О СУММИРУЕМОСТИ ПОЧТИ ВСЮДУ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

А. А. Талалян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 4, 2000

В статье указывается класс линейных регулярных методов суммирования, обладающий тем свойством, что из суммируемости почти всюду ортогональных рядов одновременно всеми методами этого класса следует их сходимость почти всюду. Доказывается также, что суммируемость числового ряда всеми методами указанного класса не влечёт сходимости этого ряда.

§1. ЛЕММА

Лемма 1. Пусть $\{\omega(k)\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условиям

$$1 \le \omega(1) \le \cdots \le \omega(k) \le \cdots, \quad \lim_{k\to\infty} \omega(k) = \infty. \tag{1.1}$$

Тогда существует последовательность $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что

$$2 < \mu_1 \le \cdots \le \mu_n \le \cdots, \quad \lim_{n\to\infty} \mu_n = \infty, \quad \mu_n = o(n), \tag{1.2}$$

$$\left|\frac{k}{\mu_k}\right| \le C_1\omega(k), \quad \sum_{n=1}^{k-1} e^{-2|k/n|^{\mu_n}} \le C_2\omega(k), \quad k \ge 2, \tag{1.3}$$

где C_1 и C_2 – постоянные, не зависящие от k.

Доказательство : Пользуясь условием (1.1) выберем возрастающую последовательность $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ натуральных чисел таких, что

$$2^{\nu-j} > \nu \quad \text{при} \quad \nu \ge k_j, \quad j = 1, 2, ..., \tag{1.4}$$

$$\omega(k) \ge 2^j \quad \text{при} \quad 2^{k_j} \le k < 2^{k_{j+1}}, \quad j = 1, 2, ... \tag{1.5}$$

Положим

$$\mu_n = 2^{\nu}\epsilon_{\nu} \quad \text{при} \quad 2^{\nu} \le n < 2^{\nu+1}, \quad \nu = 0, 1, ..., \tag{1.6}$$

где

$$\varepsilon_\nu = 2^{-j} \quad \text{при} \quad k_j \le \nu < k_{j+1}, \quad j = 0, 1, \ldots, \quad k_0 = 1. \tag{1.7}$$

Из (1.4), (1.6) и (1.7) следует, что

$$\mu_n = 2^\nu \varepsilon_\nu \ge \nu \quad \text{при} \quad \nu \ge k_1, \quad 2^\nu \le n < 2^{\nu+1}. \tag{1.8}$$

Так как $\varepsilon_\nu = 1$ при $\nu < k_1$, то имеют место следующие неравенства :

$$\mu_n = 2^\nu \varepsilon_\nu \ge \nu \quad \text{при} \quad 2^\nu \le n < 2^{\nu+1}. \tag{1.9}$$

Из (1.4), (1.6) и (1.7) следует, что μ_n удовлетворяет (1.2). Далее, если ν удовлетворяет условиям $2^\nu \le k < 2^{\nu+1}$, то в силу (1.7) имеем

$$\frac{k}{\mu_k} = \frac{k}{2^\nu \varepsilon_\nu} < 2^{j+1} \quad \text{при} \quad k_j \le \nu < k_{j+1}, \quad j = 0, 1, \ldots \tag{1.10}$$

Из (1.5) – (1.7) и (1.10) следует, что $\dfrac{k}{\mu_k} \le 2\omega(k)$ для всех k, $2^{k_j} \le k < 2^{k_{j+1}}$. С другой стороны, если $1 \le k < 2^{k_1}$, то $\dfrac{k}{\mu_k} \le 2 \le 2\omega(k)$. Этим доказывается первое неравенство условия (1.3). Для доказательства второго неравенства заметим, что

$$\sum_{n=1}^{k-1} \exp\left[-2\left(\frac{k}{n}\right)^{\mu_n}\right] \le \sum_{n=1}^{k-1} \exp\left[-\left(\frac{k}{n}\right)^{\mu_n}\right], \quad k \ge 2. \tag{1.11}$$

