О БЕЗУСЛОВНОЙ БАЗИСНОСТИ ОБЩИХ СИСТЕМ ФРАНКЛИНА

Г. Г. Геворкян, А. А. Саакян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 4, 2000

В статье изучаются общие системы Франклина, которые распространяют построение Франклина на произвольные множества узлов, и выводятся условия, при которых общая система Франклина является безусловным базисом в пространствах L_p, $1 < p < \infty$.

ВВЕДЕНИЕ

Классическая система Франклина, введённая им в 1928 году [1], как первый пример ортонормированного базиса в пространстве $C([0,1])$, является полной ортонормированной системой непрерывных, кусочно-линейных функций с двоичными узлами. Система Франклина полезна в изучении различных функциональных пространств, таких как $L^p(0,1)$, H^p или BMO. С. Бочкарёв [2] доказал, что система Франклина является безусловным базисом в пространстве $L^p(0,1)$ при $1 < p < \infty$. П. Войтащик [3] получил характеристику пространства BMO в терминах разложений по базису Франклина и доказал, что система Франклина является безусловным базисом в вещественном пространстве Харди H^1.

В настоящей статье изучаются общие системы Франклина, которые расширяют конструкцию Франклина до произвольных узлов. Выводятся условия, при которых общая система Франклина является безусловным базисом в пространствах L_p при $1 < p < \infty$.

§1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $P = \{P_j\}_{j=0}^{\infty}$ – последовательность разбиений отрезка $[0,1]$:

$$P_j = \{t_{j,i} : 0 \le i \le 2^j\}, \quad 0 = t_{j,0} < t_{j,1} < \cdots < t_{j,2^j} = 1, \quad j = 0, 1, \ldots, \tag{1}$$

такая, что

$$t_{j+1,2i} = t_{j,i}, \quad i = 0, 1, \ldots, 2^j, \quad j = 0, 1, \ldots, \quad \lim_{j\to\infty} \max_{0\le i<2^j} |t_{j,i+1} - t_{j,i}| = 0. \tag{2}$$

Положим $\pi_1 = P_0$ и

$$\pi_n = P_j \cup \{t_{j+1,2l-1} : 1 \le l \le k\} \quad \text{при} \quad n = 2^j + k, \quad 1 \le k \le 2^j. \tag{3}$$

Через $L_n = L_n(P)$ обозначим пространство непрерывных, кусочно-линейных функций на $[0,1]$ с множеством узлов π_n, $n \ge 1$. Ясно, что разбиение π_n получается из π_{n-1} добавлением единственной точки $t_n = t_{j+1,2k-1}$. Следовательно, $L_n \supset L_{n-1}$ и $\dim L_n = \dim L_{n-1} + 1$.

Определение 1. Общей системой Франклина, соответствующей $P = \{P_j\}_{j=0}^{\infty}$, называется система функций $F_P = \{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, где $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)$, $x \in [0,1]$, а при $n = 2, 3, \ldots$ функции f_n определяются (единственным образом) условиями $f_n \in L_n$, $f_n \perp L_{n-1}$, $\|f_n\|_2 = 1$, $f_n(t_n) > 0$. Общие системы Франклина были рассмотрены в [4], [5]. Ясно, что при любом разбиении P вида (1), (2) F_P является полной ортонормированной системой в $L^2[0,1]$, а при $t_{j,i} = \frac{i}{2^j}$ система F_P совпадает с классической системой Франклина.

Так как ортопроекторы на L_n равномерно ограничены в $C(0,1)$ ([6], см. также [7], гл. 6, Теорема 5), то при любом разбиении P вида (1), (2) соответствующая общая система Франклина F_P будет базисом в пространствах $C(0,1)$ и $L^p[0,1]$, $1 \le p < \infty$ (см. [7], гл. 1, Теоремы 6 и 8).

Свойство безусловной базисности общих систем Франклина в пространствах H^1 и L^p, $1 < p < \infty$ было исследовано Г. Геворкяном и А. Камонтом [5]. Следуя [5], разбиение P вида (1), (2) назовем **слабо регулярным**, если оно удовлетворяет условию

$$\frac{1}{\gamma} \le \frac{t_{j,2i-1} - t_{j,2i-2}}{t_{j,2i} - t_{j,2i-1}} \le \gamma, \quad i = 1, \ldots, 2^{j-1}, \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

и **сильно регулярным**, если

$$\frac{1}{\gamma} \le \frac{t_{j,i+1} - t_{j,i}}{t_{j,i} - t_{j,i-1}} \le \gamma, \quad i = 1, \ldots, 2^j, \quad j = 1, 2 \ldots, \tag{5}$$

где γ – положительная постоянная, не зависящая от i и j.

Г. Геворкян и А. Камонт [5] доказали, что сильная регулярность последовательности разбиений P является необходимым и достаточным условием для базисности и безусловной базисности общей системы Франклина F_P в пространстве H^1, а при слабой регулярности из (4) следует, что F_P является безусловным базисом в пространстве $L^p(0,1)$ при $1 < p < \infty$.

В настоящей статье рассматриваются последовательности разбиений P вида (1), (2), удовлетворяющие следующему условию :

(*) **Существует постоянная $M > 0$ такая, что для произвольной последовательности i_j, $1 \le i_j \le 2^j$, $j = 1, 2, \ldots$**

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\Delta_{j,i_j}| \le M\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \Delta_{j,i_j}\right), \tag{6}$$

где $\Delta_{j,i} = [t_{j,i-1}, t_{j,i}]$ и μ – мера Лебега.

Легко проверить, что из слабой (и тем более сильной) регулярности последовательности разбиений P следует (*), однако существуют последовательности разбиений P, удовлетворяющие (*), но не условиям (4) и (5). Всякая последовательность разбиений P, для которой существует натуральное число J, обладающее свойством

$$\text{если} \quad j_2 \ge j_1 + J \ \text{ и } \ \Delta_{j_2,i_2} \subset \Delta_{j_1,i_1}, \quad \text{то} \quad |\Delta_{j_2,i_2}| \le \frac{1}{2}|\Delta_{j_1,i_1}|, \tag{**}$$

удовлетворяет (*). Цель данной работы – доказать, что при выполнении условия (*) общая система Франклина F_P является безусловным базисом в пространстве $L^p(0,1)$ при $1 < p < \infty$. Отметим, что методы, приведенные в [2] и [5], не пригодны в этом случае (даже если $J = 2$). Поэтому здесь предлагается как новый подход, так и использование некоторых результатов из [2] и [5].

Начнём с некоторых свойств общих систем Франклина при произвольных разбиениях. Для $n = 2^j + k$, $k = 1, \ldots, 2^j$, $j = 0, 1, \ldots$ точки разбиения π_n обозначим через τ_i^n в возрастающем порядке :

$$0 = \tau_0^n < \tau_1^n < \cdots < \tau_n^n = 1, \quad \tau_{2k-1}^n = t_n = t_{j+1,2k-1}, \tag{7}$$

и пусть $\tau_{-1}^n = 0$, $\tau_{n+1}^n = 1$. Положим также

$$\{n\} = \left(\tau_{2k-2}^n, \tau_{2k}^n\right), \quad \{n^-\} = \left(\tau_{2k-3}^n, \tau_{2k-1}^n\right), \quad \{n^+\} = \left(\tau_{2k-1}^n, \tau_{2k+1}^n\right),$$

$$\nu_n = |\{n\}|, \quad \nu_n^- = \left|\{n^-\}\right|, \quad \nu_n^+ = \left|\{n^+\}\right|, \quad \mu_n = \frac{1}{\nu_n^-} + \frac{1}{\nu_n} + \frac{1}{\nu_n^+}. \tag{8}$$

В следующих двух леммах числа j и k определяются из представления $n = 2^j + k$ с $1 \le k \le 2^j$ и $j \in \{0, 1, \ldots\}$. Доказательство Леммы 1 можно найти в [5].

