ФУНКЦИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ СЕМЕЙСТВА ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

Т. Н. Арутюнян, Э. Р. Навасардян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 5, 2000

Функция $\mu(\gamma)$ определена так, что её значение в любой положительной точке $\gamma = \alpha + \pi n$, $\alpha \in (0, \pi]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ совпадает с собственным значением $\mu_n(\alpha)$ задачи Штурма–Лиувилля $-y'' + q(x)\,y = \mu\,y$, $y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0$, $y'(\pi) = 0$, пронумерованным определённым образом. Найдены необходимые и достаточные условия того, чтобы некоторая функция обладала бы указанным свойством при действительном $q \in L^2[0, \pi]$.

§1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Мы рассматриваем задачу Штурма–Лиувилля

$$-y'' + q(x)\,y = \mu\,y, \quad x \in (0, \pi), \quad \mu \in C, \tag{1.1}$$

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \quad \alpha \in (0, \pi], \tag{1.2}$$

$$y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta = 0, \quad \beta \in [0, \pi), \tag{1.3}$$

где q – действительнозначная функция из $L^2[0, \pi]$ (будем писать $q \in L^2_{\mathbb{R}}[0, \pi]$). Обозначим через $L(q, \alpha, \beta)$ самосопряжённый оператор, порождённый краевой задачей (1.1) – (1.3) (см. [1]). Известно (см. [1]), что спектр оператора $L(q, \alpha, \beta)$ дискретен и состоит из простых собственных значений, которые мы будем обозначать $\mu_n(q, \alpha, \beta)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, подчёркивая зависимость μ_n от q, α и β. Имея целью изучить зависимость собственных значений от параметра α, зафиксируем $\beta = \pi/2$ и рассмотрим семейство операторов $\{L(q, \alpha, \pi/2), \alpha \in (0, \pi]\}$. Ниже мы также используем обозначения $\mu_n(q, \alpha, \pi/2) = \mu_n(\alpha)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Вначале пронумеруем собственные значения $\mu_n(\pi) = \mu_n(q, \pi, \pi/2)$ в порядке возрастания индекса

$$\mu_0(\pi) < \mu_1(\pi) < \ldots < \mu_n(\pi) < \mu_{n+1}(\pi) < \ldots \tag{1.4}$$

Так как собственные значения операторов $L(q,\pi,\pi/2)$ и $L(q,\alpha,\pi/2)$ при $\alpha\in(0,\pi)$ перемежаемы (см. §2), то собственные значения $L(q,\alpha,\pi/2)$ можно перенумеровать так, чтобы имели бы место неравенства

$$\mu_0(\alpha)<\mu_0(\pi)<\mu_1(\alpha)<\mu_1(\pi)<\ldots<\mu_{n-1}(\pi)<\mu_n(\alpha)<\mu_n(\pi)<\ldots. \tag{1.5}$$

Из (1.4) и (1.5) получаем однозначную нумерацию собственных значений оператора $L(q,\alpha,\pi/2)$ для каждого $\alpha\in(0,\pi]$. Разобьём положительную полуось на отрезки $(0,\pi]$, $(\pi,2\pi]$,..., $(\pi n,\pi(n+1)]$,... и заметим, что каждое положительное число γ попадает в один из этих отрезков, т.е. $\gamma=\alpha+\pi n$, где $\alpha\in(0,\pi]$, $n=0,1,2,\ldots$.

Определение. Функция $\mu(\gamma)$, определённая на $(0,\infty)$ по формуле

$$\mu(\gamma)=\mu(\alpha+\pi n)=\mu_n(\alpha),\quad \alpha\in(0,\pi],\quad n=0,1,2,\ldots,$$

где $\mu_n(\alpha)$ суть собственные значения оператора $L(q,\alpha,\pi/2)$, пронумерованные согласно (1.4) и (1.5), называется функцией собственных значений (ФСЗ) семейства операторов $\{L(q,\alpha,\pi/2),\alpha\in(0,\pi]\}$.

Обозначим через $b_n(\alpha)$ решение трансцендентного уравнения

$$b_n(\alpha)=\frac{1}{\pi}\arccos\frac{\cos\alpha}{\sqrt{(n+b_n(\alpha))^2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}}-\frac{1}{2},\quad n=1,2,\ldots. \tag{1.6}$$

Нетрудно видеть, что $-\frac{1}{2}\le b_n(\alpha)\le\frac{1}{2}$ для всех $n=1,2,\ldots$. Следующие три теоремы являются основными результатами статьи.

