ОРТОГОНАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ СОЛЕНОИДАЛЬНЫХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

Г. Г. Джебеян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 3, 2000

В настоящей статье рассматривается пространство соленоидальных вектор-функций, определенных в конечной трехмерной области Ω, граница которой обладает плоской частью Σ, содержащей ортогональный базис двумерных вектор-функций, определенных на Σ. Показано, что каждый элемент этого базиса порождает пространство трехмерных соленоидальных векторов в Ω, и соответствующее пространство соленоидальных векторов допускает ортогональное разложение по этим индуцированным пространствам.

§1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Пусть (X, Y, Z) – трёхмерная декартова система координат, а Σ – ограниченное подмножество в плоскости XOY с достаточно гладкой границей l. Обозначим через $L_2(\Sigma)$ гильбертово пространство двумерных вектор-функций, интегрируемых с квадратом на Σ, с метрикой

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_\Sigma = \int_\Sigma (u_x v_x^* + u_y v_y^*)\, d\sigma.$$

Ниже будем использовать следующие обозначения :

$\widetilde{M}(\Sigma)$ = линеал градиентов гладких на Σ функций,

$\widetilde{M}_0(\Sigma)$ = линеал градиентов функций, гладких на Σ и обращающихся в нуль на контуре l,

$\widetilde{M}_1(\Sigma)$ = линеал градиентов функций, гладких на Σ, нормальная производная которых равна нулю на контуре l,

$\widetilde{N}(\Sigma)$ = линеал гладких на Σ двумерных соленоидальных векторов,

$\widetilde{N}_0(\Sigma)$ = линеал гладких на Σ двумерных соленоидальных векторов, нормальная компонента которых равна нулю на контуре l,

$\widetilde{N}_1(\Sigma)$ = линеал гладких на Σ двумерных соленоидальных векторов, касательная компонента которых на l равна нулю,

$\widetilde{U}(\Sigma)$ = линеал градиентов гармонических на Σ функций,

$M(\Sigma), M_k(\Sigma), N(\Sigma), N_k(\Sigma), U(\Sigma)$ = замыкания на $L_2(\Sigma)$ линеалов $\widetilde{M}(\Sigma)$, $\widetilde{M}_k(\Sigma)$, $\widetilde{N}(\Sigma)$, $\widetilde{N}_k(\Sigma)$, $\widetilde{U}(\Sigma)$ соответственно, $k = 0, 1$.

Имеем следующие разложения, см. [5] :

$$L_2(\Sigma) = M_0 \oplus N_1 \oplus U, \quad L_2(\Sigma) = M_1 \oplus N_0 \oplus U. \tag{1.1}$$

Из (1.1) следует, что в общем случае, гладкие векторы $\mathbf{u}$ из $L_2(\Sigma)$ имеют на контуре l ненулевые нормальную и касательную компоненты, которые обозначим через $\mathbf{u_n}$ и $\mathbf{u}_\tau$. Через $\mathbf{u_n}\big|_l$ и $\mathbf{u}_\tau\big|_l$ обозначим сужения этих компонент на l.

Лемма 1.1. Всякие гладкие вектор-функции $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \Sigma$, удовлетворяющие на l условию $v_n\big|_l = 0$, $\mathbf{u}_\tau\big|_l = 0$, допускают представления в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{u}_1 \in \widetilde{M}_0, \quad \mathbf{u}_2 \in \widetilde{N}_1 \quad \text{и} \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{v}_1 \in \widetilde{M}_1, \quad \mathbf{v}_2 \in \widetilde{N}_0 \tag{1.2}$$

с попарно ортогональными $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$, как и $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$.

