НАИЛУЧШЕЕ КВАДРАТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ МНОГОЧЛЕНАМИ

А. Л. Григорян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 35, № 5, 2000

В статье рассматривается одна из задач теории приближения функций. Пусть $W'_\alpha(\tau > 0, \alpha \in \mathbb{R})$ – класс периодических, непрерывных функций $f(x)$, представимых в виде свёртки $f(x) = c + \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} D^1(t) \varphi(t) dt$,

где $D^1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\tau} \cos(kt + \alpha\pi/2)$, а измеримая, периодическая функция

$\varphi(t)$ удовлетворяет условиям $\sup_t |\varphi(t)| \leq 1$ и $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) dt = 0$. В настоящей работе приближение берётся по тригонометрическим многочле-

нам $T_m(x, f) = \frac{2}{q} \sum_{l=0}^{q-1} f(x_l) \mathcal{D}(x - x_l)$, где $m, q > 2m$ являются натуральными,

$\{x_l\} = \{2\pi l/q\}$, и $\mathcal{D}_m(t)$ – ядро Дирихле. Доказано, что асимптотическое поведение величин $C_m(x, \tau) = \sup_{f \in W'_\alpha} |f(x) - T_m(x, f)|$ зависит от арифмети-

ческого характера предела $\beta = \lim_{m \rightarrow \infty} m/q$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $W'_\alpha(\tau > 0, \alpha \in \mathbb{R})$ – класс периодических непрерывных функций $f(x)$, представимых в виде свертки

$$f(x) = c + \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} D^1(t) \varphi(t) dt,$$

где $D^1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\tau} \cos(kt + \alpha\pi/2)$, а $\varphi(t)$ – измеримая периодическая функция, удовлетворяющая условиям

$$\sup_t |\varphi(t)| \leq 1 \quad \text{и} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) dt = 0. \quad (1)$$

В статье рассматриваются тригонометрические многочлены

$$T_m(x, f) = \frac{2}{q} \sum_{l=0}^{q-1} f(x_l) \mathcal{D}(x - x_l),$$

где $m, q > 2r$ — натуральные числа, $\{x_l\} = \{\frac{2\pi l}{q}\}$ и $\mathcal{D}_m(t)$ — ядро Дирихле.

Одна из важных задач теории приближений является асимптотическое поведение верхней грани $C_m(x, r, \alpha) = \sup_{f \in W_r^*} |f(x) - T_m(x, f)|$. А. Н. Колмогоров [1] доказал, что если $T_m(x)$ является частичной суммой Фурье порядка m , то для функции $f \in W_r^*$ имеет место следующая точная асимптотическая оценка:

$$C_m(x, r, \alpha) = \frac{4}{\pi^2} \frac{\ln m}{m} + O(m^{-r}). \quad (2)$$

М. Д. Калашников и Г. П. Губанов (см. [2], [3]) получили асимптотическую формулу для $f \in W_r^*$ при дополнительном условии, что $2m+1$ является делителем для q . В настоящей статье получена асимптотическая формула для $C_m(x, r, \alpha)$ без этого дополнительного условия.

В данной работе доказано, что аналог соотношения (2) для $C_m(x, r, \alpha)$ зависит от арифметического характера предела $\beta = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{q}$. А именно, если $\beta = 0$ или иррационально, то $C_m(x, r, \alpha)$ обладает пределом вида (2) и он вычисляется, а если $\beta \neq 0$ — рациональное число, то для $C_m(x, r, \alpha)$ предел (2) не существует. Однако, если $\beta \neq 0$ рационально, получены нижний и верхний пределы последовательности $\frac{m^r}{\ln m} C_m(x, r, \alpha)$ и показано, что любое число между двумя значениями является предельной точкой этой последовательности. Ясно, что величина $C_m(x, r, \alpha)$ имеет период $2\pi/q$, и поэтому мы будем изучать величину $C_m(x, r, \alpha)$ при $x \in [0, 2\pi/q]$. Основными результатами этой статьи являются следующие две теоремы.