Теорема 1. Функция собственных значений $\mu(\gamma)$ семейства операторов $\{L(q,\alpha,\pi/2),\alpha\in(0,\pi]\}$ обладает следующими свойствами :

a) $\mu(\gamma)$ – строго монотонно возрастающая функция, определенная на $(0,\infty)$. Область значений $\mu(\cdot)$ есть $(-\infty,\infty)$.

b) Для каждого $\gamma>0$ существует комплексная окрестность V_γ, в которой определена аналитическая функция $\tilde\mu(\cdot)$, совпадающая с $\mu(\cdot)$ при действительных значениях аргумента.

c) Имеет место следующая асимптотическая формула :

$$\mu(\gamma)=\mu(\alpha+\pi n)=(n+b_n(\alpha))^2+A+r_n(\alpha),\quad \text{при}\quad n\to\infty, \tag{1.7}$$

где A – некоторая действительная постоянная, а $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r_n^2(\alpha) < \infty$ равномерно по всем $\alpha \in (0, \pi]$ (т.е. существуют постоянные a_n, не зависящие от α такие, что $|r_n(\alpha)| \le a_n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty$).

d) Для любых α и α_1 таких, что $0 < \alpha < \alpha_1 \le \pi$ и любого $n = 0, 1, 2, ..$

$$\left.\frac{\partial\mu(\gamma)}{\partial\gamma}\right|_{\gamma=\alpha+\pi n} = \frac{\mu(\alpha_1+\pi n)-\mu(\alpha+\pi n)}{\sin(\alpha_1-\alpha)} \prod_{\substack{k=0\\k\ne n}}^{\infty} \frac{\mu(\alpha_1+\pi k)-\mu(\alpha+\pi n)}{\mu(\alpha+\pi k)-\mu(\alpha+\pi n)}.$$

Теорема 2. Пусть функция $\mu(\cdot)$ обладает свойствами a)—d) Теоремы 1. Тогда существует единственная функция $q \in L^2_{\mathbb{R}}[0, \pi]$ такая, что $\mu(\cdot)$ есть функция собственных значений семейства операторов $\{L(q, \alpha, \pi/2), \alpha \in (0, \pi]\}$, т.е. для любого $\alpha \in (0, \pi]\}$ и $n = 0, 1, 2, ...$ значения $\mu(\alpha + \pi n)$ суть собственные значения операторов $L(q, \alpha, \pi/2)$, $\alpha \in (0, \pi]$, пронумерованные согласно (1.4) и (1.5).

Теоремы 1 и 2 можно объединить в следующей формулировке :

Теорема 3. Свойства a)—d) Теоремы 1 необходимы и достаточны, чтобы функция $\mu : (0, \infty) \mapsto (-\infty, \infty)$ была бы функцией собственных значений семейства операторов $\{L(q, \alpha, \pi/2), \alpha \in (0, \pi]\}$ с действительными $q \in L^2[0, \pi]$.

Отметим, что формула (1.7) даёт асимптотическое разложение для собственных значений $\mu_n(\alpha)$ задачи $L(q, \alpha, \pi/2)$ и по существу совпадает с классическими асимптотическими формулами (см. §2).

Зависимость собственных значений $\mu_n(q, \alpha, \beta)$ от параметра β можно исследовать аналогично. Зависимость $\mu_n(q, \alpha, \beta)$ одновременно от α, β и q изучена в серии работ [2–4].

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. ФСЗ ДЛЯ СЕМЕЙСТВА С НУЛЕВЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Обозначим через $\varphi(x, \mu, \alpha)$ и $\psi(x, \mu)$ решения уравнения (1.1), удовлетворяющие начальным условиям

$$\varphi(0, \mu, \alpha) = \sin\alpha, \quad \varphi'(0, \mu, \alpha) = -\cos\alpha$$

и

$$\psi(\pi, \mu) = 1, \quad \psi'(\pi, \mu) = 0,$$

соответственно. Для каждого $x \in [0, \pi]$, $\varphi(x, \mu, \alpha)$ и $\varphi'_x(x, \mu, \alpha)$ являются целыми функциями двух комплексных переменных μ и α, а $\psi(x, \mu)$ и $\psi'_x(x, \mu)$ – целые

функции параметра μ (см. [5]). Собственные значения $\mu_n(q,\alpha,\pi/2) = \mu_n(\alpha)$ оператора $L(q,\alpha,\pi/2)$ совпадают с нулями (относительно μ) целой функции

$$\chi(\alpha,\mu) = \psi(0,\mu)\cos\alpha + \psi'(0,\mu)\sin\alpha,$$

которую называют характеристической функцией оператора $L(q,\alpha,\pi/2)$.