Доказательство : Пусть φ_0 – решение двумерной задачи

$$\Delta_\perp \varphi = div\, \mathbf{u}, \quad \varphi\big|_l = 0,$$

где $\mathbf{u}$ – гладкий двумерный вектор на Σ. Имеем $\mathbf{u}_1 = grad_\perp \varphi_0 \in \widetilde{M}_0$. Рассмотрим вектор $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1$. Так как $div\ \mathbf{u}_2 = 0$, получим представление $\mathbf{u}_2 = \mathbf{z}_0 \times grad_\perp \varphi_1$, где $\mathbf{z}_0$ – единичный вектор, ортогональный к Σ и φ_1 – гладкая функция. Предположим, что φ_1 является решением задачи

$$\Delta_\perp \varphi = div\ (\mathbf{u} \times \mathbf{z}_0), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_l = 0,$$

где $\mathbf{n}$ – нормальное направление к l. Легко проверить, что $(\mathbf{u}_2)_\tau\big|_l = 0$, следовательно $\mathbf{u}_2 \in \widetilde{N}_1(\Sigma)$, что доказывает первое представление из (1.2). Аналогично доказывается второе представление.

Теперь проверим ортогональность построенных вектор-функций $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$. Так как $(\mathbf{u}_1)_\tau\big|_l = 0$ и из $\varphi_0\big|_l = 0$ следует $\dfrac{\partial \varphi_0}{\partial \tau}\bigg|_l = 0$, то имеем

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)_\Sigma = \int_\Sigma grad_\perp \varphi_0 (grad_\perp \varphi_1 \times \mathbf{z}_0)\, d\sigma = \int_\Sigma div(grad_\perp \varphi_0 \times \varphi_1 \mathbf{z}_0)\, d\sigma =$$

$$= \oint_l (grad_\perp \varphi_0 \times \varphi_1 \mathbf{z}_0)\mathbf{n}\, dl = \oint_l \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau} \varphi_1\, dl = 0.$$

Аналогично проверяется ортогональность $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$. Лемма 1.1 доказана.

В подпространствах $M_0(\Sigma), M_1(\Sigma), N_0(\Sigma), N_1(\Sigma)$ существуют [5] ортонормированные базисы, состоящие из элементов

$$\mathbf{F}^e_m = grad_t \gamma_m \in M_0, \quad \mathbf{G}^e_m = \mathbf{z}_0 \times grad_t \gamma_m \in N_0,$$

$$\mathbf{G}^h_m = grad_t \zeta_m \in M_1, \quad \mathbf{F}^h_m = grad_t \zeta_m \times \mathbf{z}_0 \in N_1,$$

где $\{\gamma_m\}_1^\infty$ и $\{\zeta_m\}_1^\infty$ – системы собственных функций мембранных задач

$$\Delta_\perp \gamma_m + \mu_m^2 \gamma_m = 0, \quad \gamma_m\big|_l = 0, \quad m = 1, 2, ..., \tag{1.3a}$$

$$\Delta_\perp \zeta_m + \nu_m^2 \zeta_m = 0, \quad \frac{\partial \zeta_m}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_l = 0, \quad m = 1, 2, ..., \tag{1.3b}$$

соответствующие собственным значениям $\{\mu_m^2\}_1^\infty$ и $\{\nu_m^2\}_1^\infty$. Собственные функции нормированы следующим образом : $||\gamma_m||_\Sigma = \mu_m^{-2}$, $||\zeta_m||_\Sigma = \nu_m^{-2}$, обеспечивающие нормировку базисных элементов $||\mathbf{F}^{e,h}_m||_\Sigma = 1$ и $||\mathbf{G}^{e,h}_m||_\Sigma = 1$.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область с гладкой границей S, и Ω_d – цилиндр с бесконечно малой высотой d и с базисами $\Sigma \subset S$ и Σ_d, $\Sigma_d \cap \Omega = \emptyset$. Рассмотрим область $\Omega_1 = \Omega \cup \Omega_d$. Области такого типа часто встречаются при постановке задач в теории волноводных систем, см. [6].

Выберем декартову систему координат (X, Y, Z) так, чтобы $\Sigma \subset XOY$, а ось OZ была направлена во внутрь области Ω.