Лемма 1. 1) $\|f_n\|_p \asymp \mu_n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$, $1 \le p \le \infty$, где $a_n \asymp b_n$ означает существование постоянных $0 < c_1 < c_2 < \infty$ таких, что $c_1|a_n| \le b_n \le c_2|a_n|$, $n = 1, 2, \ldots$,

2) $\quad |f(\tau_{2k-2}^n)| \asymp \dfrac{\mu_n^{-1/2}}{\nu_n^-}, \quad |f(\tau_{2k-1}^n)| \asymp \dfrac{\mu_n^{-1/2}}{\nu_n}, \quad |f(\tau_{2k}^n)| \asymp \dfrac{\mu_n^{-1/2}}{\nu_n^+}$,

3) если $i < 2k-2$, то

$$|f(\tau_i^n)| \le \frac{2}{3} \cdot \frac{\tau_{i+1}^n - \tau_i^n}{\tau_{i+1}^n - \tau_{i-1}^n} \cdot |f(\tau_{i+1}^n)|, \tag{9}$$

4) если $i > 2k$, то

$$|f(\tau_i^n)| \le \frac{2}{3} \cdot \frac{\tau_i^n - \tau_{i-1}^n}{\tau_{i+1}^n - \tau_{i-1}^n} \cdot |f(\tau_{i-1}^n)|. \tag{10}$$

Для формулировки следующей леммы нам понадобятся обозначения :

$$\lambda_i^n = \tau_i^n - \tau_{i-1}^n, \quad \lambda_n^- = \tau_{2k-2}^n - \tau_{2k-3}^n = |\Delta_{j+1,2k-2}|, \quad \lambda_n^+ = \tau_{2k+1}^n - \tau_{2k}^n = |\Delta_{j,k+1}|,$$

$$\rho(A,B) = \inf_{x\in A, y\in B} |x-y|, \quad \text{при } A, B \subset [0,1], \tag{11}$$

$d_n(x) =$ количество узлов разбиения π_n, лежащих в интервале (x, t_n).

Лемма 2. 1) Если $\tau_{i-1}^n < x \le \tau_i^n$, $i \le 2k-2$, то

a) $|f_n(x)| \le C\left(\dfrac{2}{3}\right)^{d_n(x)} \dfrac{\mu_n^{-1/2}}{\nu_n^-} \cdot \dfrac{\lambda_n^-}{(\tau_{2k-2}^n - \tau_{i-1}^n)} \le C\left(\dfrac{2}{3}\right)^{d_n(x)} \dfrac{\mu_n^{-1/2}}{\nu_n^-} \cdot \dfrac{\lambda_n^-}{\rho(x,\{n\}) + \lambda_n^-}$;

b) $\displaystyle\int_0^x |f_n(t)|^p\, dt \le C_p \int_{\tau_{i-1}^n}^{\tau_i^n} |f_n(t)|^p\, dt, \quad 1 \le p < \infty;$

2) если $\tau_i^n < x < \tau_{i+1}^n$, $i \ge 2k$, то

c) $|f_n(x)| \le C\left(\dfrac{2}{3}\right)^{d_n(x)} \dfrac{\mu_n^{-1/2}}{\nu_n^+} \cdot \dfrac{\lambda_n^+}{\tau_{i+1}^n - \tau_{2k}^n} \le C\left(\dfrac{2}{3}\right)^{d_n(x)} \dfrac{\mu_n^{-1/2}}{\nu_n^+} \cdot \dfrac{\lambda_n^+}{\rho(x,\{n\}) + \lambda_n^+}$;

d) $\displaystyle\int_x^1 |f_n(t)|^p\, dt \le C_p \int_{\tau_i^n}^{\tau_{i+1}^n} |f_n(t)|^p\, dt, \quad 1 \le p < \infty;$

3) если $J = (a,b) \subset (0,1)$, то

$$\int_J |f_n(x)|^p\, dx \le C_p \left(\frac{2}{3}\right)^{pd_n(J)} \mu_n^{p/2-1}, \quad d_n(J) = \min_{x\in J} d_n(x).$$

Доказательство : Для доказательства пункта а) применим индукцию по $i = 2k-2, 2k-3, \ldots, 1$. При $i = 2k-2$ результат непосредственно следует из утверждения 2) Леммы 1. Предположим, что a) имеет место при $\tau_{i-1}^n < x \le \tau_i^n$. С учетом (9), при $\tau_{i-2}^n < x \le \tau_{i-1}^n$ имеем

$$|f_n(x)| \le \left|f_n(\tau_{i-1}^n)\right| \le \frac{2}{3}\cdot\frac{\tau_i^n-\tau_{i-1}^n}{\tau_i^n-\tau_{i-2}^n}\cdot\left|f_n\left(\tau_i^n\right)\right| \le$$

$$\le C\left(\frac{2}{3}\right)^{d_n(\tau_i^n)+1}\frac{\lambda_n^-}{\tau_{2k-2}^n-\tau_{i-1}^n}\cdot\frac{\tau_i^n-\tau_{i-1}^n}{\tau_i^n-\tau_{i-2}^n} \le C\left(\frac{2}{3}\right)^{d_n(x)}\frac{\lambda_n^-}{\tau_{2k-2}^n-\tau_{i-2}^n},$$

где последнее неравенство следует из неравенства

$$\frac{c-b}{(d-b)(c-a)} \le \frac{1}{d-a}, \quad 0<a<b<c<d.$$

Неравенства в b) и 3) следуют из (см. (9))

$$\int\limits_{\tau_{i-2}^n}^{\tau_{i-1}^n}|f_n(x)|^p dx \le a_p\int\limits_{\tau_{i-1}^n}^{\tau_i^n}|f_n(x)|^p\,dx, \quad i<2k-2,$$

где a_p, $0<a_p<1$ – постоянные, зависящие только от p. Неравенства в c) и d) доказываются аналогично. Лемма 2 доказана.

Для любого интервала I обозначим через $\widetilde{I}$ интервал длины $3|I|$ с тем же центром, что I.

Лемма 3. Пусть P – последовательность разбиений, обладающая свойством (*), и пусть $p\in(1,2)$. Существует постоянная $M_p>0$ такая, что для произвольного $I\subset(0,1)$

$$\sum_{n=n(I)}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{pd_n(I)}\|f_n\|_{L^q(I)}^p\cdot\|f_n\|_{L^p\left((0,1)\setminus\widetilde{I}\right)}^p \le M_p,$$

где

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \quad n(I)=\min\{n:\pi_n\cap I\ne\emptyset\}. \tag{12}$$

Доказательство : Пусть $I=(\alpha,\beta)$, $\widetilde{I}=\left(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}\right)$, и пусть $\tau=t_{n(I)}\in I$ – узел, принадлежащий всем π_n при $n\ge n(I)$. Положим

$$A_n=\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{pd_n(I)}\|f_n\|_{L^q(I)}^p\cdot\|f_n\|_{L^p\left((0,1)\setminus\widetilde{I}\right)}^p = A_n^-+A_n^+,$$

где

$$A_n^-=\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{pd_n(I)}\|f_n\|_{L^q(I)}^p\cdot\|f_n\|_{L^p(0,\widetilde{\alpha})}^p,$$

$$A_n^+ = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{pd_n(I)} \|f_n\|^p_{L^q(I)} \cdot \|f_n\|^p_{L^p(\widetilde{\beta},1)}.$$

