

НЕНАСЛЕДСТВЕННЫЕ МОНОМОРФИЗМЫ В КАТЕГОРИЯХ ГРУПП НАД ОБЩИМИ КАТЕГОРИЯМИ

Г. Р. Асатрян

Известия Национальной Академии Наук Аргентины. Математика, том 35, № 5, 2000

Ненаследственный мономорфизм в групповой категории $\mathcal{GC}$ над категорией $\mathcal{C}$ определяется как мономорфизм $\mathcal{GC}$ с немоническим базовым морфизмом в $\mathcal{C}$. В статье построены типичные примеры категорий $\mathcal{C}$ с ненаследственными мономорфизмами в $\mathcal{GC}$, и получены необходимые и достаточные условия для существования ненаследственных мономорфизмов.

Многие из результатов классической теории групп перестают быть верными для категорий групп над объектами общей категории $\mathcal{C}$. Например, для моничности гомоморфизма групп над категорией $\mathcal{S}$ множеств необходимо и достаточно, чтобы в основании гомоморфизма лежало бы инъективное отображение. Достаточность этого условия сохраняется при замене $\mathcal{S}$ произвольной абстрактной категорией $\mathcal{C}$. В то же время, существуют категории $\mathcal{C}$ такие, что категория $\mathcal{GC}$ групп над $\mathcal{C}$ имеет мономорфизм, в основании которого лежит немоничный морфизм категории $\mathcal{C}$. Такие мономорфизмы групп называются ненаследственными.

В настоящей статье строятся типичные примеры категорий $\mathcal{C}$ с ненаследственными мономорфизмами в $\mathcal{GC}$ (пункты 3, 5 и 6) и выводятся необходимые и достаточные условия для их существования (пункты 4 и 5).

Существуют два разных подхода для определения групповой структуры на объекте категорий $\mathcal{C}$. Прямой способ предполагает существование конечных произведений в $\mathcal{C}$ (см. [1]). Этот метод был развит Ловером ([2], [3], см. также [4], [5]), который обобщил этот метод для алгебраических теорий. Но есть другой, более общий метод, использующий контравариантные функторы из $\mathcal{C}$ в категорию теоретико-множественных групп $\mathcal{G}$ (см. [6]). Второй способ не требует существования конечных произведений в $\mathcal{C}$. Мы получаем наши результаты, для категорий

не имеющих конечные произведения. Тем не менее, они верны и для категорий с конечными произведениями, но все конструкции в этом случае становятся более сложными. Сказанное может служить ответом на заключительную фразу главы III в [1], стр. 76, относящуюся к определению групповой структуры посредством контравариантных функторов: "Я не знаю ни одного реального использования этой дополнительной общности".

1. Напомним, что для произвольной категории $\mathcal{C}$ и любого объекта A из $\mathcal{C}$ определяются стандартный ковариантный функтор

$$h^A : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S} \mid X \mapsto \mathcal{C}(A, X), (u : X \rightarrow Y) \mapsto h^A(u)(v) = v \circ u,$$

и контравариантный функтор

$$h_A : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S} \mid X \mapsto \mathcal{C}(X, A), (u : X \rightarrow Y) \mapsto h_A(u)(v) = u \circ v.$$

Каждый морфизм $u : A \rightarrow B$ категории $\mathcal{C}$ определяет естественное преобразование

$$h_u : h_A \rightarrow h_B \mid X \mapsto h_u(X) = h^X(u) \text{ для любого } X \in \text{Ob } \mathcal{C}.$$

Пусть $U : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{S}$ — стирающий функтор из категории групп в категорию множеств.

Определение 1. Контравариантный функтор $\sigma : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{G}$ называется групповой структурой в категории $\mathcal{C}$, если существует объект A из $\mathcal{C}$ такой, что $\sigma \circ U = h_A$. Такой объект A определяется однозначно и называется основой структуры σ . Пара (A, σ) называется $\mathcal{C}$ -группой.