Лемма 1.2. **Пусть f – достаточно гладкая функция, определенная в Ω и удовлетворяющая условиям**

$$\frac{\partial f}{\partial z}\bigg|_\Sigma \neq 0 \text{ и } f\big|_{S\setminus\Sigma} = 0 \text{ или } \frac{\partial f}{\partial n}\bigg|_{S\setminus\Sigma} = 0.$$

Если функция $f^0 = f\big|_\Sigma$ удовлетворяет условиям

$$(f^0, \gamma_k)_\Sigma \neq 0, \quad (f^0, \gamma_m)_\Sigma = 0, \quad m \neq k, \quad \text{при} \quad f\big|_{S\setminus\Sigma} = 0, \tag{1.4a}$$

$$(f^0, \zeta_k)_\Sigma \neq 0, \quad (f^0, \zeta_m)_\Sigma = 0, \quad m \neq k, \quad \text{при} \quad \frac{\partial f}{\partial n}\bigg|_{S\setminus\Sigma} = 0, \tag{1.4b}$$

то имеем

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}, \gamma_k\right)_\Sigma \neq 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial z}, \gamma_m\right)_\Sigma = 0, \quad m \neq k, \quad \text{при} \quad f\big|_{S\setminus\Sigma} = 0, \tag{1.5a}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}, \zeta_k\right)_\Sigma \neq 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial z}, \zeta_m\right)_\Sigma = 0, \quad m \neq k, \qquad \text{при} \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial n}\right|_{S\setminus\Sigma} = 0, \qquad (1.5b)$$

где $\{\gamma_m\}_1^\infty$ и $\{\zeta_m\}_1^\infty$ – системы собственных функций мембранных задач (1.3a) и (1.3b).

Доказательство : В Ω_d рассмотрим функцию $\tilde{f}$, удовлетворяющую граничным условиям при $m \neq k$

$$\left.\tilde{f}\right|_{S_d} = 0, \quad \left.\tilde{f}\right|_\Sigma = \left.f\right|_\Sigma, \quad \left.\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}\right|_\Sigma = -\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_\Sigma, \quad (\tilde{f}, \gamma_k)_{\Sigma_d} \neq 0, \quad (\tilde{f}, \gamma_m)_{\Sigma_d} = 0, \quad (1.6)$$

где S_d – боковая поверхность цилиндра Ω_d. Функцию $\tilde{f}$ можно представить в виде $\tilde{f} = \psi(z)\phi(x, y)$, где ϕ – достаточно гладкая функция поперечных координат, равная нулю на контуре, охватывающем поперечное сечение Σ. Следовательно, ϕ допускает разложение в регулярно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям мембранной задачи (1.3a) :

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \tilde{\gamma}_n, \quad \tilde{\gamma}_n = \mu_n \gamma_n .$$

Из краевых условий (1.6) следует, что

$$(\tilde{f}, \tilde{\gamma}_k)_{\Sigma_d} = \psi(-d)c_k \neq 0, \quad (\tilde{f}, \tilde{\gamma}_m)_{\Sigma_d} = \psi(-d)c_m = 0, \quad m \neq k,$$

откуда следует, что $c_m = 0$ при всех $m \neq k$. Следовательно, всюду в Ω_d имеем

$$\tilde{f} = \psi(z)c_k\tilde{\gamma}_k, \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z} = \psi'(z)c_k\tilde{\gamma}_k.$$

Таким образом, выполняются краевые условия

$$\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}, \tilde{\gamma}_k\right)_{\Sigma_d} = \psi'(-d)c_k \neq 0, \quad \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}, \tilde{\gamma}_k\right)_\Sigma = \psi'(0)c_k = \left(\frac{\partial f}{\partial z}, \tilde{\gamma}_k\right)_\Sigma,$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}, \tilde{\gamma}_m\right)_{\Sigma_d} = 0, \quad \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}, \tilde{\gamma}_m\right)_\Sigma = -\left(\frac{\partial f}{\partial z}, \tilde{\gamma}_m\right)_\Sigma = 0.$$

Вычисляя предел при $d \to 0$ ($\Omega_1 \to \Omega$, $\Sigma_d \to \Sigma$), получим (1.5a). Аналогично можно доказать (1.5b). Лемма 1.2 доказана.