Докажем, что существует постоянная $M_p > 0$ такая, что

$$\Omega := \sum_{n=n(I)}^{\infty} A_n^- \le M_p \tag{13}$$

(сумма $\sum\limits_{n=n(I)}^{\infty} A_n^+$ оценивается аналогично). Положим

$$\Gamma_1 = \{n : n \ge n(I), \quad \{n\} \subset [0, \widetilde{\alpha})\},$$

$$\Gamma_2 = \{n : n \ge n(I), \quad \widetilde{\alpha} \in \{n\}, \quad \alpha \notin \{n\}, \quad \text{card } (\pi_n \cap (\widetilde{\alpha}, \alpha)) = 1\},$$

$$\Gamma_3 = \{n : n \ge n(I), \quad \{n\} \cap (\widetilde{\alpha}, \alpha) \ne \emptyset, \quad \text{card } (\pi_n \cap (\widetilde{\alpha}, \alpha)) \ge 2\},$$

$$\Gamma_4 = \{n : n \ge n(I), \quad \{n\} \supset (\widetilde{\alpha}, \alpha)\},$$

$$\Gamma_5 = \{n : n \ge n(I), \quad \widetilde{\alpha} \notin \{n\}, \alpha \in \{n\}, \quad \text{card } (\pi_n \cap (\widetilde{\alpha}, \alpha)) = 1\},$$

$$\Gamma_6 = \left\{n : n \ge n(I), \quad \{n\} \subset [\alpha, 1], \quad \{n\} \cap \left[\alpha, \widetilde{\beta}\right] \ne \emptyset\right\},$$

$$\Gamma_7 = \left\{n : n \ge n(I), \quad \{n\} \subset \left(\widetilde{\beta}, 1\right]\right\},$$

и обозначим

$$\Omega_i = \sum_{n \in \Gamma_i} A_n^-, \quad i = 1, ..., 7. \tag{14}$$

Для доказательства (13) достаточно показать, что

$$\Omega_i \le M_p, \quad i = 1, \ldots, 7. \tag{15}$$

При $n \in \Gamma_i$, $i = 1, 2$ из неравенства с) Леммы 2 следует

$$\int_I |f_n(x)|^q \, dx \le C_q \left(\frac{2}{3}\right)^{qd_n(I)} \frac{\mu_n^{-q/2}}{(\nu_n^+)^q} \cdot \frac{(\lambda_n^+)^q}{[\rho(I, \{n\}) + \lambda_n^+]^q} |I|. \tag{16}$$

Поэтому из неравенства 1) Леммы 1 при $n \in \Gamma_i$, $i = 1, 2$ получим

$$\begin{aligned} A_n^- &\le \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{pd_n(I)} \|f_n\|_p^p \cdot \left\{\int_I |f_n(x)|^q \, dx\right\}^{p/q} \le \\ &\le C_p \left(\frac{2}{3}\right)^{(p-\frac{p}{2})d_n(I)} \frac{\mu_n^{-p/2}}{(\nu_n^+)^p} \cdot \frac{(\lambda_n^+)^p |I|^{p/q} \mu_n^{\frac{p}{2}-1}}{(\rho(I, \{n\}) + \lambda_n^+)^p} = \\ &= C_p \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{p}{2}d_n(I)} \frac{\mu_n^{-1}}{(\nu_n^+)^p} \cdot \frac{(\lambda_n^+)^p |I|^{p-1}}{(\rho(I, \{n\}) + \lambda_n^+)^p}, \end{aligned} \tag{17}$$

при этом (см. (8), (11))

$$\mu_n^{-1} \le \min\{\nu_n, \nu_n^+\}, \quad \lambda_n^+ \le \nu_n^+. \tag{18}$$

Для доказательства оценки (15), в отдельности рассмотрим случаи $i = 1, ..., 7$.

Доказательство оценки (15) для $i = 1$. Положим

$$\Omega_1(m) = \sum_{n\in\Gamma_1(m)} A_n^-, \quad \Gamma_1(m) = \{n \in \Gamma_1 : d_n(I) = m\}, \quad m = 0, 1, ... \tag{19}$$

Отметим, что при фиксированном m множество $\Gamma_i(m)$ содержит не более одного номера из каждого двоичного интервала $(2^j, 2^{j+1})$, $j = 0, 1, ...$. Из (17) – (19) следует, что при $m = 0, 1, ...$

$$\Omega_1(m) \le C_p \left(\frac{2}{3}\right)^{mp/2} |I|^{p-1} \sum_{n\in\Gamma_1(m)} \frac{\lambda_n^+}{\rho^p(I, \{n\})} =$$

$$= C_p \left(\frac{2}{3}\right)^{mp/2} |I|^{p-1} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n\in\Gamma_1(m,l)} \frac{\lambda_n^+}{\rho^p(I, \{n\})}, \tag{20}$$

где

$$\Gamma_1(m, l) = \{n \in \Gamma_1(m) : 2^l|I| \le \rho(I, \{n\}) < 2^{l+1}|I|\} \tag{21}$$

((20) вытекает из того, что $\rho(I, \{n\}) \ge |I|$, если $n \in \Gamma_1$).

Так как при $n = 2^{j_n} + k_n \in \Gamma_1(m, l)$ интервал $\Delta_{j_n+1,2k_n}$ лежит в $(\alpha - 2^{l+1}|I|, \tau)$, то в силу свойства (*) и (8) получим

$$\sum_{n\in\Gamma_1(m,l)} \frac{\lambda_n^+}{\rho^p(I, \{n\})} \le \frac{1}{2^{pl}|I|^p} \sum_{n\in\Gamma_1(m,l)} |\Delta_{j_n+1,2k_n}| \le$$

$$\le M \cdot \frac{1}{2^{pl}|I|^p} \cdot (\tau - \alpha + 2^{l+1}|I|) \le \frac{4M}{2^{(p-1)l}|I|^{p-1}}.$$

Отсюда и из (20) вытекает оценка

$$\Omega_1(m) \le C_p \left(\frac{2}{3}\right)^{mp/2} |I|^{p-1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^{(p-1)l}} \cdot |I|^{1-p} \le C_p \left(\frac{2}{3}\right)^{mp/2}.$$

Следовательно, учитывая (14) и (19), получим

$$\Omega_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \Omega_1(m) \le C_p \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{mp/2}, \tag{22}$$

что доказывает (15) для $i = 1$.

Доказательство (15) для $i = 2$. Для $n \in \Gamma_2$ имеем $d_n(I) = 1$, $\nu_n^+ > |I|$. Согласно (17) и (18), имеем

$$A_n^- \le C_p \frac{\mu_n^{-1}}{(\nu_n^+)^p} \cdot |I|^{p-1} \le C_p \frac{\nu_n^+}{(\nu_n^+)^p} \cdot |I|^{p-1}.$$

Следовательно, в силу (14), имеем

$$\Omega_2 \le C_p|I|^{p-1} \sum_{n\in\Gamma_2} \frac{\nu_n^+}{(\nu_n^+)^p} = C_p|I|^{p-1} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n\in\Gamma_2(l)} \frac{\nu_n^+}{(\nu_n^+)^p}, \tag{23}$$

где $\Gamma_2(l) = \{n \in \Gamma_2 : \ 2^l|I| \le \nu_n^+ < 2^{l+1}|I|\}$. Если $n = 2^{j_n} + k_n \in \Gamma_2(l)$, то в силу (8), получим $\nu_n^+ = |\{n^+\}| = |\Delta_{j_n+1,2k_n}| + |\Delta_{j_n,k_n+1}|$, и $\{n^+\} \cap I \ne \emptyset$, $\{n^+\} \subset (\alpha - 2^{l+1}|I|, \tau)$. Поэтому, согласно свойству (*)

$$\sum_{n\in\Gamma_2(l)} \frac{\nu_n^+}{(\nu_n^+)^p} \le \frac{1}{2^{lp}|I|^p} \sum_{n\in\Gamma_2(l)} (|\Delta_{j_n+1,2k_n}| + |\Delta_{j_n,k_n+1}|) \le$$

$$\le 2M\frac{1}{2^{lp}|I|^p}2^{l+2}|I| = \frac{8M}{2^{l(p-1)}|I|^{p-1}}.$$

Отсюда и из (23) получим

$$\Omega_2 \le 8M \cdot C_p \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^{l(p-1)}} \le M_p < \infty, \tag{24}$$

что и доказывает оценку (15) для $i = 2$.

