О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЯДОВ ПО ОБЩЕЙ СИСТЕМЕ ФРАНКЛИНА

М. П. Погосян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 4, 2000

В статье исследуется единственность почти всюду сходящихся рядов по общей системе Франклина.

Определение 1. Квазидвоичным разбиением отрезка $[0,1]$ называется последовательность $\{\mathcal{P}_j : j \geq 0\}$ конечных подмножеств $\mathcal{P}_j = \{t_{j,i} : 0 \leq i \leq 2^j\}$, где $\mathcal{P}_0 = \{0;1\}$; $\mathcal{P}_j \subset \mathcal{P}_{j+1}$ для всех $j \geq 0$; $0 = t_{j,0} < t_{j,1} < \dots < t_{j,2^j} = 1$ и $t_{j+1,2k} = t_{j,k}$, когда $j \geq 0$, $k = 0, \dots, 2^j$, т.е. $\mathcal{P}_{j+1}$ получается из $\mathcal{P}_j$ добавлением по одной точке из каждого интервала $(t_{j,k-1}; t_{j,k})$ для всех $k = 1, \dots, 2^j$. Точки множества $\mathcal{P}_{j+1} \setminus \mathcal{P}_j$ называются точками порядка $j+1$.

Положим $I_{j,k} = [t_{j,k-1}; t_{j,k}]$; $\mathcal{I}_j = \{I_{j,k} : 1 \leq k \leq 2^j\}$ и $\mathcal{I} = \bigcup_{j=0}^{\infty} \mathcal{I}_j$. Элементы множества $\mathcal{I}_j$ называются интервалами порядка j. Положим также $\tau_0 = t_{0,0} = 0$, $\tau_1 = t_{0,1} = 1$ и при $n = 2^j + k$, $k = 1, 2, \dots, 2^j$, $\tau_n = t_{j+1,2k-1}$, так что $\{\tau_n : n \geq 0\} = \{t_{j,i} : j \geq 0; 0 \leq i \leq 2^j\}$.

Пусть $S_n = \{f \in C[0,1] : \ f''(x) = 0 \ \text{ при } \ x \notin \{\tau_k\}_{k=0}^{n}\}$ - линейное пространство кусочно-линейных функций. Тогда размерность S_n равна $n+1$, $S_n \subset S_{n+1}$, а коразмерность $[S_{n+1} : S_n] = 1$. Следовательно, существует единственная функция $f_{n+1} \in S_{n+1}$ такая, что $f_{n+1} \perp S_n$ в смысле $L_2(0,1)$, $\|f_{n+1}\|_{L_2(0,1)} = 1$ и $f_{n+1}(\tau_{n+1}) > 0$. Положим $f_0 \equiv 1$.

Определение 2. Система функций $\{f_n(x) : n \geq 0\}$ называется общей системой Франклина, соответствующей квазидвоичному разбиению $\{\mathcal{P}_j : j \geq 0\}$ отрезка $[0,1]$.

Обозначим через $\lambda_{j,k} = |I_{j,k}| = t_{j,k} - t_{j,k-1}$. Для $n = 2^j + k$, $k = 1, \dots, 2^j$ обозначим через $\langle n \rangle = [t_{j,k-1}; t_{j,k}]$ и $[n] = j$. $\langle n \rangle$ называется интервалом пика функции f_n.

Определение 3. Квазидвоичное разбиение $\{\mathcal{P}_j : j \geq 0\}$ отрезка $[0,1]$ называется сильно регулярным, если существует $\gamma \geq 1$ такое, что

$$\frac{1}{\gamma} \leq \frac{\lambda_{j,k+1}}{\lambda_{j,k}} \leq \gamma \quad \text{для всех} \quad k = 1, ..., 2^j - 1 \quad \text{и} \quad j \geq 0.$$

Через $C_0, C_1, C_2, ...$ обозначим абсолютные постоянные, а через E^c – множество $[0,1] \setminus E$. Для ряда $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k\, f_k(x)$ обозначим через $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, f_k(x)$ и $S^*(x) = \sup_n |S_n(x)|$. В [1] доказано, что если точки разбиения $\{\mathcal{P}_j : j \geq 0\}$ всюду плотны в $[0,1]$ и $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k\, f_k(x)$ – ряд Фурье по общей системе Франклина функции $f \in L_1(0,1)$, то

$$S_n(f,x) \to f(x) \tag{1}$$

п.в. на $[0,1]$ при $n \to +\infty$ и

$$\sup_n \Big|\sum_{k=0}^{n} a_k\, f_k(x)\Big| \leq C \cdot \mathcal{M}(f,x), \tag{2}$$

где $\mathcal{M}(f,x)$ – максимальная функция Харди–Литтлвуда (см., например, [2]), а C – абсолютная постоянная.