Отметим, что при $\left.f\right|_\Sigma \neq 0$ имеет место и обратное утверждение, т.е. из (1.5a), (1.5b) следуют (1.4a), (1.4b).

§2. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ СОЛЕНОИДАЛЬНЫХ ВЕКТОР–ФУНКЦИЙ

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область с достаточно гладкой границей $S \cup \Sigma$, и пусть $L_2(\Omega)$ – гильбертово пространство трехмерных вектор-функций, определенных на Ω и интегрируемых с квадратом в Ω с метрикой

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_\Omega = \int_\Omega (u_x v_x^* + u_y v_y^* + u_z v_z^*)\, d\omega.$$

Используем обозначения из [1] – [3] для следующих линеалов :

$\widetilde{J}(\Omega) =$ гладкие векторы $\mathbf{u}$, у которых $div\ \mathbf{u} = 0$,

$\widetilde{J}_1(\Omega) =$ гладкие векторы $\mathbf{u}$, у которых $div\ \mathbf{u} = 0$ и $u_z\big|_\Sigma = 0$,

$\widetilde{J}_2(\Omega) =$ гладкие векторы $\mathbf{v}$, у которых $div\ \mathbf{v} = 0$ и $v_n\big|_S = 0$,

$\widetilde{J}_0(\Omega) =$ гладкие векторы $\mathbf{v}$, у которых $div\ \mathbf{v} = 0$, $v_z\big|_\Sigma = 0$ и $v_n\big|_S = 0$,

$\widetilde{U}_1(\Omega) =$ градиенты гармонических функций, обращающихся в нуль на S,

$\widetilde{U}_2(\Omega) =$ градиенты гармонических функций, нормальная производная которых равна нулю на S.

Далее, пусть $J(\Omega), J_1(\Omega), J_2(\Omega), J_0(\Omega), U_1(\Omega), U_2(\Omega)$ – замыкания в $L_2(\Omega)$ линеалов $\widetilde{J}(\Omega), \widetilde{J}_1(\Omega), \widetilde{J}_2(\Omega), \widetilde{J}_0(\Omega), \widetilde{U}_1(\Omega), \widetilde{U}_2(\Omega)$, соответственно.

Имеем следующие ортогональные разложения, см. [3] :

$$J = J_1 \oplus U_1, \quad J_2 = J_0 \oplus U_2. \tag{2.1}$$

В Ω рассмотрим гладкую вектор-функцию $\mathbf{u} \in \widetilde{J}(\Omega)$, удовлетворяющую условию $\mathbf{u}_t\big|_S = 0$, где $\mathbf{u}_t$ – поперечная компонента вектора $\mathbf{u}$ на Σ. Если предполагать, что касательные компоненты непрерывны на границе l между S и Σ, то получим условие $\mathbf{u}_t\tau\big|_l = 0$, где τ – касательный единичный вектор в l. Согласно Лемме 1.1 имеем

$$\mathbf{u}_t\big|_\Sigma = \mathbf{u}_t^e + \mathbf{u}_t^h = \sum_{m=1}^{\infty} a_m^e \mathbf{F}_m^e + \sum_{m=1}^{\infty} a_m^h \mathbf{F}_m^h. \tag{2.2}$$

Так как Ω является предельной областью, то продольная компонента удовлетворяет условию $u_z\big|_l = 0$, Следовательно

$$u_z\big|_\Sigma = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^e \widetilde{\gamma}_n, \quad \widetilde{\gamma}_n = \mu_n \gamma_n,$$

где γ_n – нормированные собственные функции мембранной задачи (1.3а).

Граничные значения на Σ поперечных компонент гладких вектор-функций $\mathbf{v} \in \widetilde{J}_2(\Omega)$ удовлетворяют условию $\mathbf{v}_t\mathbf{n}\big|_l = 0$. Следоватсльно, в силу Леммы 1.1, имеем

$$\mathbf{v}_t\big|_\Sigma = \mathbf{v}_t^e + \mathbf{v}_t^h = \sum_{m=1}^{\infty} b_m^e \mathbf{G}_m^e + \sum_{m=1}^{\infty} b_m^h \mathbf{G}_m^h.$$

Для продольных компонент предполагаем, что они удовлетворяют условию $\left.\dfrac{\partial v_z}{\partial n}\right|_l = 0$, и тогда они могут быть представлены на Σ в виде регулярно сходящихся рядов

$$v_z\big|_\Sigma = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^h \widetilde{\zeta}_n, \quad \widetilde{\zeta}_n = \nu_n \zeta_n,$$

где ζ_n – нормированные собственные функции мембранной задачи (1.3b).