Доказательство (15) для $i = 3$. Согласно утверждению 3) Леммы 2, из $n \in \Gamma_3$ следует

$$A_n^- \le C_p \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{pd_n(\alpha)} \left(\frac{2}{3}\right)^{pd_n(\widetilde{\alpha})} \mu_n^{\frac{p}{2}-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{pd_n(\alpha)} \mu_n^{\frac{p}{q}(\frac{q}{2}-1)} \le$$

$$\le C_p \left(\frac{2}{3}\right)^{(d_n(\alpha)+d_n(\widetilde{\alpha}))p/2} \le C_p \left(\frac{2}{3}\right)^{u_n p/2}, \tag{25}$$

где $u_n = \operatorname{card}\ (\pi_n \cap (\widetilde{\alpha}, \alpha))$. Легко проверить, что

$$\operatorname{card}\ \{n \in \Gamma_3 :\ 2^l \le u_n < 2^{l+1}\} \le 2^{l+1}, \quad l = 0, 1, ... \tag{26}$$

Из (25) и (26) получим

$$\Omega_3 \le C_p \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{p}{2}\cdot 2^l} 2^{l+1} \le M_p < \infty. \tag{27}$$

Доказательство (15) для $i = 4$. Положим $\Gamma_4(1) = \{n \in \Gamma_4 : t_n \le \widetilde{\alpha}\}$, $\Gamma_4(2) = \{n \in \Gamma_4 : \widetilde{\alpha} < t_n < \alpha\}$, $\Gamma_4(3) = \{n \in \Gamma_4 : t_n > \alpha\}$. В силу оценок 2) Леммы 1 и c) Леммы 2 при $n \in \Gamma_4(1)$ имеем

$$|f_n(x)| \le C\left(\frac{\mu_n^{-1/2}}{\nu_n} + \frac{\mu_n^{-1/2}}{\nu_n^+}\right), \quad x \in I. \tag{28}$$

Следовательно, в силу 1) Леммы 1 имеем

$$A_n^- \le \|f_n\|_p^p \cdot \left\{\int_I |f_n(x)|^q\, dx\right\}^{p/q} \le C_p \mu_n^{p/2-1}\left(\frac{\mu_n^{-p/2}}{\nu_n^p} + \frac{\mu_n^{-p/2}}{(\nu_n^+)^p}\right)|I|^{p-1} \le$$

$$\le C_p \frac{\nu_n}{\nu_n^p}\cdot |I|^{p-1} + C_p\frac{\nu_n^+}{(\nu_n^+)^p}\cdot |I|^{p-1}, \quad n \in \Gamma_4(1). \tag{29}$$

Если $n \in \Gamma_4(1)$, то $(\widetilde{\alpha}, \alpha) \subset \{n\} \cap \{n^+\}$. Следовательно $\nu_n = |\{n\}| \ge |I|$, $\nu_n^+ = |\{n^+\}| \ge |I|$. Пусть $\Gamma_4(1,l) = \{n \in \Gamma_4(1):\ 2^l|I| \le |\{n\}| < 2^{l+1}|I|\}$, $l = 0, 1, \ldots$. Так как $\{m\} \subset \{n\}$ при $n < m$ и $n, m \in \Gamma_4(1)$, то применив свойство (*), получим

$$\sum_{n\in\Gamma_4(1)} \frac{\nu_n}{\nu_n^p} \le \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n\in\Gamma_4(1,l)} \frac{|\{n\}|}{2^{lp}|I|^p} \le C|I|^{-p}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2^{lp}}\sup_{n\in\Gamma_4(1,l)}|\{n\}| \le$$

$$\le C|I|^{-p}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2^{lp}}\cdot 2^{l+1}|I| \le C|I|^{1-p}. \tag{30}$$

Оценивая аналогичным образом сумму вторых слагаемых в (29), получим

$$\sum_{n\in\Gamma_4(1)} A_n^- \le C_p < \infty. \tag{31}$$

Из условия 1) Леммы 1 имеем

$$\|f_n\|_p \cdot \|f_n\|_q \le C\mu_n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\mu_n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} = C < \infty, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{32}$$

Множество $\Gamma_4(2)$ содержит не более одного элемента. Следовательно

$$\sum_{n\in\Gamma_4(2)} A_n^- \le \sum_{n\in\Gamma_4(2)} \|f_n\|_p^p \cdot \|f_n\|_q^p \le C_p < \infty. \tag{33}$$

Далее, для всех $n \in \Gamma_4(3)$ кроме, быть может, наименьшего номера $n \in \Gamma_4(3)$, для которого величину A_n^- можно оценить, используя (32), имеем

$$\{n^+\} \subset (\alpha, \tau) \subset I, \quad \{n\} \subset \{n^-\} \cup I, \quad \{n^-\} \supset (\widetilde{\alpha}, \alpha),$$

$$\nu_n^- = |\{n^-\}| \ge |I|, \quad |I| \le \nu_n \le 2\nu_n^-. \tag{34}$$

Следовательно, $\mu_n^{-1} \le \nu_n^+ = |\{n^+\}| \le |I|$ и в силу 2) Леммы 1 и а) Леммы 2, получим

$$|f_n(x)| \le C\frac{\mu_n^{-1/2}}{\nu_n^-} \le C\cdot\frac{|I|^{1/2}}{\nu_n^-}, \quad x \in \{\tau_{2k-3}^n, \tau_{2k-2}^n\},$$

$$|f_n(x)| \le C\frac{\mu_n^{-1/2}}{\nu_n} + C\frac{\mu_n^{-1/2}}{\nu_n^-} \le 3C\cdot\frac{|I|^{1/2}}{\nu_n}, \quad x \in \{\tau_{2k-2}^n, \tau_{2k-1}^n\}.$$

Из пункта 1) Леммы 1 и b) Леммы 2 при $n \in \Gamma_4(3)$ имеем

$$A_n^- \le \|f_n\|_q^p \int_0^{\widetilde{\alpha}} |f_n(x)|^p\,dx \le C_p \mu_n^{\frac{p}{2}-\frac{p}{q}} \left\{ \int_{\tau_{2k-3}^n}^{\tau_{2k-2}^n} |f_n(x)|^p\,dx + \int_{\tau_{2k-2}^n}^{\tau_{2k-1}^n} |f_n(x)|^p\,dx \right\} \le$$

$$\le C_p |I|^{p-1} \cdot \left\{ \frac{\nu_n^-}{(\nu_n^-)^p} + \frac{\nu_n}{\nu_n^p} \right\} \le C_p |I|^{p-1} \cdot \frac{\nu_n}{\nu_n^p}. \tag{35}$$

В силу (34) имеем $\nu_n \ge |I|$ при $n \in \Gamma_4(3)$. Поэтому, оценивая сумму $\sum\limits_{n\in\Gamma_4(3)} \frac{\nu_n}{\nu_n^p}$ так же, как в (30), получим $\sum_{n\in\Gamma_4(3)} A_n^- \le C_p < \infty$. Из этого неравенства вместе с (31) и (33) получаем

$$\Omega_4 = \sum_{l=1}^{3} \sum_{n\in\Gamma_4(l)} A_n^- \le M_p < \infty. \tag{36}$$

Доказательство (15) для $i = 5$. При $n \in \Gamma_5$ интервал $(\widetilde{\alpha}, \alpha)$ содержит только один узел из множества π_n. Следовательно, $\tau_{2k-3}^n \le \widetilde{\alpha} \le \tau_{2k-2}^n \le \alpha \le \tau_{2k-1}^n$. Рассуждая как в (35), получим

$$A_n^- \le \|f_n\|_q^p \int_0^{\widetilde{\alpha}} |f_n(x)|^p\,dx \le C_p \cdot \mu_n^{\frac{p}{2}-\frac{p}{q}} \int_{\tau_{2k-3}^n}^{\tau_{2k-2}^n} |f_n(x)|^p\,dx \le C_p |I|^{p-1} \cdot \frac{\nu_n^-}{(\nu_n^-)^p},$$