Рассмотрим мероморфную по μ функцию

$$m_{\alpha,\gamma}(\mu) = \frac{\chi(\alpha,\mu)}{\chi(\gamma,\mu)} = \frac{\psi(0,\mu)\cos\alpha + \psi'(0,\mu)\sin\alpha}{\psi(0,\mu)\cos\gamma + \psi'(0,\mu)\sin\gamma}. \tag{2.1}$$

Очевидно, что нули этой функции совпадают с собственными значениями $\mu_n(\alpha)$ задачи $L(q,\alpha,\pi/2)$, а полюса с собственными значениями $\mu_n(\gamma)$ задачи $L(q,\gamma,\pi/2)$. Нетрудно доказать (см. [6]), что

$$\mathrm{Im}\{m_{\alpha,\gamma}(\mu)\} = \frac{\sin(\alpha-\gamma)\int_0^\pi |\psi(x,\mu)|^2\,dx}{|\psi(0,\mu)\cos\gamma + \psi'(0,\mu)\sin\gamma|^2}\,\mathrm{Im}\mu. \tag{2.2}$$

Отсюда следует, что $\mathrm{Im}\{m_{\alpha,\gamma}(\mu)\} = 0$ при $\mathrm{Im}\mu = 0$. Таким образом, при $\sin(\alpha-\gamma) > 0$ мероморфная функция $m_{\alpha,\gamma}(\mu)$ переводит верхнюю полуплоскость в себя. Доказательство нижеследующей теоремы можно найти в [7].

Теорема 2.1. Для того чтобы мероморфная функция переводила бы верхнюю полуплоскость в себя, необходимо и достаточно, чтобы она представлялась в виде

$$m(\gamma) = c\,\frac{\mu-a_0}{\mu-b_0}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\mu}{a_k}\right)\left(1-\frac{\mu}{b_k}\right)^{-1},$$

где $c > 0$ и

$$b_k < a_k < b_{k+1}, \quad k = 0,1,2,\ldots. \tag{2.3}$$

Если в (2.1) взять $m_{\pi,\alpha}(\mu)$, где $\alpha \in (0,\pi)$, то $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha > 0$, и из (2.2) следует, что к $m_{\pi,\alpha}(\mu)$ применима Теорема 2.1. В частности, из (2.3) следует, что нули и полюса функции $m_{\pi,\alpha}(\mu)$ перемежаются и имеют место неравенства (1.5). Если $0 < \alpha < \alpha_1 < \pi$, то поскольку $\sin(\alpha_1-\alpha) > 0$, Теорему 2.1 можно применить к $m_{\alpha_1,\alpha}(\mu)$. В этом случае перемежаемость нулей и полюсов функции $m_{\alpha_1,\alpha}(\mu)$ приводит к неравенствам

$$\mu_0(\alpha) < \mu_0(\alpha_1) < \mu_0(\pi) < \ldots < \mu_n(\alpha) < \mu_n(\alpha_1) < \mu_n(\pi) < \mu_{n+1}(\alpha) < \ldots, \tag{2.4}$$

из которых следует, что все собственные значения $\mu_n(\alpha)$, $n = 0,1,2,\ldots$ – строго возрастающие функции на $(0,\pi]$. Отсюда и из Определения ФСЗ следует, что

ФСЗ $\mu(\gamma)$ есть строго монотонно возрастающая функция как на каждом из отрезков $(\pi k, \pi(k+1)]$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, покрывающих всю полуось $(0, \infty)$, так и на всей полуоси $(0, \infty)$.

Покажем теперь, что ФСЗ $\mu(\gamma)$ есть аналитическая функция в каждой точке полуоси $(0, \infty)$. Для этого воспользуемся теоремой о неявной функции в следующей формулировке (см. [5]).

Теорема 2.2. Пусть $\gamma \in \mathbf{C}$, $\mu \in \mathbf{C}$ и $F(\mu, \gamma) : U \mapsto \mathbf{C}$ – аналитические функции в некоторой окрестности U точки (μ_0, γ_0), причём $\dfrac{\partial F(\mu_0, \gamma_0)}{\partial \mu} \neq 0$. Тогда равенство $F(\mu, \gamma) = F(\mu_0, \gamma_0)$ единственным образом определяет функцию $\mu = \mu(\gamma) : V \mapsto \mathbf{C}$, аналитическую в некоторой окрестности V точки γ_0 и такую, что при $\gamma \in V$, $(\mu(\gamma), \gamma) \in U$, $\mu(\gamma_0) = \mu_0$ и $F(\mu(\gamma), \gamma) \equiv F(\mu_0, \gamma_0)$ для всех $\gamma \in V$.