Для определения групповой структуры на объекте A по контравариантному функтору σ необходимо и достаточно задание групповых операций $*$ на множествах $h_A(X)$ для всех $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ таких, что для любого морфизма $u : X \rightarrow Y$ из $\mathcal{C}$ отображение $h_A(u) : h_A(Y) \rightarrow h_A(X)$ было бы гомоморфизмом групп. Последнее условие означает, что

$$u \circ (\xi * \eta) = (u \circ \xi) * (u \circ \eta) \text{ для всех } \xi, \eta \in h_A(Y). \quad (1)$$

Определение 2. Гомоморфизм из $\mathcal{C}$ -группы (A, σ) в $\mathcal{C}$ -группу (B, τ) есть естественное преобразование $\varphi : \sigma \rightarrow \tau$. Основой v_φ гомоморфизма φ является морфизм

$$v_\varphi = (\varphi \cdot 1_U)_A(1_A) : A \rightarrow B,$$



где 1_U – тождественное естественное преобразование стирающего функтора U , 1_A – тождественный морфизм объекта A и $\cdot$ – “горизонтальная” композиция естественных преобразований.

Соответствие $\varphi \mapsto v_\varphi$ определяет биективное отображение между гомоморфизмами из (A, σ) в (B, τ) и морфизмами $v : A \rightarrow B$, удовлетворяющими следующему условию :

$$(\xi * \eta) \circ v = (\xi \circ v) * (\eta \circ v) \quad \text{для всех } \xi, \eta \in h_A(X) = C(X, A), \quad (2)$$

т.е. условию гомоморфности отображения групп

$$(\varphi \cdot 1_U)_X = h_v(X) : h_A(X) \rightarrow h_B(X).$$

Через $\mathcal{CS}$ обозначается категория, объектами которой являются все C -группы, а морфизмами – все гомоморфизмы C -групп. Стирающий функтор $U_C(C) : \mathcal{CS} \rightarrow C$ сопоставляет объектам и морфизмам из $\mathcal{CS}$ их основы. Функтор $U_C(C)$ является унивалентным. Как следствие, если основа гомоморфизма монична, то и сам гомоморфизм моничен. Обратное, в общем случае, неверно.

Определение 3. Будем говорить, что мономорфизм из $\mathcal{CS}$ – наследственный, если его основа монична в C , и ненаследственный – в противном случае.

Целью статьи является построение типичных примеров категорий C с ненаследственными мономорфизмами в $\mathcal{CS}$, и вывод необходимых и достаточных условий для наличия ненаследственных мономорфизмов в категории $\mathcal{CS}$.

2. Если A – основа групповой структуры σ в категории C , то через $0_{X,A}$ мы обозначаем единицу групповой операции $*$ на множестве $h_A(X) = C(X, A)$, а через u^* обратный элемент к u .

Предложение 1. (а) Единицы $0_{X,A}$ являются постоянными морфизмами. Более того, $u \circ 0_{Y,A} = 0_{X,A}$ для всех $u \in C(X, Y)$.

(б) Если $v : A \rightarrow B$ является основой гомоморфизма C -групп, то

$$0_{X,A} \circ v = 0_{X,B} \quad \text{для всех } X \in \text{Об } C.$$

(с) Все $0_{A,B}$ удовлетворяют (2), т.е. для любой групповой структуры на A единица $0_{A,B}$ является основой гомоморфизма групповых структур.

(d) Если A – основа групповой структуры, то тождественный морфизм 1_A совпадает с $0_{A,A}$ тогда и только тогда, когда A является терминальным объектом.

Доказательство : (a) и (b) имеют место, поскольку $h_A(u)$ и $h_o(X)$ являются гомоморфизмами групп. (c) непосредственно следует из (a).

(d). Пусть A – основа групповой структуры. Тогда из $1_A = 0_{AA}$ следует, что

$$\xi = \xi \circ 1_A = \xi \circ 0_{AA} = 0_{XA} \quad \text{для всех } X \in \text{Ob } \mathcal{C} \text{ и } \xi \in \mathcal{C}(X, A),$$

поэтому объект A терминален. Обратное очевидно.

Замечание. Из Предложения 1 следует, что $\mathcal{CS}$ есть категория с системой нулевых морфизмов 0_{AB} (см. [7]).