откуда получим

$$\Omega_5 = \sum_{n\in\Gamma_5} A_n^- \le M_p < \infty. \tag{37}$$

Доказательство оценки (15) для $i = 6$. Для $n \in \Gamma_6$ имеем

$$\mu_n^{-1} \le 2|I|, \quad \rho(\widetilde{\alpha}, \{n\}) \ge |I|, \tag{38}$$

и согласно пункту 1) Леммы 1

$$\|f_n\|_{L^q(I)}^p \le C_p |I|^{\frac{p}{2}-1}. \tag{39}$$

Обозначим через $(\widetilde{\gamma}_n, \gamma_n)$ интервал линейности функции f_n, содержащий $\widetilde{\alpha}$. В силу (38) и пункта a) Леммы 2, при $n \in \Gamma_6$, $x \in (\widetilde{\gamma}_n, \gamma_n)$ будем иметь

$$|f_n(x)| \le C \left(\frac{2}{3}\right)^{d_n(\widetilde{\alpha})} \frac{|I|^{1/2}}{\nu_n^-} \cdot \frac{\lambda_n^-}{\rho(\widetilde{\gamma}_n, \{n\})} \le C \left(\frac{2}{3}\right)^{d_n(\widetilde{\alpha})} \frac{|I|^{1/2}}{\rho(\widetilde{\gamma}_n, \{n\})}.$$

Следовательно, в силу (39) и пункта b) Леммы 2

$$A_n^- \le C_p \|f_n\|_{L^q(I)}^p \int_{\widetilde{\gamma}_n}^{\gamma_n} |f_n(x)|^p\,dx \le C_p \left(\frac{2}{3}\right)^{p d_n(\widetilde{\alpha})} |I|^{p-1} \frac{\gamma_n - \widetilde{\gamma}_n}{\rho^p(\widetilde{\gamma}_n, \{n\})}. \tag{40}$$

Положим

$$\Gamma_6(m) = \{n \in \Gamma_6 : d_n(\widetilde{\alpha}) = m\}, \qquad \Omega_6(m) = \sum_{n \in \Gamma_6(m)} A_n^-, \tag{41}$$

$$\Gamma_6(m,l) = \left\{n \in \Gamma_6(m) : 2^l|I| \le \rho(\widetilde{\gamma}_n, \{n\}) < 2^{l+1}|I|\right\}, \quad m, l = 0, 1, \ldots$$

В силу (40) и свойства (*) находим

$$\Omega_6(m,l) := \sum_{n \in \Gamma_6(m,l)} A_n^- \le C_p \left(\frac{2}{3}\right)^{pm} |I|^{p-1} \frac{1}{2^{lp}|I|^p} \sum_{n \in \Gamma_6(m,l)} (\gamma_n - \widetilde{\gamma}_n) \le$$

$$\le C_p \left(\frac{2}{3}\right)^{pm} \frac{1}{2^{lp}|I|} \cdot \mu\left(\alpha - 2^{l+1}|I|, \widetilde{\beta}\right) \le C_p \left(\frac{2}{3}\right)^{pm} \frac{1}{2^{l(p-1)}}.$$

Отсюда и из (41) и (38) получим

$$\Omega_6(m) = \sum_{l=0}^{\infty} \Omega_6(m,l) \le C_p \left(\frac{2}{3}\right)^{pm}, \quad m = 0, 1, \ldots,$$

Следовательно

$$\Omega_6 = \sum_{m=0}^{\infty} \Omega_6(m) \le M_p < \infty. \tag{42}$$

Доказательство (15) для $i = 7$. В силу пункта 3) Леммы 2 при $n \in \Gamma_7$ имеем

$$A_n^- \le C_p \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{pd_n(I)} \left(\frac{2}{3}\right)^{pd_n(I)} \mu_n^{\frac{p}{2}-\frac{p}{q}} \left(\frac{2}{3}\right)^{pd_n(\widetilde{\alpha})} \mu_n^{\frac{p}{2}-1} \le$$

$$\le C_p \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{p}{2}d_n(I)} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{p}{2}d_n(\widetilde{\alpha})} \le C_p \left(\frac{2}{3}\right)^{pu_n}, \tag{43}$$

где $u_n = \operatorname{card}\ (\pi_n \cap I)$. Так как $\operatorname{card}\ \left\{n \in \Gamma_7 :\ 2^l \le u_n < 2^{l+1}\right\} \le 2^{l+1}, l = 0, 1, \ldots,$ то из (43) получим

$$\Omega_7 = \sum_{n \in \Gamma_7} A_n^- \le C_p \sum_{l=0}^{\infty} 2^{l+1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{p2^l} \le M_p < \infty. \tag{44}$$

Из (22), (24), (27), (36), (37), (42) и (44) следует (15). Доказательство Леммы 3 завершено.

§2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. Пусть последовательность разбиений $P = \{P_j\}_{j=0}^{\infty}$ обладает свойством (*). Тогда общая система Франклина $F = F_P$ является безусловным базисом в пространствах $L^p(0,1)$, $1 < p < \infty$.

Для функции $f \in L^1(0,1)$ обозначим через $P(f,x)$ её функцию Пэли :

$$P(f,x) = \left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2(f) f_n^2(x)\right\}^{1/2},$$

где $a_n(f) = \int_0^1 f(x) f_n(x)\, dx$, $n = 0, 1, \ldots$. Для доказательства Теоремы 1 достаточно (см. [7], гл. 1, Теорема 11) доказать следующую теорему.

Теорема 2. Пусть последовательность разбиений $P = \{P_j\}_{j=0}^{\infty}$ обладает свойством (*). Тогда для произвольного p, $1 < p < \infty$ существуют постоянные $C_p, c_p > 0$ такие, что

$$c_p \|f\|_p \le \|P(f)\|_p \le C_p \|f\|_p, \quad f \in L^p(0,1). \tag{45}$$

Достаточно доказать Теорему 2 для $1 < p < 2$ (см. [7], гл. 1, Следствие 3 и Теорему 11). Доказательство второго неравенства в (45) основано на следующих результатах. Через χ_I обозначим характеристическую функцию множества I.

Лемма 4. Пусть $I = (\alpha, \beta)$, и пусть функция $T_I(f,x)$ равна нулю при $x \in (0,1) \setminus I$ и совпадает с ортогональной проекцией функции $f(x)\chi_I(x)$ на пространстве линейных функций на I. Если $\int_I |f(x)|\, dx \le y|I|$, то

$$\text{a)} \quad \|T_I(f)\|_2^2 \le y^2|I|, \quad \text{b)} \quad \|T_I(f)\|_p \le A_p \|f\|_{L^p(I)} . \tag{46}$$

Доказательство : Положим

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{|I|}}, \quad \varphi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{3}|I|^{3/2}} \left(x - \frac{\alpha+\beta}{2} \right), \quad x \in (\alpha, \beta).$$

Легко видеть, что функции φ_1 и φ_2 образуют ортонормированный базис в пространстве линейных функций на I. Следовательно

$$T_I(f) = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2, \quad c_i = \int_I f(x)\varphi_i(x)\, dx, \quad i = 1,2. \tag{47}$$

Имеем $|c_i| = \|f\|_1 \cdot \|\varphi_i\|_\infty \le y|I|^{1/2}$, $i = 1,2$. Отсюда вытекает пункт а) формулы (46). Второе неравенство в (46) следует из неравенства $\|c_i\varphi_i\|_p \le \|f\|_p \cdot \|\varphi_i\|_q \cdot \|\varphi_i\|_p \le A_p \cdot \|f\|_p$, $i = 1,2$. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. Пусть последовательность разбиений $P = \{P_j\}_{j=0}^{\infty}$ обладает свойством (*) и $1 < p < 2$. Существует постоянная $C_p > 0$ такая, что для произвольной функции $f \in L^p(0,1)$

$$\mu\{x \in (0,1) : P(f,x) > y\} \le \frac{C_p}{y^p} \|f\|_p^p, \quad y > 0. \tag{48}$$

Доказательство : Пусть $f \in L^p(0,1)$, $1 < p < 2$. Не умаляя общности можем считать, что $\|f\|_p = 1$ и $y > 1$. Рассмотрим множество $G_y = \{x \in (0,1) : M(f,x) > y\} = \bigcup_k I_k$, где I_k - непересекающиеся интервалы из $(0,1)$. Хорошо известно (см. [7], Приложение 1), что

$$\mu(G_y) \le \frac{C_p}{y^p} \|f\|_p^p, \tag{49}$$

$$\text{a) } |f(x)| \le M(f,x) \text{ п.в.,} \quad \text{b) } \int\limits_{I_k} |f(x)|\,dx \le y|I_k|, \quad k=1,2,\ldots \tag{50}$$