В качестве $F(\mu, \gamma)$ мы возьмём характеристическую функцию $F(\mu, \gamma) = \chi(\mu, \gamma) = \psi(0, \mu) \cos\gamma + \psi'(0, \mu) \sin\gamma$, которая является целой функцией двух комплексных переменных μ и γ. Пусть γ_0 – произвольное положительное число, которое мы представим в виде $\gamma_0 = \alpha_0 + \pi m$, где $\alpha_0 \in (0, \pi]$, а m – неотрицательное целое. Пусть $\mu_0 = \mu(\gamma_0) = \mu(\alpha_0 + \pi m) = \mu_m(\alpha_0)$ есть значение ФСЗ в точке γ_0. Тогда $\chi(\mu_0, \gamma_0) = 0$. В силу простоты собственных значений задачи $L(q, \gamma_0, \pi/2)$ производная $\dfrac{\partial \chi(\mu_0, \gamma_0)}{\partial \mu} \neq 0$. Отсюда, по теореме о неявной функции, следует, что существует некоторая комплексная окрестность V_{γ_0} действительной точки γ_0, на которой определена однозначная аналитическая функция $\widetilde{\mu}(\gamma)$ такая, что $\widetilde{\mu}(\gamma_0) = \mu_0$, $\chi(\widetilde{\mu}(\gamma), \gamma) = \chi(\mu_0, \gamma_0) = 0$ для всех $\gamma \in V_{\gamma_0}$. В частности, для действительных $\gamma \in V_{\gamma_0}$ имеем $\widetilde{\mu}(\gamma) = \mu(\gamma)$. Поскольку $\gamma_0 \in (0, \infty)$ – произвольная точка, то доказана аналитичность ФСЗ $\mu(\gamma)$ на всей полуоси $(0, \infty)$.

Для доказательства свойства d) заметим, что имеет место тождество (см. [1])

$$[\mu(\gamma + \Delta\gamma) - \mu(\gamma)] \int_0^\pi \varphi(x, \mu(\gamma + \Delta\gamma), \gamma + \Delta\gamma)\, \varphi(x, \mu(\gamma), \gamma)\, dx = \sin \Delta\gamma.$$

Разделив обе стороны на $\Delta\gamma$ и устремив $\Delta\gamma \to 0$, получаем

$$\frac{\partial \mu(\gamma)}{\partial \gamma} \int_0^\pi \varphi^2(x, \mu(\gamma), \gamma)\, dx = 1,$$

или

$$\left.\frac{\partial \mu(\gamma)}{\partial \gamma}\right|_{\gamma = \alpha + \pi n} = \frac{1}{\int_0^\pi \varphi^2(x, \mu_n(\alpha), \alpha)\, dx} = \frac{1}{a_n(\alpha)}, \tag{2.5}$$

где $a(\alpha + \pi n \equiv a_n(\alpha) \equiv \int_0^\pi \varphi^2(x, \mu_n(\alpha), \alpha)\, dx$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ называются нормировочными постоянными оператора $L(q, \alpha, \pi/2)$. Заметим, что тождество (2.5) даёт

независимое доказательство монотонной возрастаемости ФСЗ $\mu(\gamma)$. Кроме того, тождество (2.5) указывает на связь между ФСЗ $\mu(\gamma)$ и спектральными функциями $\rho_\alpha(\mu)$ (ступенчатые функции со скачками $1/a_n(\alpha)$ в точках $\mu = \mu_n(\alpha)$) каждого из операторов $L(q, \alpha, \pi/2)$, $\alpha \in (0, \pi]$.

Учитывая известное представление нормировочных постоянных через два спектра (см. [6]), из (2.5) получаем

$$\left.\frac{\partial\mu(\gamma)}{\partial\gamma}\right|_{\gamma=\alpha+\pi n} = \frac{1}{a_n(\alpha)} = \frac{\mu(\alpha+\pi n)-\mu(\alpha_1+\pi n)}{\sin(\alpha-\alpha_1)} \prod_{\substack{k=0\\ k\neq n}}^{\infty} \frac{\mu(\alpha_1+\pi k)-\mu(\alpha+\pi n)}{\mu(\alpha+\pi k)-\mu(\alpha+\pi n)},$$

где α_1 – произвольная точка из $(0, \pi]$ такая, что $0 < \alpha < \alpha_1 \leq \pi$.