Нам нужна следующая оценка (см. [3]) : если $\{\mathcal{P}_j : j \geq 0\}$ – сильно регулярное разбиение отрезка $[0,1]$ и $\{f_n(x)\}$ – соответствующая общая система Франклина, то

$$\|f_n\|_\infty \leq C_0 \sqrt{|\{n\}|^{-1}}. \tag{3}$$

Как увидим ниже, п.в. сходимость частичных сумм $S_n(x)$ не гарантирует единственности ряда. Следовательно, для получения теорем единственности для п.в. сходящихся рядов по общей системе Франклина нужны дополнительные условия на ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\, f_k(x)$. Ниже приводится условие на функцию распределения мажоранты $S^*(x)$ ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\, f_k(x)$.

Прежде, чем перейти к формулировкам теорем, рассмотрим следующий пример. Пусть $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ – классическая система Франклина. Тогда имеет место следующая оценка :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} f_n(0)\, f_n(x)\right| \leq C_1 \cdot n \cdot q^{n \cdot x}, \tag{4}$$

где $0 < q < 1$.

Действительно, поскольку $\sum_{k=0}^{n} f_n(t)\, f_n(x) = K_n(t,x)$ – ядро Дирихле, то имеем $K_n(t,x) \leq C_1 \cdot n \cdot q^{n \cdot |t-x|}$. Отсюда следует, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} f_n(0)\, f_n(x)$ имеет сумму нуль всюду, кроме точки $x = 0$. Легко проверить, что из (4) следует

$$\mu(\{x : S^*(x) > \lambda\}) = O(\frac{1}{\lambda}). \tag{5}$$

Впредь мы будем рассматривать только сильно регулярные квазидвоичные разбиения отрезка $[0,1]$.

Теорема 1. Если $S_n(x) \to f(x)$ п.в. на $[0,1]$ и

$$\liminf_{\lambda \to +\infty} \lambda \cdot \mu(\{x : S^*(x) > \lambda\}) = 0, \tag{6}$$

то $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ – ряд Фурье функции f.

Из (5) следует, что (6) – минимальное условие на функцию распределения мажоранты ряда, обеспечивающее единственность ряда.

Теорема 1 следует из более общего утверждения.

Теорема 2. Пусть $S_n(x)$ сходится п.в. к функции $f(x)$ при $n \to \infty$, $\lambda_k \uparrow +\infty$ и $\lim\limits_{k \to +\infty} \lambda_k \cdot \mu(\{x : S^*(x) > \lambda_k\}) = 0$. Тогда $\lim\limits_{k \to +\infty} \int_0^1 [f(x) \cdot f_n(x)]_{\Lambda_k^{(n)}} dx = a_k$, где

$$[g(t)]_\lambda = \begin{cases} g(t), & \text{когда} \quad |g(t)| \le \lambda, \\ 0, & \text{когда} \quad |g(t)| > \lambda, \end{cases} \qquad \Lambda_k^{(n)} = C_0 \cdot \lambda_k \cdot \sqrt{|\{n\}|^{-1}},$$

с постоянной C_0 из (3).

Напомним, что функция $g(x)$ называется A-интегрируемой на $[0,1]$, если $\mu(\{t \in [0,1] : |g(t)| > \lambda\}) = o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ и существует $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \int_0^1 [g(t)]_\lambda dt = (A) \int_0^1 g(t)\, dt$. Отметим, что из условия

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda \cdot \mu(\{x : S^*(x) > \lambda\}) = 0 \tag{7}$$

следует п.в. сходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ (см. [4]). Следовательно, из Теоремы 2 вытекает

Теорема 3. Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda \cdot \mu(\{x : S^*(x) > \lambda\}) = 0$, то он является рядом Фурье по общей системе Франклина некоторой функции $f(x)$ в смысле A-интегрирования.

Известно (см. [5]), что если $f \in L_1(0,1)$, то

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \cdot \mu(\{x : \mathcal{M}(f,x) > \lambda\}) = 0. \tag{8}$$

Следовательно, из (1) – (4) и Теоремы 1 вытекает

Теорема 4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ является рядом Фурье по общей системе Франклина функции $f \in L_1(0,1)$ тогда и только тогда, когда выполняются

следующие условия : $\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = f(x)$ п.в. на $[0,1]$ и $\liminf_{\lambda\to+\infty} \lambda\,\mu(\{x\in[0,1]:$ $S^*(x) > \lambda\}) = 0$.