Имеем

$$\sum_{n=1}^{k} \exp\left[-\left(\frac{k}{n}\right)^{\mu_n}\right] = \sum_{n=1}^{2^\nu} \exp\left[-\left(\frac{k}{n}\right)^{\mu_n}\right] + \sum_{n=2^\nu+1}^{k} \exp\left[-\left(\frac{k}{n}\right)^{\mu_n}\right], \tag{1.12}$$

где $2^\nu \le k < 2^{\nu+1}$, $k_j \le \nu < k_{j+1}$, $j = 1, 2\ldots$ и при $k = 2^\nu$ второе слагаемое в (1.12) отсутствует. В силу (1.6) и (1.7) имеем

$$A_3 = \sum_{n=2^\nu+1}^{k} \exp\left[-\left(\frac{k}{n}\right)^{\mu_n}\right] = \sum_{n=2^\nu+1}^{k} \exp\left[-\left(1 + \frac{k-n}{n}\right)^{2^\nu \varepsilon_\nu}\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{k-2^\nu-1} \exp\left[-\left(1 + \frac{n}{k-n}\right)^{2^\nu \varepsilon_\nu}\right] \le e^{-1} + \sum_{n=1}^{k-2^\nu} \exp\left[-\left(1 + \frac{n}{k-n}\right)^{2^\nu \varepsilon_\nu}\right]. \tag{1.13}$$

Так как $n \le k - n \le 2^\nu$, то из неравенства $(1+\alpha)^{1/\alpha} \ge 2$ при $\alpha \le 1$ следует

$$\left(1 + \frac{n}{k-n}\right)^{2^\nu \varepsilon_\nu} > 2^{2^\nu \varepsilon_\nu \frac{n}{k-n}} > 2^{n\varepsilon_\nu}. \tag{1.14}$$

Легко видеть, что из (1.13) и (1.14) следует

$$A_3 \le e^{-1} + \sum_{n=1}^{k-2^\nu} \exp[-2^{n\varepsilon_\nu}] \le C_0 + \sum_{n=1}^{2^\nu} \exp[-2n\varepsilon_\nu] < \frac{C_1}{\varepsilon_\nu}. \tag{1.15}$$

Пусть

$$A_1 = \sum_{n=1}^{2^{\nu-1}} \exp\left[-\left(\frac{k}{n}\right)^{\mu_n}\right], \quad A_2 = \sum_{n=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} \exp\left[-\left(\frac{k}{n}\right)^{\mu_n}\right]. \tag{1.16}$$

Используя (1.8), получим

$$A_1 \le 1 + \sum_{j=0}^{\nu-2} \sum_{n=2^j+1}^{2^{j+1}} \exp\left[-\left(\frac{k}{n}\right)^{\mu_n}\right] \le 1 + \sum_{j=0}^{\nu-2} \sum_{n=2^j+1}^{2^{j+1}} \exp\left[-(2^{\nu-j-1})^j\right] \le$$

$$\le 1 + \sum_{j=0}^{\nu-2} 2^j 2^{-2^j} \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} < C. \tag{1.17}$$

Далее,

$$A_2 = \sum_{n=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} \exp\left[-\left(\frac{k}{n}\right)^{2^{\nu-1}} \varepsilon_{\nu-1}\right] =$$

$$= \sum_{n=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} \exp\left[-\left(1+\frac{2^\nu-n}{n}\right)^{\frac{n}{2^\nu-n}2^{\nu-1}\varepsilon_{\nu-1}\frac{2^\nu-n}{n}}\right].$$

Из $\dfrac{2^\nu-n}{n} < 1$ имеем

$$\left(1+\frac{2^\nu-n}{n}\right)^{\frac{n}{2^\nu-n}} > 2.$$

Следовательно, получим

$$A_2 \le \sum_{n=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} \exp\left[-2^{\varepsilon_{\nu-1}2^{\nu-1}\frac{2^\nu-n}{n}}\right] \le \sum_{n=0}^{2^{\nu-1}} \exp\left[-2^{\varepsilon_{\nu-1}n/2}\right] < \frac{C}{\varepsilon_{\nu-1}}, \tag{1.18}$$

