О ПОДВИЖНОСТИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

П. С. Геворкян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика. том 35, № 3, 2000

Понятия M-доминирования и M-эквивалентности были определены в [1] для метризуемых компактов. Дж. Олендский [1] использовал эти понятия при изучении различных типов подвижности (A-, n- и $\mathcal{R}$-подвижности, где $\mathcal{R}$ – семейство метризуемых компактов).

В настоящей статье эти понятия рассматриваются для топологических пространств и обобщаются некоторые результаты из [1]. Кроме того, для некоторых классов топологических пространств даётся положительный ответ на проблему (3.9) из [1] (см. Проблему ниже).

Пусть X – топологическое пространство и $\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$ - спектр, ассоциированный с X (в смысле Мориты [2]).

Определение 1. Топологическое пространство X называется **подвижным**, если спектр $\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$ удовлетворяет условию : для любого $\alpha \in A$ и $\alpha'' \geq \alpha$ существуют $\alpha' \geq \alpha$ и непрерывное отображение $r^{\alpha'\alpha''} : X_{\alpha'} \longmapsto X_{\alpha''}$ такое, что $p_{\alpha\alpha'} \cong p_{\alpha\alpha''} \circ r^{\alpha'\alpha''}$.

Определение 2. Топологическое пространство X называется **n-подвижным**, если спектр $\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$ удовлетворяет условию : для любых $\alpha \in A$, $\alpha'' \geq \alpha$, спектра P ($dim\ P \leq n$) и отображения $f' : P \longmapsto X_{\alpha'}$ существуют $\alpha' \geq \alpha$ и отображение $f'' : P \longmapsto X_{\alpha''}$ такие, что $p_{\alpha\alpha'} \circ f' \cong p_{\alpha\alpha''} \circ f''$.

Если в Определении 2 потребовать, чтобы P принадлежал семейству $\mathcal{R}$ топологических пространств (без условия $dim\ P \leq n$), то получим понятие $\mathcal{R}$-подвижности. Если семейство $\mathcal{R}$ состоит из единственного пространства A, то мы приходим к понятию A-подвижности пространства X. Как и в [1], для топологических пространств можно определить понятия доминирования и эквивалентности.

Определение 3. Семейство топологических пространств $\mathcal{R}$ называется доминируемым к семейству $\mathcal{R}'$ (пишем $\mathcal{R} \le \mathcal{R}'$), если из $\mathcal{R}'$-подвижности пространства X следует $\mathcal{R}$-подвижность пространства X. Семейства топологических пространств $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ называются **эквивалентными** (пишем $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}'$), если $\mathcal{R} \le \mathcal{R}'$ и $\mathcal{R}' \le \mathcal{R}$.

Топологическое пространство A можно рассматривать как одночленное семейство $\{A\}$. Следовательно, предыдущее определение определяет обычную эквивалентность топологических пространств. Последнее обеспечивает непересекаемость классов эквивалентных топологических пространств. Через $sh\ A$ обозначим шейп пространства A.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ – семейства топологических пространств. Если для всякого пространства $A \in \mathcal{R}$ существует пространство $A' \in \mathcal{R}'$ такое, что $sh\ A \le sh\ A'$, то $\mathcal{R} \le \mathcal{R}'$.

Доказательство : Пусть X – произвольное $\mathcal{R}'$-подвижное пространство. Докажем, что X $\mathcal{R}$-подвижен. Пусть $\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$ – спектр, ассоциированный с X. Так как X $\mathcal{R}'$-подвижен, то для любых $\alpha \in A$, $\alpha'' \ge \alpha$, $A' \in \mathcal{R}'$ и отображения $\tilde{f}' : A' \longmapsto X_{\alpha'}$ существуют $\alpha' \ge \alpha$ и отображение $\tilde{f}'' : A' \longmapsto X_{\alpha''}$ такие, что $p_{\alpha\alpha'} \circ \tilde{f}' \cong p_{\alpha\alpha''} \circ \tilde{f}''$. Теперь докажем, что этот α' удовлетворяет условию $\mathcal{R}$-подвижности, т.е. для любых $\alpha'' \ge \alpha$, $A \in \mathcal{R}$ и $f' : A \longmapsto X_{\alpha'}$ существует отображение $f'' : A \longmapsto X_{\alpha''}$ такое, что $p_{\alpha\alpha'} \circ f' \cong p_{\alpha\alpha''} \circ f''$. В условиях Теоремы 1 существуют шейповые морфизмы $s' : A \longmapsto A'$ и $s : A' \longmapsto A$ такие, что