Теоремы 1 – 4 являются обобщениями теорем Г. Г. Геворкяна [6] для классической системы Франклина.

Для доказательства Теоремы 2 нам понадобятся несколько лемм.

Положим $E_\lambda = \{t\in[0,1]: S^*(t) > \lambda\}$ и $B_\lambda = \{x\in[0,1]: \mathcal{M}^*(\chi_{E_\lambda}, x) > 1/2\}$, где

$$\mathcal{M}^*(f,x) = \sup_{\substack{I\ni x\\ I\in\mathcal{I}}} \frac{1}{|I|}\int_I |f(t)|\,dt.$$

Ясно, что $E_\lambda \subset B_\lambda$ и $\mu(B_\lambda) \le 2\cdot\mu(E_\lambda)$.

Лемма 1. Для любого $\lambda > 0$ справедливо неравенство

$$\int_{B_\lambda^c} \sup_N \Big| \sum_{\substack{(n)\subset B_\lambda\\ n\le N}} a_n\,f_n(t)\Big|\,dt \le C_2\,\lambda\,\mu(E_\lambda). \tag{9}$$

Лемма 2. Для любого $\lambda > 0$ имеем

$$\int_{B_\lambda} \sup_N \Big| \sum_{\substack{(n)\in B_\lambda\\ n\le N}} a_n\,f_n(t)\Big|\,dt \le C_3\,\lambda\,\mu(E_\lambda). \tag{10}$$

Доказательство Леммы 1 : Положим $\mathcal{N}_1^\lambda = \{n \in N : \{n\} \subset B_\lambda\}$ и $\mathcal{N}_2^\lambda = N \setminus \mathcal{N}_1^\lambda$, где N – множество неотрицательных целых чисел. Пусть $n \in \mathcal{N}_2^\lambda$, тогда $\|a_n\,f_n(x)\|_\infty \le C_4\cdot\lambda$. Действительно, из $n\in\mathcal{N}_2^\lambda$ получим $\{n\} \not\subset B_\lambda$, и поэтому $\mu(\{n\}\cap E_\lambda) < \dfrac{1}{2}\mu(\{n\})$. Кроме того, на множестве E_λ^c имеем $\sup_N |\sum_{n=0}^N a_n\,f_n(t)| \le \lambda$, и, следовательно, $|a_n\,f_n(t)| \le 2\cdot\lambda$, когда $t\in E_\lambda^c$. С точностью до счетного множества точек имеем $B_\lambda = \bigcup_{k,j} I_k^{(j,\lambda)}$, где $I_k^{(j,\lambda)}$ – квазидвоичный интервал порядка k (см. [4]). Положим

$$\varphi_1^\lambda(t) = \begin{cases} 0, & \text{когда} \quad t\notin B_\lambda,\\ \sum_{\substack{(n)\cap I_{k_0}^{(j,\lambda)}=\emptyset\\ [n]\ge k_0\\ n\in\mathcal{N}_2^\lambda}} |a_n\,f_n(t)|, & \text{когда} \quad t\in I_{k_0}^{(j,\lambda)}. \end{cases}$$

Тогда

$$\int_0^1 \varphi_1^\lambda(t)\,dt = \sum_{k_0,j}\int_{I_{k_0}^{(j,\lambda)}} \sum_{\substack{(n)\cap I_{k_0}^{(j,\lambda)}=\emptyset\\ [n]\ge k_0\\ n\in\mathcal{N}_2^\lambda}} |a_n\,f_n(t)| \le C\cdot\lambda\cdot\sum_{k_0,j}\mu(I_{k_0}^{(j,\lambda)}) = C\cdot\lambda\cdot\mu(B_\lambda).$$

Представим множество B_λ в виде $B_\lambda = \bigcup_{q=1}^\infty I_q$, где интервалы I_q не имеют общих концов. Зафиксируем некоторое q и рассмотрим наибольший квазидвоичный интервал, содержащийся в I_q. Пусть это будет интервал I_{j,k_0}. Через $I_{k_0,k}^{(j_0,\lambda)}$ обозначим наибольший интервал с концами порядка k, содержащийся в I_q. Положим

$$S_{j_0,k_0,k,m}(t) = \sum_{\substack{(n)\subset I_{k_0,k}^{(j_0,\lambda)} \\ |n|=k \\ n\le m}} a_n\, f_n(t) = \sum_{\substack{(n)\subset I_{k_0,k}^{(j_0,\lambda)} \\ |n|=k \\ n\in N_1^\lambda \\ n\le m}} a_n\, f_n(t).$$

Последнее равенство выполняется, поскольку если существует $n \in \mathcal{N}_2^\lambda$ такое, что $\{n\} \subset I_{k_0,k}^{(j_0,\lambda)}$, то $\{n\} \not\subset B_\lambda$. Это противоречит условиям $\{n\} \subset I_{k_0,k}^{(j_0,\lambda)}$ и $I_{k_0,k}^{(j_0,\lambda)} \subset B_\lambda$.