где согласно (1.7), $\varepsilon_{\nu-1} \ge 2\varepsilon_\nu$. Суммируя (1.12), (1.13), (1.15) – (1.18), получим

$$\sum_{n=1}^{k} \exp\left[-\left(\frac{k}{n}\right)^{\mu_n}\right] \le \frac{C_1}{\varepsilon_\nu}, \quad 2^\nu \le k < 2^{\nu+1}, \quad \nu = 1, 2, \dots \tag{1.19}$$

Таким образом, из (1.5), (1.7), (1.11) и (1.19) вытекает (см. также (1.10))

$$\sum_{n=1}^{k-1} \exp\left[-2\left(\frac{k}{n}\right)^{\mu_n}\right] \le C_2\omega(k), \quad k \ge 2.$$

Лемма 1 доказана.

§2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty, \tag{2.1}$$

где $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная система на отрезке $[a,b]$. Для заданной последовательности $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющей (1.2), рассмотрим средние

$$T_{\mu_n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{k}{n}\right)^{\mu_n}\right] a_k \varphi_k(x), \quad n = 1, 2, \dots \tag{2.2}$$

Ряды в правой части (2.2) сходятся почти всюду, и почти всюду на $[a,b]$ выполняются равенства

$$T_{\mu_n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k^{(1)}(\mu_n) S_k(x), \quad T_{\mu_n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \Delta_k^{(2)}(\mu_n) \sigma_k(x), \tag{2.3}$$

где $S_k(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j \varphi_j(x)$, $\sigma_k(x) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} S_j(x)$, $\Delta_k^{(2)}(\mu_n) = \Delta_k^{(1)}(\mu_n) - \Delta_{k+1}^{(1)}(\mu_n)$,

$$\Delta_k^{(1)}(\mu_n) = \exp\left[-\left(\frac{k}{n}\right)^{\mu_n}\right] - \exp\left[-\left(\frac{k+1}{n}\right)^{\mu_n}\right].$$

Равенства (2.3) получаются последовательным применением преобразования Абеля, которое возможно, поскольку

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 \varphi_k^2(x) < \infty \quad \text{п.в. на } [a,b].$$

Следовательно

$$|S_m(x)| \le \sqrt{m+1} \sqrt{\sum_{k=0}^{m} a_k^2 \varphi_k^2(x)} = O(\sqrt{m}) \quad \text{п.в. на } [a,b].$$

Имеем

$$\sum_{k=0}^{m} \exp\left[-\left(\frac{k}{n}\right)^{\mu_n}\right] a_k \varphi_k(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \left(\exp\left[-\left(\frac{k}{n}\right)^{\mu_n}\right] - \right.$$

$$\left. - \exp\left[-\left(\frac{k+1}{n}\right)^{\mu_n}\right]\right) S_k(x) + \exp\left[-\left(\frac{m}{n}\right)^{\mu_n}\right] S_m(x),$$

откуда следует

$$\lim_{k\to\infty} \exp\left[-\left(\frac{k}{n}\right)^{\mu_n}\right] S_k(x) = 0 \quad \text{п.в. на } [a,b].$$

Из последних двух равенств следует первое равенство из (2.3). Второе равенство из (2.3) доказывается аналогично.

Линейный метод суммирования, определяемый матрицей $||a_{nk}||$, где $a_{nk} = \Delta_k^{(1)}(\mu_n)$ и μ_n удовлетворяют условиям (1.2), является положительным регулярным методом суммирования, обладающим свойством

$$\lim_{n\to\infty} \max_k |a_{nk}| = 0. \tag{2.4}$$

Действительно, имеем

$$\Delta_k^{(1)}(\mu_n) = \frac{1}{n}\mu_n \left(\frac{k+\theta}{n}\right)^{\mu_n - 1} \exp\left[-\left(\frac{k+\theta}{n}\right)^{\mu_n}\right], \quad 0 \le \theta \le 1, \tag{2.5}$$