3. Пусть $\varphi : \sigma \rightarrow \tau$ – ненаследственный мономорфизм в $\mathcal{CS}$, и $\gamma : A \rightarrow B$ – его основа. Так как γ не является мономорфизмом в $\mathcal{C}$, то существует объект C и морфизмы $u_1, u_2 \in \mathcal{C}(C, A)$ такие, что $u_1 \neq u_2$, $u_1 \circ \gamma = u_2 \circ \gamma$. Тогда для обратного элемента u_2^* имеем

$$(u_1 * u_2^*) \circ \gamma = (u_1 \circ \gamma) * (u_2^* \circ \gamma) = (u_2 \circ \gamma) * (u_2^* \circ \gamma) = (u_2 * u_2^*) \circ \gamma = 0_{CA} \circ \gamma.$$

Обозначая $u = u_1 * u_2^*$, получаем

$$u \neq 0_{CA}, \quad u \circ \gamma = 0_{CA} \circ \gamma. \quad (3)$$

Как следствие (3) получаем, что объект A не терминален, и согласно Предложению 1, d), имеем $1_A \neq 0_{AA}$. Если предположить, что $\gamma = 0_{AB}$, то $1_A \circ \gamma = 0_{AA} \circ \gamma$, что противоречит мономорфности φ (отметим, что $1_A, 0_{AA}$ и γ являются основами гомоморфизмов). Таким образом, $\gamma \neq 0_{AB}$ и поэтому объект B не терминален и $1_B \neq 0_{BB}$. Таким образом, получили следующее утверждение.

Предложение 2. Если $\gamma : A \rightarrow B$ – основа ненаследственного мономорфизма, то $\gamma \neq 0_{AB}$, A и B не терминальны (следовательно, $1_A \neq 0_{AA}$, $1_B \neq 0_{BB}$), и существуют объект C и морфизм $u : C \rightarrow A$, удовлетворяющие (3).

Сейчас мы можем построить простейший пример категории $\mathcal{C}$ с ненаследственным мономорфизмом в $\mathcal{CS}$. Эта категория $\mathcal{N}_2$ имеет три объекта A, B, C и следующие множества морфизмов $\mathcal{N}_2(X, Y)$:

X, Y	A	B	C
A	$\{1_A, 0_{AA}\}$	$\{0_{AB}, \gamma\}$	$\emptyset$
B	$\{0_{BA}\}$	$\{1_B, 0_{BB}\}$	$\emptyset$
C	$\{0_{CA}, u\}$	$\{0_{CB}\}$	$\{1_C\}$

Композиция морфизмов определяется следующим образом :

$$u \circ v = \begin{cases} u, & \text{если } v = 1; \\ 0, & \text{если } u \neq 1, \quad v \neq 1; \\ v, & \text{если } u = 1. \end{cases} \quad (4)$$

Предложение 3. Категория $\mathcal{GN}_2$ изоморфна полной подкатегории категории $\mathcal{N}_2$ с объектами A и B . Соответствующий изоморфизм задаётся стирающим функтором $U_0(\mathcal{N}_2)$.

Доказательство : Так как $\mathcal{N}_2(X, C) = \emptyset$ при $X = A, B$, то на объекте C невозможно задать групповую структуру. На объектах A и B однозначно определяются групповые структуры, поскольку множества $\mathcal{N}_2(X, Y)$ содержат не более двух элементов и морфизмы $1_A, 1_B$ не являются постоянными морфизмами (следовательно, $0_{X,Y}$ являются единицами групп $\mathcal{N}_2(X, Y)$). Когда $X, Y \in \{A, B\}$, то все элементы из $\mathcal{N}_2(X, Y)$ являются основами гомоморфизмов : для $0_{X,Y}$ это следует из Предложения 1, (с) : для g , а также для 1_A и 1_B Условие (2) проверяется непосредственно.

Следствие. Морфизм g не моничен в $\mathcal{N}_2$, но соответствующий гомоморфизм в $\mathcal{GN}_2$ моничен. Поэтому $\mathcal{N}_2$ является категорией с не наследственным мономорфизмом в $\mathcal{GN}_2$.