Из (2.1), (2.2) следует, что в случае когда вектор $\mathbf{u} \in \widetilde{J}(\Omega)$ и $\mathbf{u}_t\big|_\Sigma \in \widetilde{N}_1(\Sigma)$, то $\mathbf{u} \in \widetilde{J}_1(\Omega)$. Следовательно, в $\widetilde{J}_1(\Omega)$ существуют, по крайней мере, два множества гладких вектор-функций $\widetilde{J}_1^e(\Omega)$ и $\widetilde{J}_1^h(\Omega)$, поперечные компоненты которых на Σ принадлежат $\widetilde{M}_0(\Sigma)$ и $\widetilde{N}_1(\Sigma)$, соответственно. Аналогично, в $\widetilde{J}_0(\Omega)$ существуют два линеала $\widetilde{J}_0^h(\Omega)$ и $\widetilde{J}_0^e(\Omega)$, поперечные компоненты которых на Σ принадлежат $\widetilde{M}_1(\Sigma)$ и $\widetilde{N}_0(\Sigma)$, соответственно.

Линеалы $\widetilde{J}_1^e(\Omega)$, $\widetilde{J}_1^h(\Omega)$, $\widetilde{J}_0^h(\Omega)$ и $\widetilde{J}_0^e(\Omega)$ будем рассматривать как множества гладких соленоидальных вектор-функций в Ω, индуцированные ортогональными линеалами $\widetilde{M}_0(\Sigma)$, $\widetilde{N}_1(\Sigma)$, $\widetilde{M}_1(\Sigma)$ и $\widetilde{N}_0(\Sigma)$ соответственно.

Рассмотрим следующие множества :

$\widetilde{J}^e(\Omega) =$ гладкие соленоидальные вектор-функции $\mathbf{u}$, для которых $\mathbf{u}_t\big|_\Sigma \in \widetilde{M}_0(\Sigma)$,

$\widetilde{J}_2^h(\Omega) =$ гладкие соленоидальные вектор-функции $\mathbf{v}$, для которых $\mathbf{v}_t\big|_\Sigma \in \widetilde{M}_1(\Sigma)$ и $v_n\big|_S = 0$,

$\widetilde{J}^{k,e}(\Omega) =$ гладкие соленоидальные вектор-функции $\mathbf{u}$, для которых $\mathbf{u}_t\big|_\Sigma \in \widetilde{M}_0(\Sigma)$, $(u_z, \gamma_k)_\Sigma \neq 0$ и $(u_z, \gamma_m)_\Sigma = 0$ при $m \neq k$,

$\widetilde{J}^{k,h}(\Omega) =$ гладкие соленоидальные вектор-функции $\mathbf{u}$, для которых $u_z\big|_\Sigma = 0$, $(\mathbf{u}_t, \mathbf{F}_k^h)_\Sigma \neq 0$ и $(\mathbf{u}_t, \mathbf{F}_m^h)_\Sigma = 0$ при $m \neq k$,

$\widetilde{J}_2^{k,e}(\Omega) =$ гладкие соленоидальные вектор-функции $\mathbf{v}$, для которых $v_n\big|_S = v_z\big|_\Sigma = 0$, $(\mathbf{v}_t, \mathbf{G}_k^e)_\Sigma \neq 0$ и $(\mathbf{v}_t, \mathbf{G}_m^e)_\Sigma = 0$ при $m \neq k$,

$\widetilde{J}_2^{k,h}(\Omega) =$ гладкие соленоидальные вектор-функции $\mathbf{v}$, для которых $v_n\big|_S = 0$, $(v_z, \zeta_k)_\Sigma \neq 0$ и $(v_z, \zeta_m)_\Sigma = 0$ при $m \neq k$.