и согласно (1.2) остается проверить, что функции $x^{\mu_n - 1}\exp[-x^{\mu_n}]$ равномерно ограничены на $[0,\infty)$. Максимум функции $x^{\mu_n - 1}\exp[-x^{\mu_n}]$ достигается в точке $x_0 = (\mu_{n-1}/\mu_n)^{1/\mu_n}$. Следовательно

$$\max_x \left(x^{\mu_n - 1}\exp[-x^{\mu_n}]\right) \le \left(\frac{\mu_{n-1}}{\mu_n}\right)^{(\mu_n - 1)/\mu_n} \le 1, \quad n \ge 1. \tag{2.6}$$

Теорема 1. Если средние $T_{\mu_n}(x)$ сходятся почти всюду для любой последовательности $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющей условию (1.2), то ряд (2.1) сходится почти всюду.

Доказательство : Согласно (2.1) существует последовательность $\omega(k)$, удовлетворяющая условию (1.1) такая, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 \omega(k) < \infty. \tag{2.7}$$

В силу Леммы 1 существует последовательность $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющая (1.2) и (1.3), где $\omega(k)$ удовлетворяет (2.7). Положим

$$Q_{n,\mu_n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \exp\left[-\left(\frac{k}{n}\right)^{\mu_n}\right] a_k \varphi_k(x),$$

$$R_{n,\mu_n}(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{k}{n}\right)^{\mu_n}\right] a_k \varphi_k(x). \tag{2.8}$$

Ясно, что

$$||Q_{n,\mu_n}(x) - S_n||^2 = \int_a^b |Q_{n,\mu_n}(x) - S_n(x)|^2 dx = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \exp\left[-\left(\frac{k}{n}\right)^{\mu_n}\right]\right)^2 a_k^2,$$

$$||R_{n,\mu_n}(x)||^2 = \int_a^b R_{n,\mu_n}^2(x)\, dx = \sum_{k=n+1}^{\infty} \exp\left[-2\left(\frac{k}{n}\right)^{\mu_n}\right] a_k^2. \tag{2.9}$$

Так как $1 - e^{-x} \le x$, то получим

$$\|Q_{n,\mu_n}(x) - S_n(x)\|^2 \le \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{2\mu_n} a_k^2,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Q_{n,\mu_n}(x) - S_n(x)\|^2 \le \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \sum_{n=k}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^{2\mu_n} \le \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 k^{2\mu_k} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^{2\mu_k}}.$$

Имеем также

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^{2\mu_k}} \le \frac{1}{(2\mu_k - 1)(k-1)^{2\mu_k - 1}},$$

$$\frac{k^{2\mu_k}}{(2\mu_k - 1)(k-1)^{2\mu_k - 1}} = \frac{k}{2\mu_k - 1} \left[\left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^{k-1}\right]^{(2\mu_k - 1)/(k-1)} \le$$

$$\le \frac{k}{2\mu_k - 1} \exp\left(\frac{2\mu_k - 1}{k-1}\right).$$

Учитывая (1.1) и (1.2), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Q_{n,\mu_n}(x) - S_n(x)\|^2 \le C \sum_{k=1}^{\infty} \omega(k) a_k^2 < \infty. \tag{2.10}$$

Из (2.7) и (2.10) следует, что

$$\lim_{n \to \infty} (Q_{n,\mu_n}(x) - S_n(x)) = 0 \quad \text{п.в. на } [a,b]. \tag{2.11}$$

Используя (2.9), имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|R_{n,\mu_n}(x)\|^2 = \sum_{k=2}^{\infty} a_k^2 \sum_{n=1}^{k-1} \exp\left[-2\left(\frac{k}{n}\right)^{\mu_n}\right].$$

Следовательно, согласно выбору последовательности $\{\mu_n\}$ (см. второе неравенство в (1.3)), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|R_{n,\mu_n}(x)\|^2 \le \sum_{k=2}^{\infty} \omega(k) a_k^2 < \infty. \tag{2.12}$$