Следовательно, $|S_{j_0,k_0,k,m}(t)| \le C_8 \cdot \lambda$ при $t \in J$, где J – интервал порядка k, ближайший к $I_{k_0,k}^{(j_0,\lambda)}$ справа (см. [4]). Пусть

$$\varphi_{k_0}^{(j,\lambda)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{когда} \quad x \in I_{k_0}^{(j,\lambda)}, \\ \sum_{k=k_0}^{p-1} \max_m |S_{j,k_0,k,m}(x)|, & \text{при} \quad x \in I_{k_0,p}^{(j,\lambda)} \setminus I_{k_0,p-1}^{(j,\lambda)}\ (p > k_0) \\ \sum_{k=k_0}^{\infty} \max_m |S_{j,k_0,k,m}(x)|, & \text{где} \quad x \notin \cup_{k=k_0}^{\infty} I_{k_0,k}^{(j,\lambda)}. \end{cases}$$

Тогда $\int_0^1 \varphi_{k_0}^{(j,\lambda)}(x)\,dx \le C \cdot \lambda \cdot \mu(I_{k_0}^{(j,\lambda)})$.

Имеем также $\sup_N |\sum_{\substack{(n)\subset B_\lambda \\ n\le N}} a_n\, f_n(t)| \le \sum_{k_0,j} \varphi_{k_0}^{(j,\lambda)}(t)$ при $t \notin B_\lambda$. Тогда

$$\int_{B_\lambda^c} \sup_N |\sum_{\substack{(n)\subset B_\lambda \\ n\le N}} a_n\, f_n(t)|\,dt \le \int_{B_\lambda^c} \sum_{k_0,j} \varphi_{k_0}^{(j,\lambda)}(t)\,dt \le$$

$$\le \int_0^1 \sum_{k_0,j} \varphi_{k_0}^{(j,\lambda)}(t)\,dt \le C \cdot \lambda \cdot \sum_{k_0,j} \mu(I_{k_0}^{(j,\lambda)}) = C \cdot \lambda \cdot \mu(B_\lambda).$$

Лемма 1 доказана.

Доказательство Леммы 2 : В [1] доказано, что $|\sum_{\substack{(n)\not\subset B_\lambda \\ n\le N}} a_n\, f_n(t)| \le C \cdot \lambda + \varphi_1(\lambda)(t) + \sum_{k_0,j} \varphi_{k_0}^{(j,\lambda)}(t)$ при $t \in B_\lambda$. Следовательно

$$\sup_N |\sum_{\substack{(n)\not\subset B_\lambda \\ n\le N}} a_n\, f_n(t)| \le C \cdot \lambda + \varphi_1(\lambda)(t) + \sum_{k_0,j} \varphi_{k_0}^{(j,\lambda)}(t)$$

при $t \in B_\lambda$, т.е.

$$\int_{B_\lambda} \sup_N |\sum_{\substack{(n)\not\subset B_\lambda \\ n\le N}} a_n\, f_n(t)| \le C_{10} \cdot \lambda \cdot \mu(B_\lambda).$$

Доказательство Теоремы 2 : Пусть $\lim_{k\to+\infty} \lambda_k \cdot \mu(\{t \in [0,1] : S^*(t) > \lambda_k\}) = 0$ и $S_n(x) \to f(x)$ при $n \to +\infty$ п.в. на $[0,1]$. Тогда

$$\int_0^1 [f(t)\, f_n(t)]_{\Lambda_k^{(n)}}\,dt = \int_{B_{\lambda_k}} [f(t)\, f_n(t)]_{\Lambda_k^{(n)}}\,dt + \int_{B_{\lambda_k}^c} [f(t)\, f_n(t)]_{\Lambda_k^{(n)}}\,dt,$$

где $\Lambda_k^{(n)} := C_0 \cdot \lambda_k \cdot |\{n\}|^{-\frac{1}{2}}$. Имеем

$$\left|\int_{B_{\lambda_k}} [f(t)\, f_n(t)]_{\Lambda_k^{(n)}}\, dt\right| \le \Lambda_k^{(n)} \cdot \mu(B_{\lambda_k}) \le C_0 \cdot \lambda_k \cdot |\{n\}|^{-1/2} \cdot \mu(B_{\lambda_k}) \le$$
$$\le C_0 \cdot \lambda_k \cdot |\{n\}|^{-1/2} \cdot \mu(E_{\lambda_k}) \to 0, \quad k \to +\infty.$$