Теорема 1. При $r > 1$ справедлива асимптотическая формула

$$C_m(x, r, \alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \gamma(t, x, m, \alpha) - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\cos((nq-j)t + jx + \alpha\pi/2)}{(nq-j)^r} + \frac{\cos((nq+j)t - jx + \alpha\pi/2)}{(nq+j)^r} \right) \right| dt + O(m^{-r}),$$

где остаточный член равномерно ограничен по m, q, x, α и

$$\gamma(t, x, m, \alpha) = \sum_{k=mn+1}^{\infty} k^{-r} \cos((t-x)k + \alpha\pi/2).$$

При условии $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{q} = \beta \neq 0$ обозначим

$$A(t, \alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sin(nt + t + \alpha\pi/2 - \beta t)}{(n+1-\beta)^r} - \frac{\sin(nt + \beta t + \alpha\pi/2)}{(n+\beta)^r} \right),$$

$$B(t, \alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\cos(nt + t + \alpha\pi/2 - \beta t)}{(n+1-\beta)^r} + \frac{\cos(nt + \beta t + \alpha\pi/2)}{(n+\beta)^r} \right),$$

$$N(t, \alpha, \beta) = (A^2(t, \alpha, \beta) + B^2(t, \alpha, \beta))^{1/2}, \quad \varphi(t, \alpha, \beta) = \arccos \frac{B(t, \alpha, \beta)}{N(t, \alpha, \beta)},$$

$$M(\alpha, \beta) = \frac{\beta^r}{\pi^3} \int_0^{2\pi} N(t, \alpha, \beta) \left(1 - 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\cos 2s\varphi}{4s^2 - 1} \right) dt.$$

$$A_1(\alpha, \beta) = M(\alpha, \beta) + M(-\alpha, \beta), \quad A_2(\alpha, \beta) = \frac{\beta^r}{\pi^3} \int_0^{2\pi} (N(t, \alpha, \beta) + N(t, -\alpha, \beta)) dt.$$

где * означает, что $2vs \equiv 0 \pmod{p}$, $s, p \in \mathbb{N}$.

Теорема 2. Пусть $r > 1$. Тогда

а) если $\beta = 0$, то $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{C_m(0, W_r^0)}{m^{-r} \ln m} = \frac{4}{\pi^2}$,

б) если $\beta \in [0, 1/2]$ иррационально, то $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{C_m(0, W_\alpha^r)}{m^{-r} \ln m} = A_2(\alpha, \beta)$,

г) если $\beta = s/p \in [0, 1/2]$, $s, p \in \mathbb{N}$, $(s, p) = 1$, то

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{C_m(0, W_\alpha^r)}{m^{-r} \ln m} \geq A_1(\alpha, \beta), \quad \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{C_m(0, W_\alpha^r)}{m^{-r} \ln m} \leq A_2(\alpha, \beta),$$

и для любого $\gamma \in [A_1(\alpha, \beta), A_2(\alpha, \beta)]$ существуют $m_n, q_n \in \mathbb{N}$ такие, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n}{q_n} = s/p \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_{m_n}(0, W_\alpha^r)}{m_n^{-r} \ln m_n} = \gamma.$$

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1 И 2

Доказательство Теоремы 1 : Так как $T_m(x, S_m(x, f)) = S_m(x, f)$, то получим

$$f(x) - T_m(x, f) = f(x) - S_m(x, f) - T_m(x, f - S_m) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_m(x, t) \varphi(t) dt, \quad (3)$$

где

$$G_m(x, t) = \gamma(t, x, m, \alpha) - \frac{2}{q} \sum_{l=0}^{q-1} D_{r, \alpha}^{m+1}(t - x_l) D_m(x - x_l). \quad (4)$$

Из (3) следует, что

$$C_m(x, W_\alpha^r) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |G_m(x, t)| dt. \quad (5)$$

С другой стороны, легко видеть, что 2π -периодическая функция

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} \text{sign} G_m(x, t), & \text{при } |t| \leq \frac{\pi}{2}, \\ -\varphi_0(t - \pi), & \text{при } \frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