Функцию f представим в виде

$$f(x) = h(x) + \phi(x), \tag{51}$$

где

$$h(x) = f(x)\chi_{(0,1)\setminus G}(x) + \sum_k T_{I_k}(f,x). \tag{52}$$

Согласно пункту a) из (50), $|h(x)| \le y$ п.в. на $(0,1)\setminus G$, и применяя Лемму 4, получим

$$\|h\|_2^2 = \int_{(0,1)\setminus G} f^2(x)\,dx + \sum_k \int_{I_k} T_{I_k}^2(f,x)\,dx \le$$

$$\le y^{2-p}\int_{(0,1)\setminus G} |f(x)|^p\,dx + y^2\mu(G) \le C_p y^{2-p}\,\|f\|_p^p.$$

Поэтому

$$\mu\left\{x : P(h,x) > \frac{y}{2}\right\} \le \frac{4}{y^2}\,\|P(h)\|_2^2 = \frac{4}{y^2}\,\|h\|_2^2 \le \frac{C_p}{y^p}\,\|f\|_p^p. \tag{53}$$

Следовательно, для доказательства (48) достаточно показать, что

$$\mu\left\{x : P(\phi,x) > \frac{y}{2}\right\} \le \frac{C_p}{y^p}\,\|f\|_p^p. \tag{54}$$

Так как $p<2$, то имеем

$$|P(\phi,x)|^p = \left(\sum_n a_n^2(\phi) f_n^2(x)\right)^{p/2} \le \sum_n |a_n(\phi)f_n(x)|^p.$$

Полагая $\widetilde{G} = \bigcup \widetilde{I}_k$, запишем

$$\mu\left\{x : P(\phi,x) > \frac{y}{2}\right\} \le \mu\left(\widetilde{G}\right) + \mu\left\{x \in (0,1)\setminus\widetilde{G} :\ P(\phi,x) > \frac{y}{2}\right\} \le$$

$$\le 3\mu(G) + \frac{2^p}{y^p}\int\limits_{(0,1)\setminus\widetilde{G}} |P(\phi,x)|^p\,dx \le \frac{C_p}{y^p}\,\|f\|_p^p + \frac{2^p}{y^p}\sum_n \int\limits_{(0,1)\setminus\widetilde{G}} |a_n(\phi)f_n(x)|^p\,dx. \tag{55}$$

Докажем теперь, что

$$\sum_n \int\limits_{(0,1)\setminus\widetilde{G}} |a_n(\phi)f_n(x)|^p\,dx \le C_p\,\|\phi\|_p^p, \tag{56}$$

откуда, в силу (55), будет следовать оценка (54). Положим

$$\phi_k(x) = \phi(x)\chi_{I_k}(x), \quad k=1,2,\ldots, \quad \phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\phi_k(x). \tag{57}$$

Из (52) следует, что для произвольной линейной на I_k функции $l(x)$

$$\int\limits_{I_k} \phi(x) l(x)\, dx = 0.$$

В частности, $a_n(\phi_k) = 0$, если $n < n(I_k)$. Следовательно, в силу (57), имеем

$$|a_n(\phi)| = \left| \sum_{k:n\geq n(I_k)} a_n(\phi_k) \right| \leq \sum_{k:n\geq n(I_k)} \int\limits_{I_k} |\phi_k(x) f_n(x)|\, dx \leq$$

$$\leq \sum_{k:n\geq n(I_k)} \|\phi_k\|_p \|f_n\|_{L^q(I_k)} = \sum_{k:n\geq n(I_k)} \|\phi_k\|_p \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{d_n(I_k)} \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^{d_n(I_k)} \|f_n\|_{L^q(I_k)} \leq$$

$$\leq \left\{ \sum_{k:n\geq n(I_k)} \|\phi_k\|_p^p (\sqrt{3/2})^{pd_n(I_k)} \|f_n\|^p_{L^q(I_k)} \right\}^{1/p} \times \left\{ \sum_{k:n\geq n(I_k)} (\sqrt{2/3})^{qd_n(I_k)} \right\}^{1/q}.$$

Если $n \geq n(I_k)$, то интервал I_k содержит по крайней мере один узел разбиения π_n. Следовательно, для любого натурального m равенство $d_n(I_k) = m$ может выполняться для не более двух значений k, удовлетворяющих условию $n \geq n(I_k)$. Следовательно

$$\left\{ \sum_{k:n\geq n(I_k)} \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^{qd_n(I_k)} \right\}^{1/q} \leq C,$$

где C – абсолютная постоянная. Из предыдущих двух оценок вытекает

$$|a_n(\phi)| \leq C_p \left\{ \sum_{k:n\geq n(I_k)} \|\phi_k\|_p^p \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{pd_n(I_k)} \|f_n\|^p_{L^q(I_k)} \right\}^{1/p}.$$

Следовательно

$$\int\limits_{(0,1)\setminus\widetilde{G}} |a_n(\phi) f_n(x)|^p\, dx \leq$$

$$\leq C_p^p \sum_{k:n\geq n(I_k)} \|\phi_k\|_p^p (\sqrt{3/2})^{pd_n(I_k)} \|f_n\|^p_{L^q(I_k)} \cdot \|f_n\|^p_{L^p(0,1)\setminus\widetilde{I}_k}.$$

Применяя Лемму 3, получим

$$\sum_n \int\limits_{(0,1)\setminus\widetilde{G}} |a_n(\phi) f_n(x)|^p\, dx \leq$$

$$\leq C_p \sum_n \sum_{k:n\geq n(I_k)} \|\phi_k\|_p^p \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{pd_n(I_k)} \|f_n\|^p_{L^q(I_k)} \cdot \|f_n\|^p_{L^p(0,1)\setminus\widetilde{I}_k} =$$

$$= C_p \sum_k \|\phi_k\|_p^p \sum_{n=n(I_k)}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{pd_n(I_k)} \|f_n\|^p_{L^q(I_k)} \cdot \|f_n\|^p_{L^p(0,1)\setminus \widetilde{I}_k} \leq$$

$$\leq C_p \sum_k \|\phi_k\|_p^p = C_p \|\phi\|_p^p .$$

Отсюда следует оценка (56). Лемма 5 доказана.

Лемма 5 показывает, что оператор $P(f)$ имеет слабый тип (p,p) при $1 < p < 2$. Так как $P(f)$ ограничен в $L^2(0,1)$ (точнее $\|P(f)\|_2 = \|f\|_2$), то в силу интерполяционной теоремы Марцинкевича (см. [7], Приложение 1), получим

$$\|P(f)\|_p \leq C_p \|f\|_p , \quad f \in L^p(0,1), \quad 1 < p < 2. \tag{58}$$

Для завершения доказательства Теоремы 2 остается установить обратное неравенство при $1 < p < 2$:

$$c_p \|f\|_p \leq \|P(f)\|_p , \quad f \in L^p(0,1). \tag{59}$$

Эта оценка непосредственно вытекает из нижеследующей леммы. Для функции $f \in L^1(0,1)$ положим

$$S^*(f,x) = \sup_{1 \leq m < \infty} \left| \sum_{n=0}^{m} a_n(f) f_n(x) \right| .$$

Лемма 6. Пусть последовательность разбиений $P = \{P_j\}_{j=0}^{\infty}$ обладает свойством (*). Тогда для произвольного $f \in L^1(0,1)$

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \mu\{x \in (0,1) : \ S^*(f,x) > \lambda\} \leq \frac{C}{\lambda} \|P(f)\|_1 , \quad \lambda > 0, \\ &\text{b)} \quad \|S^*(f)\|_p \leq C_p \|P(f)\|_p , \quad 1 < p < 2, \end{aligned} \tag{60}$$

где постоянная C_p не зависит от f.