Для доказательства асимптотической формулы (1.7) для собственных значений $\mu_n(q, \alpha, \pi/2)$, вначале изучим асимптотическое поведение собственных значений $\mu_n(0, \alpha, \pi/2)$ операторов $L(0, \alpha, \pi/2)$ (с нулевым потенциалом), порождённых краевыми задачами

$$\begin{cases} -y'' = \mu y, \\ y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \quad \alpha \in (0, \pi] \\ y'(\pi) = 0. \end{cases}$$

Собственные значения задачи $L(0, \alpha, \pi/2)$ суть корни характеристического уравнения

$$\chi_0(\alpha, \mu) = \sqrt{\mu}\sin\pi\sqrt{\mu}\sin\alpha + \cos\pi\sqrt{\mu}\cos\alpha = 0. \tag{2.6}$$

При $\alpha = \pi$ уравнение (2.6) принимает вид $\cos\pi\sqrt{\mu} = 0$. Откуда следует, что $\mu_n(0, \pi, \pi/2) = (n + 1/2)^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. При $\alpha = \pi/2$ получаем, что $\mu_n(0, \pi/2, \pi/2) = n^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Далее, обозначим $\mu = \lambda^2$ и запишем уравнение (2.6) в виде

$$\lambda\sin\lambda\pi\sin\alpha + \cos\lambda\pi\cos\alpha = 0. \tag{2.7}$$

Поскольку левая часть уравнения (2.7) – чётная функция от λ и для $n \geq 1$ собственные значения $\mu_n(0, \alpha, \pi/2) \equiv \lambda_n^2(\alpha) \geq \mu_0(\pi) = 1/4 > 0$, то будем рассматривать только неотрицательные корни уравнения (2.7). Так как $\mu_n(0, \pi, \pi/2) = \mu_n(\pi) = (n + 1/2)^2$, то из перемежаемости собственных значений (см. (2.4)) следует, что строго возрастающая функция

$$\lambda(\gamma) \equiv \sqrt{\mu(\gamma)} = \sqrt{\mu(\alpha+\pi n)} = \sqrt{\mu_n(\alpha)} = \lambda_n(\alpha) \quad \text{для} \quad \alpha \in (0, \pi] \quad \text{и} \quad n = 1, 2, \ldots$$

удовлетворяет неравенствам

$$n - \frac{1}{2} = \lambda_{n-1}(\pi) \leq \lambda_n(\alpha) \leq \lambda_n(\pi) = n + \frac{1}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Поэтому положим $\lambda_n(\alpha) = n + b_n(\alpha)$, где строго возрастающая функция $b_n(\alpha)$ должна обладать свойствами

$$b_n(0) = -\frac{1}{2}, \quad b_n(\pi/2) = 0, \quad b_n(\pi) = \frac{1}{2} \tag{2.8}$$

для всех $n = 1, 2, \ldots$. Заметим, что $(n + b_n(0))^2 = \lambda_n^2(0) = \mu_n(0) = \mu_{n-1}(\pi) = \mu(0, \pi n, \pi/2)$, определяют значения $\mu_n(0)$, $\lambda_n(0)$, $b_n(0)$ при $n \geq 1$. Более того, если определим $b_n(-\varepsilon) = b_{n-1}(\pi - \varepsilon) - 1$, $b_n(\pi + \varepsilon) = b_{n+1}(\varepsilon) + 1$, $(0 \leq \varepsilon < \pi/2)$, то точки 0 и π можно считать внутренними точками области определения функции $b_n(\alpha)$. Подставляя $\lambda = n + b_n(\alpha)$ в (2.7), получаем

$$(n + b_n(\alpha)) \sin \pi b_n(\alpha) \sin \alpha + \cos \pi b_n(\alpha) \cos \alpha = 0, \tag{2.9}$$

которые можно записать в виде

$$\left[\sqrt{(n + b_n(\alpha))^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}\right] \cos(\pi b_n(\alpha) - \theta_n(\alpha)) = 0, \tag{2.10}$$

где

$$\theta_n(\alpha) = \arccos \frac{\cos \alpha}{\sqrt{(n + b_n(\alpha))^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Из (2.10) и неравенства $-1/2 \leq b_n(\alpha) \leq 1/2$ получаем

$$b_n(\alpha) = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{\cos \alpha}{\sqrt{(n + b_n(\alpha))^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}} - \frac{1}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{2.11}$$

Из трансцендентного уравнения (2.11) следует, что $b_n(\alpha)$ является как строго возрастающей и ограниченной $-1/2 \leq b_n(\alpha) \leq 1/2$, так и удовлетворяющей свойству (2.8).