удовлетворяет условиям (1) и следовательно

$$\begin{aligned} C_m(x, W_\alpha^r) &\geq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_m(x, t) I_0(t) dt \geq \\ &\geq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |G_m(x, t)| dt - \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2 \leq |t| \leq \pi} |G_m(x, t)| dt. \end{aligned} \quad (6)$$

Докажем, что

$$\int_{\pi/2 \leq |t| \leq \pi} |G_m(x, t)| dt = O(m^{-r}) \quad (7)$$

равномерно по m, q, x, α . Используя преобразование Абеля, получим (см. [5])

$$\begin{aligned} \int_{\pi/2 \leq |t| \leq \pi} \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\cos((t-x)k + \alpha\pi/2)}{k^r} \right| dt &\leq \\ &\leq 2 \sum_{k=m+1}^{\infty} (k^{-r} - (k+1)^{-r}) \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dt}{\sin \frac{t-x}{2}} = C m^{-r}. \end{aligned} \quad (8)$$

Имеем также

$$\begin{aligned} I_m(t, x) &\equiv \frac{2}{q} \sum_{k=m+1}^{\infty} k^{-r} \sum_{l=0}^{q-1} \cos((t-x_l)k + \alpha\pi/2) D_m(x-x_l) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^m \frac{\cos((nq-j)t + jx - \alpha\pi/2)}{(nq-j)^r} + \sum_{j=1}^m \frac{\cos((nq+j)t - jx + \alpha\pi/2)}{(nq+j)^r} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Применяя преобразование Абеля, находим

$$\begin{aligned} \int_{\pi/2 \leq |t| \leq \pi} \left| \sum_{j=0}^m \frac{\cos(j(x-t) + nqt + \alpha\pi/2)}{(nq-j)^r} \right| dt &\leq \\ &\leq \left(\frac{1}{(nq-1)^r} - \frac{1}{(nq-m+1)^r} + \frac{1}{(nq-m)^r} + \frac{1}{(nq)^r} \right) C. \end{aligned} \quad (10)$$

Следовательно, из (9), (10) получаем

$$\int_{\pi/2 \leq |t| \leq \pi} |I_m(t, x)| dt \leq C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(nq-m)^r}, \quad (11)$$

т.е. оценку (7). Доказательство завершено.

Доказательство Теоремы 2 : Из Теоремы 1 следует, что

$$\begin{aligned} C_m(0, W_\alpha^r) &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\gamma(t, 0, m, \alpha)| dt + H_m^r(\alpha) + O(m^{-r}), \\ C_m(0, W_\alpha^r) &\geq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\gamma(t, 0, m, \alpha)| dt - H_m^q(\alpha) + O(m^{-r}), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$H_m^q(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^m \frac{\cos(jt - nqt - \alpha\pi/2)}{(nq - j)^r} + \frac{\cos(jt + nqt + \alpha\pi/2)}{(nq + j)^r} \right| dt.$$

Докажем, что

$$H_m^q(\alpha) = O(q^{-r} \ln m). \quad (13)$$

Полагая $a_j = (nq - j)^{-r}$, $b_j = (nq + j)^{-r}$, $\Delta a_j = a_j - a_{j+1}$, $B_m^q(n, t) = \sum_{j=1}^m (a_j \cos(jt - \tau) + b_j \cos(jt + \tau))$, $\tau = nqt + \alpha\pi/2$, $\Delta b_j = b_j - b_{j+1}$ и применяя преобразование Абеля, получим

$$\begin{aligned} B_m^q(n, t) &= \sum_{j=1}^{m-1} \Delta a_j \frac{\sin((j + 1/2)t - \tau) - \sin(t/2 - \tau)}{2 \sin t/2} + \\ &+ a_m \frac{\sin((m + 1/2)t - \tau) - \sin(t/2 - \tau)}{2 \sin t/2} + \\ &+ \sum_{j=1}^{m-1} \Delta b_j \frac{\sin((j + 1/2)t + \tau) - \sin(t/2 + \tau)}{2 \sin t/2} + \\ &+ b_m \frac{\sin((m + 1/2)t + \tau) - \sin(t/2 + \tau)}{2 \sin t/2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Заметим, что $\int_{|t| \leq \pi/m} |\sum_{n=1}^{\infty} B_m^q(n, t)| dt = O(q^{-r})$ и $\int_{\pi/m}^{\pi} \frac{dt}{\sin t/2} = O(\ln m)$.