4. Предложение 4. Категория $\mathcal{GC}$ содержит не наследственный мономорфизм тогда и только тогда, когда существует функтор $f : \mathcal{N}_2 \rightarrow C$, удовлетворяющий условиям :

- (i) $f(u) \neq f(0_{CA})$ и
- (ii) $f(g)$ является основой некоторого мономорфизма из $\mathcal{GC}$.

Доказательство : Необходимость. Пусть C есть категория с не наследственным мономорфизмом φ в $\mathcal{GC}$, имеющим в основе немоничный морфизм $g : A \rightarrow B$ (здесь возможно $A = B$). Из сказанного (перед конструкцией $\mathcal{N}_2$) в пункте 3 следует, что C имеет морфизмы

$$1_A, 0_{AA}, 0_{AB}, g, 0_{BA}, 1_B, 0_{BB}, 0_{CA}, u, 0_{CB}, 1_C, \quad (5)$$

индексированные объектами $A, B, C \in \text{Ob } C$ (некоторые из них могут совпадать). Более того, композиции этих морфизмов определяются согласно (4). Следовательно, отображения $\text{Ob } \mathcal{N}_2 \rightarrow \text{Ob } C$, M или $\mathcal{N}_2 \rightarrow M$ или C , сопоставляющие буквы "жирного шрифта" тем же буквам обычного шрифта, определяют функтор $f : \mathcal{N}_2 \rightarrow C$. По конструкции, f удовлетворяет условиям (i), (ii).

Достаточность. Морфизм $f(r)$ не моничен в $\mathcal{C}$, поскольку согласно (i) имеем $f(u) \neq f(0_{CA})$ и

$$f(u) \circ f(r) = f(u \circ r) = f(0_{CB}) = f(0_{CA} \circ r) = f(0_{CA}) \circ f(r).$$

Отсюда, учитывая (ii), получаем, что $f(r)$ является основой ненаследственного мономорфизма. Если некоторые из объектов A, B, C равны, то некоторые из морфизмов (5) равны. Однако нетрудно проверить, что функтор f , определяемый в доказательстве необходимости, является унивалентным. Условие (i) выполняется для каждого унивалентного функтора.

Следовательно, можно дать новую формулировку Предложения 4.

Предложение 5. Категория $\mathcal{GC}$ имеет ненаследственный мономорфизм тогда и только тогда, когда существует ковариантный унивалентный функтор $f : \mathcal{N}_2 \rightarrow \mathcal{C}$ такой, что $f(r)$ является основой некоторого мономорфизма из $\mathcal{GC}$.

5. Предложения 4 и 5 позволяют выявлять категории групп с ненаследственными мономорфизмами, но не доставляют возможности построения новых примеров таких категорий. С. Г. Далалян видоизменил конструкцию типичного примера категории $\mathcal{N}_2$ с ненаследственным мономорфизмом в $\mathcal{GN}_2$ таким образом, чтобы можно было бы факторизацией получать новые примеры категорий. Ниже приводятся эти результаты.

Пусть A, B, C суть объекты из $\mathcal{N}_\infty$, а множества морфизмов $\mathcal{N}_\infty(X, Y)$ определяются следующей таблицей :

X, Y	A	B	C
A	$\mathbb{Z}_{AA}$	$\mathbb{Z}_{AB}$	$\emptyset$
B	$\{0_{BA}\}$	$\mathbb{Z}_{BB}$	$\emptyset$
C	$\mathbb{Z}_{CA}$	$\{0_{CB}\}$	$\{1_C\}$

где $\mathbb{Z}$ – кольцо целых чисел, и $\mathbb{Z}_{XY} = \{n_{XY} : n \in \mathbb{Z}\}$.