Из (2.12) следует, что

$$\lim_{n \to \infty} R_{n,\mu_n}(x) = 0 \quad \text{п.в. на } [a,b]. \tag{2.13}$$

Из (2.2), (2.8), (2.11) и (2.13) получим

$$\lim_{n \to \infty} (T_{\mu_n}(x) - S_n(x)) = 0 \quad \text{п.в. на } [a,b]. \tag{2.14}$$

Так как по условию Теоремы 1 средние $T_{\mu_n}(x)$ сходятся почти всюду при $n \to \infty$, то из (2.14) следует сходимость почти всюду на $[a,b]$ ряда (2.1). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. **Если чезаровские средние $\sigma_k(x)$ ортогонального ряда (2.1) сходятся к $f(x)$ почти всюду на $[a,b]$ со скоростью $O(1/k)$, т.е. для почти всех $x \in [a,b]$ существует постоянная $C(x) > 0$ такая, что**

$$|\sigma_k(x) - f(x)| \le \frac{C(x)}{k}, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{2.15}$$

то ряд (2.1) сходится почти всюду.

Доказательство : По Теореме 1 достаточно доказать, что из (2.15) следует почти всюду на $[a,b]$ сходимость средних $T_{\mu_n}(x)$ к $f(x)$, для любой последовательности $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющей (1.2). Заметим, что вторая производная функции $\exp[-x^{\mu_n}]$ положительна справа от точки $x_n = ((\mu_n - 1)/\mu_n)^{1/\mu_n}$, и отрицательна на $(0, x_n)$. Обозначив через k_n наибольшее натуральное число, для которого $k_n \le nx_n$, получим

$$\begin{cases} \Delta_k^{(2)}(\mu_n) \le 0 & \text{при} \quad k \le k_n - 2, \\ \Delta_k^{(2)}(\mu_n) \ge 0 & \text{при} \quad k \ge k_n + 1. \end{cases} \tag{2.16}$$

Так как

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k^{(2)}(\mu_n)(k+1) f(x),$$

то из (2.3), (2.15) и (2.16) получим

$$|T_{\mu_n}(x) - f(x)| \le C(x) \left(\sum_{k=0}^{k_n - 2} \left|\Delta_k^{(2)}(\mu_n)\right| + \left|\Delta_{k_n-1}^{(2)}(\mu_n)\right| + \right.$$

$$\left. + \left|\Delta_{k_n}^{(2)}(\mu_n)\right| + \sum_{k=k_n+1}^{\infty} \left|\Delta_k^{(2)}(\mu_n)\right| \right). \tag{2.17}$$

Из (2.16) следует, что

$$\sum_{k=0}^{k_n-2} \left|\Delta_k^{(2)}(\mu_n)\right| = \left|\Delta_0^{(1)} - \Delta_{k_n}^{(1)}(0)\right| =$$

$$= \left|1 - \exp\left[-\left(\frac{1}{n}\right)^{\mu_n}\right] - \exp\left[-\left(\frac{k_n - 1}{n}\right)^{\mu_n}\right] + \exp\left[-\left(\frac{k_n}{n}\right)^{\mu_n}\right]\right|, \tag{2.18}$$

$$\sum_{k=k_n+1}^{\infty} \left|\Delta_k^{(2)}(\mu_n)\right| = \left|\sum_{k=k_n+1}^{\infty} \Delta_k^{(2)}(\mu_n)\right| =$$

$$= \left|\exp\left[-\left(\frac{k_n + 1}{n}\right)^{\mu_n}\right] - \exp\left[-\left(\frac{k_n + 2}{n}\right)^{\mu_n}\right]\right|. \tag{2.19}$$

С другой стороны, из (2.5) и (2.6) следует

$$\left|\Delta_k^{(1)}(\mu_n)\right| \le \frac{\mu_n}{n}, \quad k = 1, 2, \dots \tag{2.20}$$

Из (2.17) – (2.20) получим

$$|T_{\mu_n}(x) - f(x)| \le 7C(x)\frac{\mu_n}{n},$$

где $\frac{\mu_n}{n} \to 0$ при $n \to \infty$ согласно (1.2). Таким образом, для любой последовательности $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющей (1.2), почти всюду на $[a, b]$ имеем $T_{\mu_n}(x) \to f(x)$. Теорема 2 доказана.