Через $J^{e,h}$, $J_i^{e,h}$, $J_i^{k,e,h}$ обозначим замыкания в $L_2(\Omega)$ соответственных множеств, $i = 0, 1, 2$.

Ортогональные разложения (2.1) для индуцированных подпространств имеют вид

$$J^e = J_1^e \oplus U_1, \quad J_2^h = J_0^h \oplus U_2. \tag{2.3}$$

Теорема 2.1. Пусть γ_m – гармонические функции в Ω, удовлетворяющие граничным условиям

$$\gamma_m\big|_\Sigma = \gamma_m^0, \quad \gamma_m\big|_S = 0. \tag{2.4}$$

Система вектор-функций $\{\mathbf{w}_m = grad\ \gamma_m\}$ образует ортогональный базис в индуцированном подпространстве U_1 со свойством

$$||\mathbf{w}_m||_\Omega \approx \mu_m^{-1}, \quad m \to \infty, \tag{2.5}$$

где μ_m^2 – собственные значения мембранной задачи (1.3a), отвечающие собственным функциям γ_m^0. Для U_1 имеет место разложение

$$U_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \oplus U_k^e, \tag{2.6}$$

где U_k^e – подпространства, индуцированные вектор-функциями $\mathbf{F}_k^e$.

Доказательство : Как показано в [5], функции $\mathbf{w}_m$ линейно независимы и система $\{\mathbf{w}_m\}_1^\infty$ полна в U_1. Так как γ_m удовлетворяют условию (1.4a), то по Лемме 1.2 имеем

$$(\mathbf{w}_m, \mathbf{w}_n)_\Omega = \left(\frac{\partial \gamma_m}{\partial z}, \gamma_n^0\right)_\Sigma = \begin{cases} = 0, & m \neq n, \\ \neq 0, & m = n. \end{cases}$$

Следовательно. $\{\mathbf{w}_m\}$ является ортогональным базисом в U_1. Чтобы получить (2.5) рассмотрим гармонические функции $\widetilde{\gamma}_m$, удовлетворяющие граничным условиям (ср. (1.6))

$$\widetilde{\gamma}_m|_{S_d} = 0, \quad \widetilde{\gamma}_m|_\Sigma = \gamma_m\big|_\Sigma, \quad \widetilde{\gamma}_m|_{\Sigma_d} = \gamma_m^0, \quad \frac{\partial \widetilde{\gamma}_m}{\partial z}\bigg|_\Sigma = \frac{\partial \gamma_m}{\partial z}\bigg|_\Sigma. \tag{2.7}$$

Так как в Ω_d функция $\widetilde{\gamma}_m$ допускает разделение переменных, то решение уравнения Лапласа в этой области, удовлетворяющее краевому условию (2.7), имеет вид

$$\widetilde{\gamma}_m(x, y, z) = f_m(z)\gamma_m^0(x, y) = [(e^{-\mu_m d} - b_m e^{-2\mu_m d})e^{-\mu_m z} + b_m e^{\mu_m z}]\gamma_m^0(x, y),$$

где b_m – некоторые постоянные. Легко видеть, что $f_m(-d) = 1$. Подставляя $\widetilde{\gamma}_m$ в (2.7) и вычисляя предел при $d \to 0$, получим

$$\gamma_m|_\Sigma = \gamma_m^0, \quad \frac{\partial \gamma_m}{\partial z}\bigg|_\Sigma = \mu_m g_m \gamma_m^0,$$

где $g_m = 1 - 2b_m$. Следовательно

$$||\mathbf{w}_m||^2_\Omega = \int_\Sigma \frac{\partial \gamma_m}{\partial z} \gamma_m^0 \, d\sigma = g_m \mu_m^{-1}. \tag{2.8}$$