Продифференцировав (2.9) по α, получаем

$$b_n'(\alpha) = \frac{\cos \pi b_n(\alpha) \sin \alpha - (n + b_n(\alpha)) \sin \pi b_n(\alpha) \cos \alpha}{\sin \pi b_n(\alpha) \sin \alpha + (n + b_n(\alpha)) \pi \cos \pi b_n(\alpha) \sin \alpha - \pi \sin \pi b_n(\alpha) \cos \alpha},$$

в частности, получаем

$$b_n'(0) = \frac{1}{\pi}\left(n - \frac{1}{2}\right) = b_{n-1}'(\pi), \quad b_n'(\pi/2) = \frac{1}{\pi n}, \quad b_n'(\pi) = \frac{1}{\pi}\left(n + \frac{1}{2}\right) = b_{n+1}'(0).$$

Отсюда видно, что если n возрастает, то производные стремятся к нулю в окрестности точки $\pi/2$, и они растут линейно по n в окрестностях 0 и π.

Заметим также, что при $\sin \alpha \neq 0$ из (2.9) следует

$$\tan \pi b_n(\alpha) = -\frac{\cot \alpha}{n + b_n(\alpha)} = -\frac{\cot \alpha}{n} + \frac{b_n(\alpha) \cot \alpha}{n(n + b_n(\alpha))} = -\frac{\cot \alpha}{n} + r_n(\alpha).$$

Если $\alpha \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$, $(0 < \varepsilon < \pi/2)$, где $\cot\alpha$ равномерно ограничен, то имеем

$$r_n(\alpha) = \frac{b_n(\alpha)\cot\alpha}{n(n + b_n(\alpha))} = O(\frac{1}{n^2})$$

и из (2.11) получаем, что $b_n(\alpha) \to 0$ $(n \to \infty)$ равномерно по $\alpha \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$. Поэтому для $\alpha \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$ имеем $\tan \pi b_n(\alpha) \sim \pi b_n(\alpha)$, а для достаточно больших $n = n(\varepsilon)$ можно записать

$$b_n(\alpha) = -\frac{1}{\pi n}\cot\alpha + O(\frac{1}{n^2}).$$

Таким образом, вне отрезка $(0, \pi]$, ФСЗ $\mu(\gamma) = \mu(0, \gamma, \pi/2)$ семейство операторов $\{L(0, \alpha, \pi/2), \alpha \in (0, \pi]\}$ имеет вид $\mu(\alpha + \pi n) = (n + b_n(\alpha))^2$, $\alpha \in [0, \pi]$, $n = 1, 2, \ldots$. Это равносильно тому, что для любого α, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \pi$ имеет место асимптотическая формула

$$\mu_n(\alpha) = \mu(0, \alpha + \pi n, \pi/2) = n^2 - \frac{2}{\pi}\cot\alpha + O(\frac{1}{n}).$$

При $\alpha = 0$ имеем

$$\mu_n(0) = \mu(0, \pi n, \pi/2) = (n - \frac{1}{2})^2, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Функция $\mu(\gamma)$ растёт на отрезках $(\pi n - \varepsilon, \pi n + \varepsilon)$ и в точках $\gamma = \pi n$ имеем

$$\left.\frac{\partial\mu}{\partial\gamma}\right|_{\gamma=\pi n} = \frac{(2n+1)^2}{2\pi}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Используя операторы преобразования и асимптотический анализ собственных значений из [8] (см. также [1], [6]), получаем

$$\mu_n(q, \alpha, \pi/2) = \mu_n(0, \alpha, \pi/2) + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi q(t)\,dt + r_n(q, \alpha, \pi/2),$$

где $|r_n(q, \alpha, \pi/2)| \leq a_n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty$. Это равносильно (1.7) с $A = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi q(t)\,dt$. Оценку $|r_n(q, \alpha, \pi/2)| \leq a_n$, где $a_n \geq 0$ не зависит от α, можно получить аналогично Лемме 1.4.3 из [8].

Таким образом, формула (1.7) является асимптотической формулой для собственных значений семейства операторов $\{L(q, \alpha, \pi/2), \alpha \in (0, \pi]\}$. При каждом фиксированном $\alpha \in (0, \pi]$ она совпадает с классическими асимптотическими формулами (см. [1], [6]) :

$$\mu_n(\alpha) = n^2 - \frac{2}{\pi}\cot\alpha + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi q(t)\,dt + r_n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} r_n^2 < \infty \tag{2.12}$$

при $\sin\alpha \neq 0$, и

$$\mu_n(\pi) = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi q(t)\,dt + r_n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} r_n^2 < \infty. \tag{2.13}$$