$$s \circ s' = i, \tag{1}$$

где $i : A \longmapsto A$ – тождественный шейповый морфизм. По определению шейпового морфизма (см. [3]), каждому отображению $A \longmapsto X_{\alpha'}$ с помошью морфизма s соответствует отображение $A' \longmapsto X_{\alpha'}$. Следовательно, отображению $f' : A \longmapsto X_{\alpha'}$ соответствует отображение $s(f') : A' \longmapsto X_{\alpha'}$. Так как X $\mathcal{R}'$-подвижен, то для $s(f')$ существует отображение $g : A' \longmapsto X_{\alpha''}$ такое, что

$$p_{\alpha\alpha''} \circ g \cong p_{\alpha\alpha'} \circ s(f'). \tag{2}$$

Поэтому имеем $s'(g) : A \longmapsto X_{\alpha''}$. Отображение $f'' = s'(g)$ является искомым отображением, так как в силу (1) и (2) имеем $p_{\alpha\alpha'} \circ f' \cong p_{\alpha\alpha''} \circ f''$. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. Если $sh\ A \leq sh\ B$, то $A \leq B$.

Теорема 2. Шейпово эквивалентные пространства эквивалентны.

Из Теоремы 2 следует, что $[A]_{sh} \subset [A]_M$, где $[A]_M$ – класс пространств, эквивалентных A, а $[A]_{sh}$ – класс пространств, шейпово эквивалентных A. Ниже мы докажем (Пример 1), что это вложение является строгим, т.е. Теорема 2 не допускает обращения. Тот же пример показывает, что эквивалентные пространства могут иметь неизоморфные группы гомологий.

Теорема 3. Существует метризуемый компакт A такой, что A-подвижность произвольного топологического пространства эквивалентна подвижности.

Теорема 4. Существует метризуемый компакт A с $\dim A \leq n$ такой, что A-подвижность произвольного топологического пространства эквивалентна n-подвижности.

Доказательства Теорем 3, 4 по существу повторяет доказательства соответствующих Теорем для метризуемых компактов (см. [1]), и поэтому опускаются. Теоремы 3 и 4 сводят вопрос n-подвижности к изучению A-подвижности для метризуемого компакта A. Возникает следующий вопрос : можно ли изучение $\mathcal{R}$-подвижности свести к изучению A-подвижности ? Точнее говоря : для любого семейства $\mathcal{R}$ топологических пространств существует ли топологическое пространство A такое, что $\mathcal{R} \sim \{A\}$? Этот вопрос был поставлен для метризуемого компакта (см. [1], Проблема (3.9)). Поставим этот вопрос в более общем виде.

Проблема. Пусть K – класс топологических пространств и $\mathcal{R} \subset K$. Существует ли пространство $A \in K$ такое, что $\mathcal{R} \sim \{A\}$?

Следующая теорема дает положительный ответ для классов топологических пространств, которые замкнуты относительно операции $\coprod$ несвязной топологической суммы.

Теорема 5. Пусть K – класс топологических пространств, замкнутый относительно несвязной топологической суммы. Для произвольного семейства $\mathcal{R} \subset K$ существует топологическое пространство A такое, что $\mathcal{R} \sim \{A\}$.