Композиция определяется равенством

$$m_{XY} \circ n_{YZ} = \begin{cases} (mn)_{XZ}, & \text{если } (X, Y, Z) \neq (C, A, B); \\ 0_{CB}, & \text{если } (X, Y, Z) = (C, A, B). \end{cases} \quad (6)$$

Невозможно задать групповую структуру на объекте C , поскольку $\mathcal{N}_\infty(A, C) = \emptyset$. Для любых $X \in \{A, B, C\}$, $Y \in \{A, B\}$ на множестве $\mathcal{N}_\infty(X, Y)$ определим коммутативную групповую операцию $+$: $m_{XY} + n_{XY} = (m + n)_{XY}$. Эта система операций удовлетворяет Условию (1) и, следовательно, определяет групповые

структуры σ и τ на A и B , соответственно. Очевидно, что морфизм 1_{AB} не моничен в $\mathcal{N}'_\infty$ и удовлетворяет Условию (2). Следовательно, он является основой гомоморфизма из σ в τ . Этот гомоморфизм моничен в $\mathcal{GN}_\infty$. Таким образом, 1_{AB} является основой ненаследственного мономорфизма из $\mathcal{GN}_\infty$.

Теперь существование ненаследственного мономорфизма в $\mathcal{GC}$ эквивалентно существованию ковариантного функтора $f : \mathcal{N}_\infty \rightarrow \mathcal{C}$, удовлетворяющего следующим условиям :

$$(i) f(1_{CA}) \neq f(0_{CA}),$$

(ii) $f(1_{AB})$ является основой мономорфизма из $\mathcal{GC}$ (отсюда следует, что даны групповые структуры σ и τ на объектах $f(A)$ и $f(B)$ категории $\mathcal{C}$).

(iii) для всех $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{N}_\infty$, $Y \neq C$ отображение $f_{X,Y} : \mathcal{N}_\infty(X, Y) \rightarrow \mathcal{C}(f(X), f(Y))$ является гомоморфизмом групп.

Аналогичное отображение $f_{X,Y} : \mathcal{N}_2(X, Y) \rightarrow \mathcal{C}(f(X), f(Y))$ в общем случае не является гомоморфизмом групп. Другим отличием между $\mathcal{N}_2$ и $\mathcal{N}_\infty$ является то, что в этом случае полной подкатегории $\overline{\mathcal{N}_\infty}$, имеющей в качестве объектов A и B , оказывается изоморфна не вся категория $\mathcal{GN}_\infty$, а полная подкатегория, содержащая объекты (A, σ) и (B, τ) . Такой изоморфизм устанавливается ограничением стирающего функтора $U_{\mathcal{C}}(\mathcal{N}_\infty)$.

Атрибут ненаследственного мономорфизма $\varphi : (A, \sigma) \rightarrow (B, \tau)$ категории $\mathcal{GC}$ состоит из φ , его основы $\tau : A \rightarrow B$ и морфизма $\pi : C \rightarrow A$ категории $\mathcal{C}$, удовлетворяющий (3).

Если объекты A, B, C попарно различны, то образ $\mathcal{D}$ функтора f будет подкатегорией категории $\mathcal{C}$. Категория $\mathcal{D}$ имеет три объекта A, B, C . Для любых $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{N}_\infty$, $Y \neq C$ отображение

$$f_{X,Y} : \mathcal{N}_\infty(X, Y) \rightarrow \mathcal{D}(f(X), f(Y))$$

является сюръективным гомоморфизмом групп, где $\mathcal{N}_\infty(X, Y)$ – бесконечная циклическая или тривиальная группа. Следовательно, $\mathcal{D}(f(X), f(Y))$ изоморфна $\mathbb{Z}/\nu_{XY}\mathbb{Z}$, где ν_{XY} – неотрицательное целое число, удовлетворяющее следующим условиям : (i) $\nu_{BA} = \nu_{CB} = 1$; (ii) остальные целые $\nu_{XY} \neq 1$; (iii) ν_{AB} делит ν_{AA} и ν_{BB} ; (iv) ν_{CA} делит ν_{AA} .

Если групповая структура σ абелева (т.е. все теоретико-множественные группы $\mathcal{C}(X, A)$ коммутативны), то из моничности φ получаем $\nu_{AA} = \nu_{AB}$.