Рассмотрим теперь функцию φ, гармоническую в Ω и равную нулю на S, а на Σ принимающую значение φ^0. Пусть φ^0 – достаточно гладкая вектор-функция, обращающаяся в нуль на $l = S \cap \Sigma$. Далее, предположим, что на Σ нормальная производная φ непрерывна. Так как $\varphi\big|_l = \varphi^0\big|_l = 0$, то имеем $\left.\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\right|_l = 0$. Тогда

$$(grad\, \varphi, \mathbf{w}_m)_\Omega = \int_\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial z} \gamma_m^0 \, d\sigma = \int_\Sigma \frac{\partial \gamma_m}{\partial z} \varphi^0 \, d\sigma = \mu_m g_m \int_\Sigma \varphi^0 \gamma_m^0 \, d\sigma. \tag{2.9}$$

На Σ граничные функции φ^0 и $\left.\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\right|_\Sigma$ допускают разложения в регулярно сходящиеся ряды по ортонормированному базису $\{\widetilde{\gamma}_m^0 = \mu_m \gamma_m^0\}_1^\infty$. Так как этот базис является полным, то имеют место равенства Парсеваля

$$||\varphi^0||^2_\Sigma = \sum_{m=1}^\infty \left|(\varphi^0, \widetilde{\gamma}_m^0)_\Sigma\right|^2, \quad \left\|\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right\|^2_\Sigma = \sum_{m=1}^\infty \left|\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \widetilde{\gamma}_m^0\right)_\Sigma\right|^2.$$

Следовательно, получим минимально возможные оценки

$$\left|(\varphi^0, \widetilde{\gamma}_m^0)_\Sigma\right| \approx m^{-(1+\varepsilon)/2}, \quad \left|\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \widetilde{\gamma}_m^0\right)_\Sigma\right| \approx m^{-(1+\varepsilon)/2}, \quad 0 \le \varepsilon < 1, \quad m \to \infty.$$

Из (2.9) следует, что $g_m \approx \mu_m^{-1}$, а из (2.8) вытекает (2.5).

Обозначим через $\widetilde{U}_k^e(\Omega)$ линеал градиентов гармонических функций φ, для которых

$$\varphi\big|_S = 0, \quad (\varphi^0, \widetilde{\gamma}_k^0)_\Sigma \neq 0, \quad (\varphi^0, \widetilde{\gamma}_m^0)_\Sigma = 0, \quad m \neq k.$$

Очевидно, что вектор $\mathbf{w} = grad\varphi \in \widetilde{U}_k^e(\Omega)$ удовлетворяет условию

$$\mathbf{w}_r\big|_S = 0, \quad (\mathbf{w}_t, \mathbf{F}_k^e)_\Sigma \neq 0, \quad (\mathbf{w}_t, \mathbf{F}_m^e)_\Sigma = 0, \quad m \neq k.$$

Согласно Лемме 1.2 любые векторы из $\widetilde{U}_k^e(\Omega)$ и $\widetilde{U}_m^e(\Omega)$ взаимно ортогональны, и поскольку система $\{\mathbf{w}_m\}_1^\infty$ полна (см. [5]), то получим (2.6). Теорема 2.1 доказана.

Так как $J^e \subset J$ и $J_0^e \subset J_0$, то в силу теоремы единственности представления J и J_0 (см. [3]), имеем

$$\mathbf{u} = rot\, \widetilde{\mathbf{v}}, \quad \widetilde{v}_n\big|_S = 0, \quad \widetilde{v}_z\big|_\Sigma = 0, \quad \mathbf{u} \in \widetilde{J}^e(\Omega), \tag{2.10a}$$

$$\mathbf{v} = rot\, \widetilde{\mathbf{u}}, \quad \widetilde{u_r}\big|_S = 0, \quad \widetilde{u_r}\big|_\Sigma = 0, \quad \mathbf{v} \in \widetilde{J}_0^e(\Omega). \tag{2.10b}$$

Из (2.10a) следует, что для всех $\mathbf{w}^k \in U_1 \subset J^e$, удовлетворяющих $\mathbf{w}_t^k\big|_\Sigma = \mathbf{F}_k^e$, существует соленоидальная вектор-функция $\mathbf{p}^k \in \widetilde{J}_0(\Omega)$ такая, что

$$rot\ \mathbf{p}^k = \mathbf{w}^k, \quad p_n^k\big|_S = p_z^k\big|_\Sigma = 0, \quad k \geq 1. \tag{2.11}$$