Таким образом, из (14) получим (13).

Пункт а) вытекает из (12), (13) и теоремы С. А. Теляковского (см. [5], стр. 293).

Для доказательства пунктов б) и с) получим асимптотическую формулу для величины $C_{T_m}(O, W_{\alpha}^r)$. Заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((nq - j)t + \alpha\pi/2)}{(nq - j)^r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((nq + (q - j))t + \alpha\pi/2)}{(nq + (q - j))^r},$$

и

$$\sum_{j=1}^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((nq + (q - j))t + \alpha\pi/2)}{(nq + (q - j))^r} = \sum_{j=q-m}^{q-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((nq + j)t + \alpha\pi/2)}{(nq + j)^r},$$

следовательно, из Теоремы 1 получим

$$C_{T_m}(O, W_{\alpha}^r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j=m+1}^{q-m-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((nq + j)t + \alpha\pi/2)}{(nq + j)^r} \right| dt + O(m^{-r}).$$

Так как

$$\int_{|t| \leq 2\pi/q} \left| \sum_{j=m+1}^{q-m-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((nq + j)t + \alpha\pi/2)}{(nq + j)^r} \right| dt = O(m^{-r}),$$

то получим требуемую формулу

$$C_m(0, W_\alpha^r) = \Gamma_m(\alpha) + \gamma_m(-\alpha) + O(m^{-r}), \quad (15)$$

где

$$\Gamma_m(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{2\pi/q}^{\pi} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=m+1}^{q-m-1} \frac{\cos(jt + nqt + \alpha\pi/2)}{(nq + j)^r} \right| dt.$$

Дважды применяя преобразование Абеля, получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=m+1}^{q-m-1} \frac{\cos(jt + \tau)}{(nq + j)^r} &= \frac{1}{4 \sin^2 t/2} \sum_{j=m+1}^{q-m-3} \Delta^2 b_j (\cos \tau - \cos((j+1)t + \tau)) - \\ &- \Delta b_{m+1} (\cos \tau - \cos((m+1)t + \tau)) + \Delta b_{q-m-2} (\cos \tau - \cos((q-m-1)t + \tau)) - \\ &- b_{m+1} \frac{\sin((m+1/2)t + \tau)}{2 \sin t/2} + b_{q-m-1} \frac{\sin((q-m-1/2)t + \tau)}{2 \sin t/2}. \end{aligned}$$

Замечая, что при $R = \frac{q}{m^{r+1}} + \frac{1}{q^r}$

$$\int_{2\pi/q}^{\pi} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sin^2 t/2} \sum_{j=m+1}^{q-m-3} \Delta^2 b_j \right| dt = O(R),$$

$$\int_{2\pi/q}^{\pi} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta b_{m+1}}{\sin^2 t/2} \right| dt = O(R),$$

получим

$$\begin{aligned} \Gamma_m(\alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi/q}^{\pi} \frac{1}{\sin t/2} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((q-m-1/2)t + \tau)}{(nq + q - m - 1)^r} - \frac{\sin((m+1/2)t + \tau)}{(nq + m + 1)^r} \right| dt + \\ &+ O(R) = \frac{1}{\pi q^r} \sum_{k=1}^{[q/2]} \int_0^{2\pi} \frac{1}{t + 2\pi k} \left| A_q(t, \alpha) \cos \frac{2\pi k m}{q} - B_q(t, \alpha) \sin \frac{2\pi k m}{q} \right| dt + \\ &+ O(R), \end{aligned}$$