Следовательно

$$\int_0^1 [f(t)\, f_n(t)]_{\Lambda_k^{(n)}}\, dt = \int_{B^c_{\lambda_k}} [f(t)\, f_n(t)]_{\Lambda_k^{(n)}} dt + o(1), \quad k \to +\infty. \tag{11}$$

При $x \in B^c_{\lambda_k}$ имеем $x \in E^c_{\lambda_k}$ (поскольку из $E_\lambda \subset B_\lambda$ вытекает $B^c_\lambda \subset E^c_\lambda$), следовательно, $\sup_N |\sum_{n=0}^N a_n\, f_n(x)| \le \lambda_k$, и наконец, $|f(x)| \le \lambda_k$. С другой стороны, $|f_n(t)| < C_0 \cdot |\{n\}|^{-1/2}$ для любого n, и из (11) получим

$$\int_0^1 [f(t)\, f_n(t)]_{\Lambda_k^{(n)}}\, dt = \int_{B^c_{\lambda_k}} f(t)\, f_n(t)\, dt + o(1), \quad k \to +\infty. \tag{12}$$

Действительно, на множестве $B^c_{\lambda_k}$ имеем $f \cdot f_n = [f \cdot f_n]_{\Lambda_k^{(n)}}$ (если $x \in B^c_{\lambda_k}$, то $|f(x)\, f_n(x)| \le \lambda_k \cdot C_0 \cdot |\{n\}|^{-1/2} = \Lambda_k^{(n)}$). Учитывая Лемму 1, из (12) получим

$$\int_0^1 [f(t)\, f_n(t)]_{\Lambda_k^{(n)}}\, dt = \int_{B^c_{\lambda_k}} \{ \sum_{\{m\} \subset B_{\lambda_k}} a_m\, f_m(t) + \sum_{\{m\} \not\subset B_{\lambda_k}} a_m\, f_m(t)\} \cdot f_n(t)\, dt +$$
$$+ o(1) = \int_{B^c_{\lambda_k}} (\sum_{\{m\} \not\subset B_{\lambda_k}} a_m\, f_m(t)) \cdot f_n(t)\, dt + o(1).$$

Из Леммы 2 следует, что

$$\int_0^1 [f(t)\, f_n(t)]_{\Lambda_k^{(n)}}\, dt = \int_0^1 \left(\sum_{\{m\} \not\subset B_{\lambda_k}} a_m\, f_m(t) \right) \cdot f_n(t) dt + o(1).$$

Так как ряд $\sum_{\{m\} \not\subset B_{\lambda_k}} a_m\, f_m(t)$ имеет интегрируемую мажоранту, то он является рядом Фурье–Франклина некоторой интегрируемой функции. Следовательно, взяв k достаточно большим, будем иметь $\{m\} \not\subset B_{\lambda_k}$. Таким образом, получим

$$\lim_{k \to +\infty} \int_0^1 [f(t)\, f_n(t)]_{\Lambda_k^{(n)}}\, dt = \lim_{k \to +\infty} \int_0^1 (\sum_{\{m\} \not\subset B_{\lambda_k}} a_m\, f_m(t)) \cdot f_n(t)\, dt = a_n.$$

Теорема 2 доказана.

ABSTRACT. The paper investigates uniqueness of a.e. convergent series by general Franklin system.

ЛИТЕРАТУРА

1. Z. Ciesielski, A. Kamont, "Projection onto piecewise linear functions", Funct. Approx. Comment. Math., vol. 25, pp. 129 — 143, 1997.
2. Б. Кашин, А. Саакян, Ортогональные Ряды, Наука, Москва, 1984.
3. G. G. Gevorkyan, A. Kamont, "On general Franklin systems", Dissertationes Mathematicae, CCCLXXIV, 1998.
4. М. П. Погосян, "Критерий почти всюду сходимости рядов по общей системе Франклина", Изв. НАН Армении, Математика, том 35, № 2, стр. 61 — 73, 2000.
5. М. Гусман, Дифференцирование Интегралов в $\mathbb{R}^n$", Мир, Москва, 1973.
6. Г. Г. Геворкян, "Мажоранта и единственность рядов по системе Франклина", Мат. заметки, том 59(4), стр. 521 — 545, 1996.
7. Г. Г. Геворкян, "О рядах по системе Франклина", Analysis Math., том 16, стр. 87 — 114, 1990.

15 марта 2000

Ереванский государственный университет