Доказательство : Не умаляя общности можно считать, что f – полином : $f = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n f_n$. Для $\lambda > 0$ рассмотрим множества $E_\lambda = \{x \in (0,1) : P(f,x) > \lambda\}$, $B_\lambda = \{x : M(\chi_{E_\lambda}, x) > \frac{1}{4}\}$. Из свойств максимальной функции следует, что

$$B_\lambda = \cup_k I_k , \quad \mu(B_\lambda) \leq C\mu(E_\lambda), \tag{61}$$

где I_k, $k = 1, 2, ...$ – непересекающиеся интервалы. Если $x_0 \in (0,1) \setminus B_\lambda$, то $M(\chi_{E_\lambda}, x_0) \leq \frac{1}{4}$. Следовательно, для любого отрезка Δ, содержащего x_0, имеем

$$\mu(E_\lambda \cap \Delta) \leq \frac{1}{4}\mu(\Delta). \tag{62}$$

Положим $\Gamma_1 = \bigcup_k \Gamma_{1k}$, $\Gamma_{1k} = \{n : t_n \in I_k,\ \text{card}\ (\pi_n \cap I_k) > 2\}$, $\Gamma_2 = \{1, ..., N\} \setminus \Gamma_1$, и пусть $\phi_i = \sum_{n \in \Gamma_i} a_n f_n$, $i = 1, 2$. Докажем, что неравенства в (60) вытекают из следующих свойств a) и b) :

$$\text{a)} \int\limits_{(0,1)\setminus \widetilde{B}_\lambda} \sum_{n\in\Gamma_1} |a_n f_n(x)|\, dx \le C_0 \int\limits_{B_\lambda} P(f,x)\, dx, \quad \text{b)}\ \|P(\phi_2)\|_{C(0,1)} \le C_0\lambda, \tag{63}$$

где $\widetilde{B}_\lambda = \cup_k \widetilde{I}_k$. Из (61) и (63) имеем

$$\mu\left\{x : S^*(\phi_1, x) > \frac{\lambda}{2}\right\} \le \mu\left\{\widetilde{B}_\lambda\right\} + \mu\left\{x \in (0,1)\setminus \widetilde{B}_\lambda : S^*(\phi_1,x) > \frac{\lambda}{2}\right\} \le$$

$$\le 3\mu(B_\lambda) + \frac{2}{\lambda} \int\limits_{(0,1)\setminus \widetilde{B}_\lambda} S^*(\phi_1, x)\, dx \le 3C\mu(E_\lambda) + \frac{C_0}{\lambda}\int\limits_{\widetilde{B}_\lambda} P(f,x)\, dx \le \frac{C}{\lambda}\|P(f)\|_1 . \tag{64}$$

Так как $S^*(f) \le C \cdot M(f)$ (см. [4]), то из неравенства b) в (63) следует

$$\mu\left\{x : S^*(\phi_2, x) > \frac{\lambda}{2}\right\} \le \frac{4}{\lambda^2}\|M(\phi_2)\|_2^2 \le \frac{C}{\lambda^2}\|\phi_2\|_2^2 = \frac{C}{\lambda^2}\|P(\phi_2)\|_2^2 \le \frac{c}{\lambda}\|P(f)\|_1 . \tag{65}$$

Так как $f = \phi_1 + \phi_2$, то из (64) и (65) получим пункт a) в (60).

Для доказательства b) в (60) заметим сначала, что из (61) и пункта a) в (63) имеем

$$\psi_1(\lambda) := \mu\left\{x \in (0,1) : S^*(\phi_1, x) > \frac{\lambda}{2}\right\} \le C\mu(E_\lambda) + \frac{C}{\lambda}\int\limits_{\widetilde{B}_\lambda} P(f,x)\, dx \le$$

$$\le C\mu(E_\lambda) + C\mu\left(\widetilde{B}_\lambda \setminus E_\lambda\right) + \frac{C}{\lambda}\int\limits_{E_\lambda} P(f,x)\, dx \le C\mu(E_\lambda) + \frac{C}{\lambda}\int\limits_{E_\lambda} P(f,x)\, dx.$$

В силу (65) получим

$$\psi_2(\lambda) := \mu\left\{x \in (0,1) : S^*(\phi_2, x) > \frac{\lambda}{2}\right\} \le C\mu(E_\lambda) + \frac{C}{\lambda^2}\int\limits_{(0,1)\setminus E_\lambda} P^2(f,x)\, dx.$$

Следовательно

$$\psi(\lambda) := \mu\{x \in (0,1) : S^*(f,x) > \lambda\} \le \psi_1(\lambda) + \psi_2(\lambda) \le$$

$$\le C\mu(E_\lambda) + \frac{C}{\lambda}\int\limits_{E_\lambda} P(f,x)\, dx + \frac{C}{\lambda^2}\int\limits_{(0,1)\setminus E_\lambda} P^2(f,x)\, dx.$$

Отсюда получаем (см. [7], Приложение 1)

$$\|S^*(f)\|_p^p = p\int\limits_0^\infty \lambda^{p-1}\psi(\lambda)\, d\lambda \le C_p \int\limits_0^\infty \lambda^{p-1}\mu(E_\lambda)\, d\lambda +$$

$$+C_p\int_0^\infty \lambda^{p-2}\int_{E_\lambda} P(f,x)\,dx\,d\lambda + C_p\int_0^\infty \lambda^{p-3}\int_{(0,1)\setminus E_\lambda} P^2(f,x)\,dx\,d\lambda =$$

$$= C_p\|P(f)\|_p^p + C_p\int_0^1 P(f,x)\int_0^{P(f,x)} \lambda^{p-2}\,d\lambda\,dx +$$

$$+C_p\int_0^1 P^2(f,x)\int_{P(f,x)}^\infty \lambda^{p-3}\,d\lambda\,dx \le C_p\|P(f)\|_p^p.$$

Для завершения доказательства Леммы 6 остается установить неравенства (63). Пусть $I=(\alpha,\beta)=I_k$ при некотором k. Положим

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{2,1}=\{n:\ \mathrm{card}\ (\pi_n\cap I)\le 1,\quad 1\le n\le N\},\\
&\Gamma_{2,2}=\{n:\ \mathrm{card}\ (\pi_n\cap I)=2,\quad \{n\}\cap I\ne\emptyset,\quad 1\le n\le N\},\\
&\Gamma_{2,3}=\{n: t_n\ge\beta,\quad \mathrm{card}\ (\pi_n\cap I)\ge 2,\quad 1\le n\le N\},\\
&\Gamma_{2,4}=\{n: t_n\le\alpha,\quad \mathrm{card}\ (\pi_n\cap I)\ge 2,\quad 1\le n\le N\},\\
&\phi_{2,i}=\sum_{n\in\Gamma_{2,i}} a_n f_n,\quad i=1,2,3,4.
\end{aligned}\tag{66}$$

Пусть γ_1, γ_2 и γ_3 – узлы разбиений π_n, $n\in\Gamma_{2,1}$ такие, что $\gamma_1\le\alpha\le\gamma_2\le\beta\le\gamma_3$ (если I не содержит узла из π_n, считаем, что $\gamma_2=\gamma_3$). Так как $P(f,\alpha)\le\lambda$, то из (62) имеем $\mu\{x\in(\gamma_1,\gamma_2):\ P(\phi_{2,1},x)>\lambda\}\le\frac14(\gamma_2-\gamma_1)$. Учитывая, что $[P(\phi_{2,1},x)]^2$ – полином второй степени на (γ_1,γ_2), имеем

$$P(\phi_{2,1},x)\le C\lambda,\quad x\in(\gamma_1,\gamma_2).\tag{67}$$

Аналогично получим (67) при $x\in(\gamma_2,\gamma_3)$, т.е.

$$P(\phi_{2,1},x)\le C\lambda,\quad x\in I.\tag{68}$$

Если множество $\Gamma_{2,2}$ непусто, то оно содержит не более трех элементов. Пусть $\gamma_1,\dots,\gamma_4$ – узлы разбиения π_n такие, что $\gamma_1\le\alpha<\gamma_2<\gamma_3<\beta\le\gamma_4$. Так же как и в (67), имеем $P(\phi_{2,2},x)\le C\lambda$, $x\in(\gamma_1,\gamma_2)\cup(\gamma_3,\gamma_4)$. На (γ_2,γ_3) функция $\phi_{2,2}$ является суммой не более трех функций общей системы Франклина. Таким образом, получим

$$P(\phi_{2,2},x)\le C\lambda,\quad x\in I.\tag{69}$$

Оценим теперь функцию Пэли для $\phi_{2,3}$. Положим $n_1=\min\Gamma_{2,3}$, и пусть $\beta_1\in\pi_{n_1}$, $\alpha<\beta_1<\beta$, $(\beta_1,\beta)\cap\pi_{n_1}=\emptyset$, $\Gamma_{2,3,1}=\{n\in\Gamma_{2,3}:\ (\beta_1,\beta)\cap\pi_n=\emptyset\}$.