Асимптотическая формула (1.7) более предпочтительна : она позволяет учитывать аналитическую зависимость собственных значений от α. Например, $b_n(\alpha) \to 1/2$ при $\alpha \to \pi$, и из (1.7) получаем (2.13). Отметим, что классические асимптотические формулы игнорируют зависимость $\mu_n(\alpha)$ от α. Отметим, что из (2.12) предельным переходом при $\alpha \to \pi$, невозможно получить (2.13). Ясно, что область ФСЗ $\mu(0, \gamma, \pi/2)$ семейства операторов с нулевым потенциалом есть вся действительная ось. Тот же факт для ФСЗ $\mu(q, \gamma, \pi/2)$ можно доказать, используя то, что любое действительное число μ есть корень характеристического уравнения $\psi(0,\mu)\cos\alpha + \psi'(0,\mu)\sin\alpha = 0$: если $\psi(0,\mu) \neq 0$, то $\cot\alpha = \psi'(0,\mu)/\psi(0,\mu)$, если же $\psi(0,\mu) = 0$, то берём $\alpha = \pi$.

Заметим, что это утверждение можно доказать также исходя из общей теории расширений симметрических операторов (см. [10]). Теорема 1 доказана.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Пусть α и α_1 – произвольные точки из $(0, \pi]$ такие, что $0 < \alpha < \alpha_1 \leq \pi$. Рассмотрим последовательности $\mu_k = \mu(\alpha + \pi k)$, $\nu_k = \mu(\alpha_1 + \pi k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Так как согласно Свойству a) функция $\mu(\gamma)$ строго возрастает, то последовательности $\{\mu_k\}$ и $\{\nu_k\}$ перемежаются

$$\mu_0 < \nu_0 < \mu_1 < \nu_1 < \ldots < \mu_n < \nu_n < \mu_{n+1} < \ldots$$

и согласно Свойству c) имеют асимптотики

$$\mu_k = (k + b_k(\alpha))^2 + A + r_k(\alpha), \quad \sum_{k=0}^{\infty} r_k^2(\alpha) < \infty, \tag{3.1}$$

$$\nu_k = (k + b_k(\alpha_1))^2 + A + r_k(\alpha_1), \quad \sum_{k=0}^{\infty} r_k^2(\alpha_1) < \infty. \tag{3.2}$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.1. Для того, чтобы две последовательности вещественных чисел $\{\mu_k\}$ и $\{\nu_k\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ были бы спектрами краевых задач $L(q, \alpha, \pi/2)$ и $L(q, \alpha_1, \pi/2)$ с вещественным потенциалом $q \in L^2[0, \pi]$, необходимо и достаточно, чтобы они перемежались и удовлетворяли асимптотическим формулам (3.1) и (3.2).

Доказательство аналогично доказательству Теоремы 3.4.1 из [8] (см. также [8], гл. 3, §4, Задача 3), и поэтому опускается.

Из Теоремы 3.1 следует, что существует функция $q_1 \in L^2_{\mathbb{R}}[0,\pi]$ такая, что $\mu_k = \mu_k(q_1,\alpha,\pi/2)$, $\nu_k = \mu_k(q_1,\alpha_1,\pi/2)$, $k = 0,1,2,\ldots$. Величины $a_n = a_n(q_1,\alpha,\pi/2)$, определённые равенствами

$$a_n = \frac{\sin(\alpha_1-\alpha)}{\nu_n-\mu_n}\prod_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{\infty}\frac{\mu_k-\mu_n}{\nu_k-\mu_n}, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

суть нормировочные постоянные задачи $L(q_1,\alpha,\pi/2)$, т.е. $a_n = \int\limits_0^\pi |\varphi(x,\mu_n,\alpha)|^2dx$, где $\varphi(x,\mu_n(\alpha),\alpha)$ – решение уравнения $-\varphi'' + q_1(x)\,\varphi = \mu_n\,\varphi$, удовлетворяющее начальным условиям $\varphi(0,\mu_n,\alpha) = \sin\alpha$, $\varphi'(0,\mu_n,\alpha) = -\cos\alpha$, $n = 0,1,2,\ldots$ (см. [6]). В частности, при $\alpha_1 = \pi$, собственные значения $\mu_n(q_1,\pi,\pi/2) = \mu(\pi+\pi n)$, $n = 0,1,2,\ldots$ и $\mu_n(q_1,\alpha,\pi/2) = \mu(\alpha+\pi n)$ нумеруются согласно (1.4) и (1.5).