где

$$A_q(t, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sin((n+1-m/q)t + \alpha\pi/2)}{(n+1-m/q-1/q)^r} - \frac{\sin((n+m/q)t + \alpha\pi/2)}{(n+m/q+1/q)^r} \right),$$

$$B_q(t, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\cos((n+1-m/q)t + \alpha\pi/2)}{(n+1-m/q-1/q)^r} - \frac{\sin((n+m/q)t + \alpha\pi/2)}{(n+m/q+1/q)^r} \right).$$

Далее, используя ряд Фурье для функции $\sin x$, имеем

$$\begin{aligned} \Gamma_m(\alpha) &= \frac{1}{\pi^3 q^r} \int_0^{2\pi} \sqrt{A_q^2(t, \alpha) + B_q^2(t, \alpha)} \times \\ &\times \left(\ln q - 2 \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\cos(2v\varphi_q(t, \alpha)) \sum_{k=1}^{[q/2]} \frac{\cos 4\pi k v m/q}{k}}{4v^2 - 1} \right) dt + O(R), \end{aligned} \quad (16)$$

где $\varphi_q(t, \alpha) = \frac{\arccos B_q(t, \alpha)}{\sqrt{A_q^2(t, \alpha) + B_q^2(t, \alpha)}}$.

Ясно, что аналог асимптотической формулы (16) имеет место для $\Gamma_m(-\alpha)$.

Докажем пункт б). Пусть β иррационально. Убедимся, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{[q/2]} \frac{\cos 4\pi k \nu m / q}{k}}{\ln m} = 0. \tag{17}$$

Действительно, применяя преобразование Абеля, получим

$$\left| \sum_{k=1}^{[q/2]} \frac{\cos 4\pi k \nu m / q}{k} \right| \leq 1 + \frac{1}{|\sin 2\pi \nu m / q|},$$

и поскольку $\frac{2\pi \nu m}{q} \rightarrow 2\nu\beta\pi \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ при $m \rightarrow \infty$, то получим (17).

Доказательство пункта б) следует из (16) и (17). Докажем теперь пункт с). Пусть

$m/q = \frac{s}{p} + \epsilon$, где $\epsilon \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Убедимся, что

$$K_\nu \equiv \sum_{k=1}^{[q/2]} \frac{\cos 4\pi k \nu m / q}{k} = \frac{1}{p} \sum_{l=1}^p \cos \frac{4\pi \nu s l}{p} \begin{cases} \ln q + O(\eta_\nu(\epsilon)), & \text{при } |\epsilon|q \leq 1 \\ -\ln |\epsilon| + O(\eta_\nu(\epsilon)), & \text{при } |\epsilon|q > 1. \end{cases} \tag{18}$$

где $\eta_\nu(\epsilon) = \ln \nu + |\sum_{l=1}^p \sin 2\pi \nu \epsilon l| \ln q + \int_0^1 |\sin 2\pi \nu p \epsilon t| dt \ln q + O(1)$. Следовательно, имеем

$$K_\nu \equiv \sum_{k=1}^{pq} \frac{\cos 4\pi \nu k m / q}{k} + O(1) = \frac{1}{p} \sum_{l=1}^p \cos \frac{4\pi \nu s l}{p} \sum_{k=1}^{q-1} \frac{\cos 4\pi \nu p k \epsilon}{k} + O\left(\left| \sum_{l=1}^p \sin 2\pi \nu \epsilon l \right| \ln q \right) + O(1). \tag{19}$$

Полагая $I(\nu) = \sum_{k=1}^{q-1} \frac{\cos 4\pi \nu p k \epsilon}{k}$, имеем

$$\left| I(\nu) - \int_1^q \frac{\cos 4\pi \nu p \epsilon t}{t} dt \right| \leq \sum_{k=1}^{q-1} \frac{2}{k} \int_k^{k+1} |\sin 2\pi \nu p \epsilon (t - k)| dt + O(1).$$