Далее, возьмем $n_2 = \min \Gamma_{2,3} \setminus \Gamma_{2,3,1}$, и $\beta_2 \in \pi_{n_2}$, $\beta_1 < \beta_2 < \beta$, $\Gamma_{2,3,2} = \{n \in \Gamma_{2,3} : \ n \geq n_2, \quad (\beta_2, \beta) \cap \pi_n = \emptyset\}$. Если множество $\Gamma_{2,3,k-1}$ и узел β_{k-1} известны, то полагаем $n_k = \min \Gamma_{2,3} \setminus \Gamma_{2,3,k-1}$, $\beta_k \in \pi_{n_k}$, $\beta_{k-1} < \beta_k < \beta$, $\Gamma_{2,3,k} = \{n \in \Gamma_{2,3} : n \geq n_k, \quad (\beta_k, \beta) \cap \pi_n = \emptyset\}$. Обозначим $\phi_{2,3,k} = \sum_{n \in \Gamma_{2,3,k}} a_n f_n$. Если $n \in \Gamma_{2,3,k}$, то f_n линейна на (β_k, β), и $\beta_1, \dots, \beta_{k-1}$ являются узлами из π_n. Следовательно, $P\left(\sum_{k=1}^{k_0} \phi_{2,3,k}, x\right) \leq C\lambda$, $x \in (\beta_k, \beta)$. Так как $t_n \geq \beta$, то имеем $P(\phi_{2,3,k_0}, x) \leq C\left(\frac{2}{3}\right)^{k_0 - k} \lambda$, $k < k_0$, $x \in (\alpha, \beta_k)$. Отсюда получаем, что

$$P^2(\phi_{2,3}, x) = \sum_{k=1}^{\infty} P^2(\phi_{2,3,k}, x) \leq C\lambda^2, \quad x \in I. \tag{70}$$

Аналогично доказывается, что

$$P(\phi_{2,4}, x) \leq C \cdot \lambda, \quad x \in I. \tag{71}$$

Из (68) – (71) находим $P(\phi_2, x) \leq C \sum_{i=1}^{4} P(f_{2,1}, x) \leq C \cdot \lambda$, $x \in B_\lambda$, откуда следует неравенство b) из (63).

Для доказательства неравенства a) из (63) достаточно показать, что

$$\int\limits_{I_k^\circ} \sum_{n \in \Gamma_{1,k}} |a_n f_n(x)| \, dx \leq C \int\limits_{I_k} P(f, x) \, dx, \quad k = 1, 2, \dots \tag{72}$$

Пусть $I = I_{k_0}$ при некотором k_0, и

$$\widetilde{\Gamma} = \Gamma_{1,k_0} = \{n : \ t_n \in I, \ \text{card} \ (\pi_n \cap I) > 2\}. \tag{73}$$

Покажем, что

$$\int\limits_{\beta}^{1} \sum_{n \in \widetilde{\Gamma}} |a_n f_n(x)| \, dx \leq C \int_I P(f, x) \, dx. \tag{74}$$

Интеграл по интервалу $(0, \alpha)$ оценивается аналогично. Рассмотрим разложение $\widetilde{\Gamma} = \bigcup_{j=0}^{\infty} \widetilde{\Gamma}_j$, $\widetilde{\Gamma}_j = \left\{n \in \widetilde{\Gamma} : d_n(\beta) = j\right\}$. Из (73) следует, что при $n \in \widetilde{\Gamma}$ по крайней мере один из интервалов $\{n^+\}$, $\{n\}$, $\{n^-\}$ лежит в I. Наряду с этим выберем один интервал, близкий к α и обозначим его через u_n. Если $n \in \widetilde{\Gamma}_j$, $j = 0, 1, \dots$, то имеем

$$\int\limits_{\beta}^{1} |a_n f_n(x)| \, dx \leq C \left(\frac{2}{3}\right)^j \int\limits_{u_n} |a_n f_n(x)| \, dx. \tag{75}$$

В силу (8) интервал u_n состоит из двух интервалов линейности функции f_n. Для одного из этих интервалов (скажем $\widetilde{u}_n$), имеем

$$\int\limits_{u_n} |a_n f_n(x)| \, dx \leq 2 \int\limits_{\widetilde{u}_n} |a_n f_n(x)| \, dx. \tag{76}$$

Обозначив через $\widetilde{u}_n^-$ левую половину интервала $\widetilde{u}_n$, с учетом линейности функции f_n на $\widetilde{u}_n$ получим

$$\int_{\widetilde{u}_n} |a_n f_n(x)|\, dx \le C \int_{\widetilde{u}_n^-} |a_n f_n(x)|\, dx \le C \int_{\widetilde{u}_n^-} P(f,x)\, dx. \tag{77}$$

Из (75) - (77) следует, что при $j = 0, 1, \ldots$

$$\int_{\beta}^{1} \sum_{n\in\widetilde{\Gamma}_j} |a_n f_n(x)|\, dx \le C \left(\frac{2}{3}\right)^j \sum_{n\in\widetilde{\Gamma}_j} \int_{\widetilde{u}_n^-} P(f,x)\, dx. \tag{78}$$

В силу свойства (*), при фиксированном j количество пересечений интервалов $\widetilde{u}_n^-$ ограничено сверху числом, зависящим от M. Следовательно,

$$\sum_{n\in\widetilde{\Gamma}_j} \int_{\widetilde{u}_n^-} P(f,x)\, dx \le C \left(\frac{2}{3}\right)^j \int_U P(f,x)\, dx \le C \left(\frac{2}{3}\right)^j \int_I P(f,x)\, dx,$$

где $U = \bigcup_{n\in\widetilde{\Gamma}_j} \widetilde{u}_n^-$. Суммируя эти неравенства по $j = 0, 1, \ldots$, получим (74), а следовательно и (72). Этим завершаются доказательства Леммы 6 и Теоремы 2.

ABSTRACT. The paper studies general Franklin systems, that extend Franklin's construction to arbitrary sets of knots and derives conditions, under which a general Franklin system is an unconditional basis in the spaces L_p, $1 < p < \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ph. Franklin, "A set of continuous orthogonal functions", Math. Ann. vol. 100, pp. 522 - 529, 1928.
2. С. В. Бочкарёв, "Некоторые неравенства для рядов Франклина", Anal. Math., vol. 1, pp. 249 - 257, 1975.
3. P. Wojtaszczyk, "The Franklin system is an unconditional basis in H^1", Ark. Mat., vol. 20, pp. 293 - 300, 1982.
4. Z. Ciesielski, A. Kamont, "Projections onto piecewise linear functions", Funct. Approx. Comment. Math., vol. 25, pp. 129 - 143, 1997.
5. G. Gevorkyan, A. Kamont, "On general Franklin systems", Dissertationes Mathematicae, CCCLXXIV, pp. 1 - 59, 1998.
6. Z. Ciesielski, "Properties of the orthonormal Franklin system", Studia Math., vol. 23, pp. 141 - 157, 1963.
7. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные Ряды, Наука, Москва, 1999.

5 апреля 2000

Ереванский государственный университет,
Институт математики
НАН Армении