База данных, состоящая из (a) трех объектов A, B, C , (b) системы множеств морфизмов

$$\mathcal{D}(X, Y) = \mathbb{Z} / \nu_{XY} \mathbb{Z} \quad (X, Y \in \{A, B, C\}, Y \neq C).$$

$$\mathcal{D}(X, C) = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } X \neq C, \\ \{1_C\}, & \text{если } X = C, \end{cases}$$

где ν_{XY} — целые неотрицательные числа, удовлетворяющие (i)-(iv) и (c), и закона композиции морфизмов

$$(a + \nu_{XY} \mathbb{Z}) \circ (b + \nu_{YZ} \mathbb{Z}) = \begin{cases} 0_{CB}, & \text{если } (X, Y, Z) = (C, A, B), \\ ab + \nu_{XZ} \mathbb{Z}, & \text{если } (X, Y, Z) \neq (C, A, B) \end{cases}$$

образует категорию. Для групповых структур σ и τ , определённых на объектах A и B естественными циклическими групповыми структурами множеств $\mathcal{D}(X, Y)$, морфизм 1_{AB} является основой гомоморфизма $\varphi: \sigma \rightarrow \tau$. Этот гомоморфизм моничен (следовательно, будет ненаследственным мономорфизмом) тогда и только тогда, когда $\nu_{AA} = \nu_{AB}$. Категории $\mathcal{N}_2$ и $\mathcal{N}_\infty$ можно получить из этой общей конструкции, если взять в качестве всех $\nu_{XY} \neq 1$, соответственно, два и ноль.

6. Используя идею композиции морфизмов (б), можно предложить следующую общую конструкцию категорий $\mathcal{C}$ с ненаследственными мономорфизмами в $\mathcal{GC}$, основанную на понятии почти-кольца (см. [8]). Алгебра $R = (R, *, o)$ с двумя бинарными операциями называется почти-кольцом, если (i) R — группа относительно операции $*$, (ii) R — полугруппа относительно операций o , и (iii) R удовлетворяет правому распределительному закону (1).

Пусть почти-кольцо R удовлетворяет следующим дополнительным условиям: 1) оно имеет единичный элемент 1, 2) $0 \circ x = 0$ для нулевого элемента 0 почти-кольца R и любого $x \in R$. Тогда заменяя кольцо $\mathbb{Z}$ на такое почти-кольцо R в таблице множеств морфизмов категории $\mathcal{N}_\infty$ и в (б), получаем категорию $\mathcal{N}_R$.

Теорема. Для произвольного нетривиального почти-кольца R , удовлетворяющего условиям 1) и 2), категория $\mathcal{GN}_R$ содержит ненаследственный мономорфизм.

ABSTRACT. A non-hereditary monomorphism, in a group category $\mathcal{GC}$ over a category $\mathcal{C}$, is a monomorphism of $\mathcal{GC}$ with a non-monic base morphism in $\mathcal{C}$. The present article constructs typical examples of categories $\mathcal{C}$ with non-hereditary monomorphisms in $\mathcal{GC}$ and gives necessary and sufficient conditions for existence of non-hereditary monomorphisms.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Mac Lane. Categories For the Working Mathematician, Springer-Verlag, 1971.
2. F. W. Lawvere, "Functorial semantics of algebraic theories", Proc. Nat. Acad. Sci., vol. 52, pp. 869 — 872, 1963.
3. F. W. Lawvere, "Algebraic theories, algebraic categories, and algebraic functors", Symposium on the theory of Models; North-Holland Publ. Co., pp. 413 — 418, Amsterdam, 1965.
4. B. Pareigis, Categories and Functors, N.Y., Acad. Press, 1970.
5. П. Т. Джонстон, Теория Топосов, Москва, Наука, 1986.
6. И. Букур, А. Деляну, Введение в Теорию Категорий и Функторов, Москва, Мир, 1972.
7. М. Цаленко, Е. Шульгейфер, Основы Теории Категорий, Москва, Мир, 1974.
8. А. Г. Курош, Общая Алгебра. Лекции 1969-1970 учебного года, Москва, Наука, 1974.

15 марта 2000

Ереванский государственный университет