Доказательство : Обозначим через T_i, $i \in I$ элементы семейства $\mathcal{R}$. Рассмотрим несвязную топологическую сумму $R = \coprod_{i \in I} T_i$ всех элементов $T_i \in \mathcal{R}$. Имеем $R \in K$. Для завершения доказательства нам нужна следующая Лемма.

Лемма 1. $R \sim \{T_i : i \in I\}$.

Доказательство : Так как $sh\ T_i \leq sh\ R$, $i \in I$, то согласно Следствию 1 имеем $\{T_i\} \leq R$. Остается доказать обратное утверждение $R \leq \{T_i\}$. Пусть X – произвольное $\{T_i\}$-подвижное пространство и $\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, \Lambda\}$ – спектр, ассоциированный с X. Докажем, что X является R-подвижным пространством. Из $\{T_i\}$-подвижности пространства X следует, что для любых $\alpha \in \Lambda$, $\alpha'' \geq \alpha$ и всякого отображения $f_i' : T_i \longmapsto X_{\alpha'}$, $i \in I$ существуют $\alpha' \geq \alpha$ и отображение $f'' : T_i \longmapsto X_{\alpha''}$ такие, что $p_{\alpha\alpha'} \circ f' \cong p_{\alpha\alpha''} \circ f''$.

Теперь покажем, что для любого $\alpha \in \Lambda$ элемент $\alpha' \geq \alpha$ удовлетворяет определению R-подвижности. Пусть f' есть отображение $f' : R \longmapsto X_{\alpha'}$. Рассмотрим отображение $f_i' \equiv f'|_{T_i} : T_i \longmapsto X_{\alpha'}$, $i \in I$. Из $\{T_i\}$-подвижности пространства X следует, что для f_i' существует отображение $f_i'' : T_i \longmapsto X_{\alpha''}$ такое, что $p_{\alpha\alpha'} \circ f' \cong p_{\alpha\alpha''} \circ f''$. Легко установить, что отображение $f'' \equiv \coprod_i f''|_{T_i} : T_i \longmapsto X_{\alpha''}$ будет искомым, т.е. $p_{\alpha\alpha'} \circ f' \cong p_{\alpha\alpha''} \circ f''$. Лемма 1 и Теорема 5 доказаны.

Пример эквивалентных пространств, имеющих неизоморфные группы гомологий (и, следовательно, различные шейпы). Пусть A и B – топологические пространства, имеющие неизоморфные группы k-гомологий : $H_k(A) \not\sim H_k(B)$. Рассмотрим несвязные топологические суммы $A \coprod A \coprod B$ и $A \coprod B \coprod B$. Ввиду Леммы 1 получим $A \coprod A \coprod B \sim \{A, A, B\} \sim \{A, B\}$, $A \coprod B \coprod B \sim \{A, B, B\} \sim \{A, B\}$. Следовательно, имеем $A \coprod A \coprod B \sim A \coprod B \coprod B$. Однако $H_k(A \coprod A \coprod B) \not\sim H_k(A \coprod B \coprod B)$, так как $H_k(A \coprod A \coprod B) \sim H_k(A) \oplus H_k(A) \oplus H_k(B)$, $H_k(A \coprod B \coprod B) \sim H_k(A) \oplus H_k(B) \oplus H_k(B)$ и $H_k(A) \oplus H_k(A) \oplus H_k(B) \not\sim H_k(A) \oplus H_k(B) \oplus H_k(B)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Olendski, "On movability and other similar shape properties", Fund. Math., vol. 88, no. 3, pp. 179 – 191, 1975.
2. K. Morita, "On shapes of topological spaces", Fund. Math., vol. 86, no. 3, pp. 251 – 259, 1975.
3. S. Mardesic, "Shapes for topological spaces", Gen. Topol. and Appl., vol. 3, no. 3, pp. 265 – 282, 1973.

2 февраля 2000

Арцахский государственный университет,
Степанакерт, Нагорно-Карабахская республика
E-mail : pgev@arsu.nk.am