Если вместо α_1 рассмотреть любую другую точку α_2 такую, что $0 < \alpha < \alpha_2 \le \pi$, то аналогично, последовательности $\mu_k = \mu(\alpha+\pi k)$ и $\xi_k = \mu(\alpha_2+\pi k)$ перемежаются и для ξ_k имеет место асимптотическая формула

$$\xi_k = (k+b_k(\alpha_2))^2 + A + r_k(\alpha_2) \quad \text{где} \quad \sum_{k=0}^{\infty} r_k^2(\alpha_2) < \infty.$$

Согласно Теореме 3.1 существует вещественный потенциал $q_2 \in L^2[0,\pi]$ такой, что $\mu_k = \mu_k(q_2,\alpha,\pi/2)$ и $\xi_k = \mu_k(q_2,\alpha_2,\pi/2)$, $k = 0,1,2,\ldots$. При этом, величины $a_n(q_2,\alpha,\pi/2)$, определенные равенствами

$$a_n = \frac{\sin(\alpha_2-\alpha)}{\xi_n-\mu_n}\prod_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{\infty}\frac{\mu_k-\mu_n}{\xi_k-\mu_n}, \quad n = 0,1,2,\ldots,$$

являются нормировочными постоянными задачи $L(q_2,\alpha,\pi/2)$. В силу Свойства d) имеем $a_n(q_1,\alpha,\pi/2) = a_n(q_2,\alpha,\pi/2)$, $n = 0,1,2,\ldots$. Следовательно, $\mu_n(q_1,\alpha,\pi/2) = \mu_n(q_2,\alpha,\pi/2)$, $a_n(q_1,\alpha,\pi/2) = a_n(q_2,\alpha,\pi/2)$, $n = 0,1,2,\ldots$ Применяя теорему В. А. Марченко о единственности спектральной функции (см. [9]), заключаем, что $q_1(x) = q_2(x)$ почти всюду. Аналогичное утверждение имеет место для любой пары (α,α_n) такой, что $0 < \alpha < \alpha_n \le \pi$. Если последовательность α_n сходится к α, то из вышеприведённых рассуждений следует, что существует единственный вещественный потенциал $q(x) = q_1(x)$ такой, что $\mu_k(q,\alpha_n,\pi/2) = \mu(\alpha_n+\pi k)$, $k = 0,1,2,\ldots$, $n = 1,2,\ldots$. Отсюда следует, что на сходящихся последовательностях $\alpha_n + \pi k \to \alpha + \pi k$ при $n \to \infty$, $k = 0,1,2,\ldots$,

ФСЗ $\mu(q,\alpha,\pi/2)$ семейства $\{L(q,\alpha,\pi/2), \alpha \in (0,\pi]\}$ совпадает с функцией $\mu(\gamma)$ из Теоремы 2. Поскольку обе эти функции аналитические (Свойство b)), то они совпадают всюду на $(0,\infty)$. Теорема 2 доказана.

Авторы выражают благодарность В. А. Явряну за указание на неограниченность снизу семейства спектров операторов $\{L(q,\alpha,\pi/2), \alpha \in (0,\pi]\}$.

ABSTRACT. Let $\mu(\gamma)$ be a function such that its value at any positive point $\gamma = \alpha + \pi n$, $\alpha \in (0,\pi]$, $n = 0,1,2,\ldots$ coincides with the eigenvalue $\mu_n(\alpha)$ of the Sturm–Liouville problem $-y'' + q(x)\,y = \mu\,y$, $y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0$, $y'(\pi) = 0$, enumerated in a special way. We find necessary and sufficient conditions for some function to possess these properties for real $q \in L^2[0,\pi]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, Введение в Спектральную Теорию. Москва, 1970.
2. E. L. Isaacson, E. Trubowitz, "The inverse Sturm–Liouville problem. I.", Com. Pure and Applied Mathematics, Vol. 36, pp. 767 — 783, 1983.
3. E. L. Isaacson, H. P. Mckean, E. Trubowitz, "The inverse Sturm–Liouville problem. II.", Com. Pure and Applied Mathematics, Vol. 37, pp. 1 — 11, 1984.
4. B. E. J. Dahlberg, E. Trubowitz, "The inverse Sturm–Liouville problem. III.", Com. Pure and Applied Mathematics, Vol. 37, pp. 255 — 267, 1984.
5. Ю. Н. Бибиков, Общий Курс Обыкновенных Дифференциальных Уравнений. Изд. ЛГУ, 1981.
6. Б. М. Левитан, М. Г. Гасымов, "Определение дифференциального уравнения по двум спектрам", УМН, том 19, стр. 1 — 63, 1964.
7. Б. Я. Левин, Распределение Корней Целых Функций. Гостехиздат, 1956.
8. В. А. Марченко, Операторы Штурма–Лиувилля и их Приложения. Киев, 1977.
9. В. А. Марченко, "Некоторые вопросы дифференциальных операторов второго порядка". Труды ММО, том 1, стр. 327 —420, 1952.
10. М. А. Наймарк, Линейные Дифференциальные Операторы, Москва, 1969.

20 мая 2000

Ереванский государственный университет