}^{(i)} : S^{(n)}(x) + a_n^{(i)} f_n^{(i)}(x) > \lambda\} \leq \frac{1}{k_{n-1}} \mu\{x \in [0,1] : \varphi(x) > \lambda\}$$

при $\lambda \geq M$, где $I_{n-1,1}^{(i)}$ — левая половина интервала $I_{n-1}^{(i)}$. Можно выбрать $f_n^{(i)}(x)$ и $a_n^{(i)}$, удовлетворяющие приведенным условиям, так как $\int_{\{x: \varphi(x) > M\}} \varphi(x) dx = +\infty$. Если переenumerовать функции последовательности $\{a_n^{(i)} f_n^{(i)}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ последовательно, то для полученной последовательности $\{a_n f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ будут выполняться свойства (1) – (3). Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Г. Геворкян, "Мажоранта и единственность рядов по системе Фрэнклина", Мат. Заметки, том 59(4), стр. 521 — 545, 1996.
2. Г. Г. Геворкян, "О единственности рядов по системе Франклина", Мат. Заметки, том 46(2), стр. 51 — 58, 1989.
3. Г. Г. Геворкян, "О единственности тригонометрических рядов", Мат. Сборник, том 180(11), стр. 1462 — 1474, 1989.
4. Г. Г. Геворкян, "О единственности кратных тригонометрических рядов", Мат. Сборник, том 184(11), стр. 93 — 130, 1993.
5. С. Ш. Галстян, "О единственности аддитивных функций сегмента и тригонометрических рядов", Мат. Заметки, том 56(4), стр. 38, 1994.
6. Ф. Г. Арутюнян, "О единственности рядов по системе Хаара", Докл. АН СССР, том 38, № 3, стр. 129 — 134, 1964.
7. Ф. Г. Арутюнян, А. А. Талалян, "О единственности рядов по системе Уолша и Хаара", Изв. АН СССР, Математика, том 28, стр. 1391 — 1408, 1964.
8. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные Ряды, Наука, Москва, 1984.
9. Г. Г. Геворкян, "О представлении и единственности измеримых функций мартингалами", ДАН Арм. ССР, том 74(3), стр. 113 — 117, 1982.
10. Г. Г. Геворкян, "О единственности рядов по центрированным H -системам", Acta Math. Acad. Sci. Hung., vol. 40(1-2), 1982.
11. Н. К. Бари, Тригонометрические Ряды, Физматгиз, Москва, 1961.
12. А. Зигмунд, Тригонометрические Ряды, том 1, Мир, Москва, 1965.