Замечание 1. В Теореме 1 исключительное множество меры нуль, на котором средние $T_{\mu_n}(x)$ могут расходиться, зависит от $\{\mu_n\}$. Кроме того, нетрудно видеть, что для числовых рядов Теорема 1 не верна. Например, расходящийся ряд $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ суммируется к 1/2 одновременно всеми методами T_{μ_n}. Обозначим через A_n T_{μ_n} – средние указанного ряда. Имеем

$$A_n = \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{k}{n}\right)^{\mu_n}\right](-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\exp\left[-\left(\frac{2k}{n}\right)^{\mu_n}\right] -\right.$$

$$\left. - \exp\left[-\left(\frac{2k+1}{n}\right)^{\mu_n}\right]\right) = \mu_n \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\theta(n,k)}{n}\right)^{\mu_n - 1}\exp\left[-\left(\frac{\theta(n,k)}{n}\right)^{\mu_n}\right], \quad (2.21)$$

где $2k \le \theta(n, k) \le 2k + 1$. Положим

$$\varphi_n(x) = (2x)^{\mu_n - 1}\exp[-(2x)^{\mu_n}], \quad \alpha_n = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_n - 1}{\mu_n}\right)^{1/\mu_n},$$

и заметим, что $\varphi_n(x)$ возрастает на $(0, \alpha_n)$ и убывает на (α_n, ∞). С другой стороны, имеем $A_n = \mu_n I_n$, где

$$I_n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n}\varphi_n\left(\frac{\theta'(n,k)}{n}\right), \quad \theta'(n,k) = \frac{1}{2}\theta(n,k). \quad (2.22)$$

Так как $2k \le \theta(n, k) \le 2k + 1$, то

$$\frac{k}{n} \le \frac{\theta'(n,k)}{n} \le \frac{k+1}{n}. \quad (2.23)$$

Далее, имеем

$$B_n = \int_0^{\infty}\varphi_n(x)\,dx = \frac{1}{2\mu_n},$$
$$\max_{x\in(0,\infty)}|\varphi_n(x)| \le \varphi_n(\alpha_n) \le 1, \quad n = 1, 2, \ldots \quad (2.24)$$

Обозначив через k_n наибольшее натуральное число k, для которого $k \le n\alpha_n$, получим

$$I_n = I_n' + I_n'' + I_n''', \quad B_n = B_n' + B_n'' + B_n''', \quad (2.25)$$

где

$$I'_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k_n-1}\varphi_n\Big(\frac{\theta'(n,k)}{n}\Big),\quad I''_n = \frac{1}{n}\varphi_n\Big(\frac{\theta'(n,k_n)}{n}\Big),\quad I'''_n = \frac{1}{n}\sum_{k=k_n+1}^{\infty}\varphi_n\Big(\frac{\theta'(n,k)}{n}\Big),$$

$$B'_n = \int_0^{(k_n-1)/n}\varphi_n(x)\,dx,\quad B''_n = \int_{(k_n-1)/n}^{(k_n+2)/n}\varphi_n(x)\,dx,\quad B'''_n = \int_{(k_n+2)/n}^{\infty}\varphi_n(x)\,dx.$$

Из (2.22) и (2.23) заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty}\left|A_n - \frac{1}{2}\right| = \lim_{n\to\infty}|I_n - B_n|. \tag{2.26}$$

Достаточно доказать, что

$$|I_n - B_n| = o\left(\frac{1}{\mu_n}\right), \tag{2.27}$$

Из (2.24) и (2.25) следует, что

$$|B_n - I_n| \le |B'_n - I'_n| + |B''_n| + |I''_n| + |B'''_n - I'''_n|, \tag{2.28}$$