Следовательно

$$I(\nu) = \int_1^q \frac{\cos 4\pi \nu p \epsilon t}{t} dt + O\left(\int_0^1 |\sin 2\pi \nu p \epsilon t| dt \ln q \right). \tag{20}$$

Если $|\epsilon|q \leq 1$, то

$$\int_1^q \frac{\cos 4\pi \nu p \epsilon t}{t} dt = \int_{4\nu p |\epsilon|}^{4\nu p |\epsilon| q} \frac{dt}{t} + \int_{4\nu p |\epsilon|}^{4\nu p |\epsilon| q} \frac{\cos \pi t - 1}{t} dt = \ln q + O(\ln \nu p), \tag{21}$$

а если $|\varepsilon|q \geq 1$, то

$$\int_{4vp|\varepsilon|}^{4vp|\varepsilon|q} \frac{\cos \pi t}{t} dt = \int_{4vp|\varepsilon|}^{4vp} \frac{\cos \pi t}{t} dt + \int_{4vp}^{4vp|\varepsilon|q} \frac{\cos \pi t}{t} dt = -\ln |\varepsilon| + O(\ln vp) + O(1). \quad (22)$$

Из (19)–(22) следует (18). Используя

$$\sum_{l=1}^p \cos \frac{4\pi vsl}{p} = \begin{cases} p, & \text{если } 2vs \equiv 0 \pmod{p}, \\ 0, & \text{если } 2vs \not\equiv 0 \pmod{p}, \end{cases}$$

из (16), (18) получим

$$\Gamma_m(\alpha) = \pi^{-3} q^{-r} \cdot \begin{cases} \ln q \int_0^{2\pi} \sqrt{A_q^2(t, \alpha) + B_q^2(t, \alpha)} \left(1 - 2 \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\cos 2v\varphi_q}{4v^2 - 1}\right) dt + \\ + O(R), \quad \text{при } |\varepsilon|q < 1, \\ \int_0^{2\pi} \sqrt{A_q^2(t, \alpha) + B_q^2(t, \alpha)} \left(\ln q + 2 \ln |\varepsilon| \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\cos 2v\varphi_q}{4v^2 - 1}\right) dt + \\ + O(R), \quad \text{при } |\varepsilon|q > 1. \end{cases} \quad (23)$$

Так как $(s, p) = 1$, то

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{\cos 2v\varphi_q}{4v^2 - 1} = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2np\varphi_q}{4n^2 p^2 - 1}, & \text{при } p \equiv 1 \pmod{2}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2np\varphi_q}{n^2 p^2 - 1}, & \text{при } p \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

Поэтому, учитывая, что $-\ln |\varepsilon| < \ln q$ при $|\varepsilon|q > 1$, из (23) получим

$$\begin{aligned} \Gamma_m(\alpha) &\leq \pi^{-3} q^{-r} \ln q \int_0^{2\pi} \sqrt{A_q^2(t, \alpha) + B_q^2(t, \alpha)} dt + o(q^{-r} \ln q) + O(R), \\ \Gamma_m(\alpha) &\geq \pi^{-3} q^{-r} \ln q \int_0^{2\pi} \sqrt{A_q^2(t, \alpha) + B_q^2(t, \alpha)} \left(1 - 2 \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\cos 2v\varphi_q}{4v^2 - 1}\right) dt + \\ &+ o(q^{-r} \ln q) + O(R). \end{aligned} \quad (24)$$

Оценки, аналогичные (24), имеют место для $\Gamma_m(-\alpha)$. Следовательно, из (15) и (24) получим оценки для $C_m(0, W_\alpha^r)$:

$$\begin{aligned} C_m(0, W_\alpha^r) &\leq \pi^{-3} q^{-r} \ln q \int_0^{2\pi} (\sqrt{A_q^2(t, \alpha) + B_q^2(t, \alpha)} + \\ &+ \sqrt{A_q^2(t, -\alpha) + B_q^2(t, -\alpha)}) dt + o(q^{-r} \ln q) + O(R), \\ C_m(0, W_\alpha^r) &\geq \pi^{-3} q^{-r} \ln q \int_0^{2\pi} \left[\sqrt{A_q^2(t, \alpha) + B_q^2(t, \alpha)} \left(1 - 2 \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\cos 2v\varphi_q}{4v^2 - 1}\right) + \right. \\ &+ \left. \sqrt{A_q^2(t, -\alpha) + B_q^2(t, -\alpha)} \left(1 - 2 \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\cos 2v\varphi_q(t, -\alpha)}{4v^2 - 1}\right) \right] dt + \\ &+ o(q^{-r} \ln q) + O(R). \end{aligned} \quad (25)$$

Разделив (25) на $m^{-r} \ln m$ и переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, получим доказательство первого утверждения пункта с). Докажем второе утверждение. Если $\gamma = A_1(\alpha, \beta)$, то положим $m_n = ns - 1$, $q_n = nr$, а для $\gamma = A_2(\alpha, \beta)$, положим $m_n = n([\ln n]s - 1)$, $q_n = nr[\ln n]$. Используя (15) и (23) к последовательности $\frac{m_n}{q_n}$, получим пункт с).

Пусть теперь $\gamma \in (A_1(\alpha, \beta), A_2(\alpha, \beta))$. Для таких γ имеем $\gamma = A_2(\alpha, \beta)(1 - t) + tA_1(\alpha, \beta)$, $0 < t < 1$. В этом случае положим $m_n = [n^{1-t}](s[n^t] - 1)$, $q_n = [n^{1-t}][n^t]r$. Полагая $|\epsilon| = \frac{1}{r} \cdot [n^t]$, получим $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |\epsilon|}{\ln m_n} = -t$. Следовательно, из (15) и (23) имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_m(0, W_\alpha^r)}{m_n^{-r} \ln m_n} = (1 - t) A_2(\alpha, \beta) + t A_1(\alpha, \beta) = \gamma.$$

Доказательство завершено.

ABSTRACT. The paper considers a problem of approximation theory. Let W_α^r ($r > 0, \alpha \in \mathbb{R}$) be the class of periodic, continuous functions $f(x)$ represented in a convolution form $f(x) = c + \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} D^1(t) \varphi(t) dt$, where $D^1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos(kt + \alpha\pi/2)$, while $\varphi(t)$ is a measurable periodic function satisfying $\sup_t |\varphi(t)| \leq 1$ and $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) dt = 0$. Approximation is by trigonometrical polynomials $T_m(x, f) = \frac{2}{q} \sum_{l=0}^{q-1} f(x_l) \mathcal{D}(x - x_l)$, where $m, q > 2m$ are natural, $\{x_l\} = \{2\pi l/q\}$, and $\mathcal{D}_m(t)$ is the Dirichlet kernel. It is found that asymptotic behavior of $C_m(x, r) = \sup_{f \in W_\alpha^r} |f(x) - T_m(x, f)|$ depends on arithmetic character of $\beta = \lim_{m \rightarrow \infty} m/q$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Колмогоров, Избранные Труды, Наука, 1985.
2. М. Д. Калашников, "О полиномах наилучшего квадратического приближения в заданной системе точек", ДАН СССР, том 105, № 4, стр. 634 — 636, 1955.
3. Г. П. Губанов, "Приближение функций тригонометрическими полиномами наилучшего квадратического приближения", Изв. Вузов, Математика, № 12, стр. 22 — 29, 1970.
4. А. Л. Григорян, "Асимптотическая оценка остатка при приближении функций тригонометрическими полиномами наилучшего квадратического приближения", ДАН Арм. ССР, том 89, № 4, стр. 164 — 166, 1989.
5. С. А. Теляковский, "Приближение дифференцируемых функций частными суммами их рядов Фурье", Мат. Заметки, том 4, № 3, стр. 291 — 300, 1968.
6. Н. К. Бари, Тригонометрические Ряды, Москва, Физматгиз, 1961.

17 февраля 2000

Армянский государственный инженерный университет