и ввиду (2.24) получим

$$\begin{aligned} |B''_n| &\le \frac{3}{n}\max|\varphi_n(x)| \le \frac{3}{n} = o\left(\frac{1}{\mu_n}\right),\\ |I''_n| &\le \frac{1}{n}\max|\varphi_n(x)| \le \frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\mu_n}\right). \end{aligned} \tag{2.29}$$

Так как функция $\varphi_n(x)$ убывает на интервале $(k_n+1)/n, \infty)$, то из равенств (2.25) следует

$$I'''_n - \frac{1}{n}\varphi_n\left(\frac{\theta'(n,k_n+1)}{n}\right) \le B'''_n \le I'''_n,$$

и поэтому

$$|I'''_n - B'''_n| \le \frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\mu_n}\right). \tag{2.30}$$

Так как на интервале $(0,\alpha_n)$ функция $\varphi_n(x)$ возрастает, то

$$I'_n - \frac{1}{n}\varphi_n\left(\frac{\theta'(n,k_n-1)}{n}\right) \le \int_0^{(k_n-2)/n}\varphi_n(x)\,dx \le I'_n.$$

Следовательно

$$\left|I'_n - \int_0^{(k_n-2)/n}\varphi_n(x)\,dx\right| \le \frac{1}{n}. \tag{2.31}$$

Так как

$$\left|B'_n - \int_0^{(k_n-2)/n}\varphi_n(x)\,dx\right| = \int_{(k_n-2)/n}^{(k_n-1)/n}\varphi_n(x)\,dx \le \frac{1}{n}, \tag{2.32}$$

то из (2.31), (2.32) получим

$$|I'_n - B'_n| \le \frac{2}{n}. \tag{2.33}$$

Из (2.28) – (2.30) и (2.33) вытекает (2.27).

Замечание 2. Следуя Д. Е. Меньшову, линейные регулярные методы суммирования матрицы $||a_{nk}||$, которые удовлетворяют условию (2.4), будем называть T'-методами.

Теорема 3 (Д. Е. Меньшов [1]). **Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная система на отрезке $[a,b]$, и $M = M(T')$ – любое счетное множество T'-методов. Существует перестановка $\{\varphi_{\nu(n)}(x)\}$ системы $\{\varphi_n(x)\}$ такая, что любой ряд**

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_{\nu(k)}(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty \tag{2.34}$$

суммируется почти всюду на $[a,b]$ одновременно всеми методами, принадлежащими множеству M.

В Теореме 3 перестановка $\nu(n)$ натурального ряда такова, что если $\{\varphi_n(x)\}$ является системой расходимости, то $\{\varphi_{\nu(n)}(x)\}$ также является системой расходимости. Поэтому, вообще говоря, ряд (2.34) расходится на множестве положительной меры.

Как было показано выше, методы T_{μ_n} при $\mu_n = o(n)$ являются T'-методами. Следовательно, из Теорем 1 и 3 получим, что для заданного счетного множества M методов T_{μ_n} существует ортогональный ряд (2.1), суммируемый почти всюду одновременно всеми методами из множества M. Вместе с тем, этот ряд не суммируется почти всюду всеми методами T_{μ_n}.

Замечание 3. Для числовых рядов Теорема 2 не верна, поскольку чезаровские средние σ_n частичных сумм расходящегося ряда $\sum(-1)^k$ сходится к $1/2$ со скоростью $O(1/n)$.

ABSTRACT. The paper describes a class of linearly regular methods of summation possessing the property : almost everywhere summability of an orthogonal series simultaneous by all methods of the class yields almost everywhere convergence of the series. Summability of numerical series by all methods of the class does not necessarily yield convergence of a series.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Е. Меньшов. "Суммирование рядов по ортогональным функциям линейными методами", Изв. АН СССР, серия Математика, стр. 203 – 207, 1937.

2 июня 1999

Институт математики
НАН Армении