Так как Ω является предельной областью, то можно доказать, что

$$(\mathbf{p}^k, \mathbf{G}_k^e)_\Sigma \neq 0, \quad (\mathbf{p}^k, \mathbf{G}_m^e)_\Sigma = 0, \quad m \neq k, \tag{2.12}$$

т.е. $\mathbf{p}^k \in \widetilde{J}_2^{k,e}(\Omega)$. Ввиду (2.10b) для вектора $\mathbf{p}^k \in \widetilde{J}_2^{k,e}(\Omega) \subset \widetilde{J}_0(\Omega)$ существует соленоидальная вектор-функция $\mathbf{q}^k$ такая, что

$$rot\ \mathbf{q}^k = \mathbf{p}^k, \quad \mathbf{q}_r^k\big|_S = \mathbf{q}_t^k\big|_\Sigma = 0, \quad k \geq 1. \tag{2.13}$$

Имеем

$$(\mathbf{p}^k, \mathbf{G}_m^e)_\Sigma = \int_\Sigma rot\ \mathbf{q}^k\ rot\ (\gamma_m^0 \mathbf{z}_0)\, d\sigma = \oint_l rot\ (\gamma_m^0 \mathbf{z}_0)[\mathbf{q}^k \times \tau_0]\, dl +$$

$$+ \int_\Sigma \mathbf{q}^k [grad\ div\ (\gamma_m^0 \mathbf{z}_0) - \mathbf{z}_0 \Delta_\perp \gamma_m^0]\, d\sigma = -\int_\Sigma q_z^k \Delta_\perp \gamma_m^0\, d\sigma = \mu_m^2 (q_z^k, \gamma_m^0)_\Sigma.$$

Согласно (2.12) получим $\mathbf{q}^k \in \widetilde{J}^{k,e}(\Omega)$.

Рассмотрим теперь краевую задачу

$$rot\ \mathbf{g}^k = \mathbf{p}^k, \quad \mathbf{g}_t^k\big|_S = 0, \quad k \geq 1, \tag{2.14}$$

где $\mathbf{p}^k$ – решения задачи (2.11). Общее решение задачи (2.14) можно представить в виде

$$\mathbf{g}^k = \mathbf{q}^k + C\mathbf{w}^k, \tag{2.15}$$

где $\mathbf{q}^k$ - частное решение задачи (2.14), удовлетворяющее краевым условиям (2.13), а C – постоянная. Нетрудно видеть, что $\mathbf{g}^k \in \widetilde{J}^{k,e}(\Omega)$.

Пусть $\mathbf{h}^k$ – решение краевой задачи

$$rot\ \mathbf{h}^k = \mathbf{g}^k, \quad \mathbf{h}_n^k\big|_S = h_z^k\big|_\Sigma = 0, \quad k \geq 1, \tag{2.16}$$

где $\mathbf{g}^k$ – решение задачи (2.14). В силу (2.15) получим $\mathbf{g}_t^k\big|_\Sigma = C\mathbf{F}_k^e$. Следовательно, $\mathbf{h}^k \in \widetilde{J}_2^{k,e}(\Omega)$.

Теорема 2.2. Системы вектор-функций $\{\mathbf{h}^k\}_1^\infty$ и $\{\mathbf{g}^k\}_1^\infty$, которые являются решениями задач (2.16) и (2.14), порождают ортогональные базисы в J_0^e и J^e, соответственно. Индуцированные подпространства J_0^e и J^e допускают представления вида

$$J_0^e = \sum_{k=1}^{\infty} \oplus J_2^{k,e}, \quad J^e = \sum_{k=1}^{\infty} \oplus J^{k,e}. \tag{2.17}$$

Доказательство : Сначала рассмотрим вектор-функции $\{\mathbf{p}^k\}_1^\infty$. Используя (2.11) и (2.13), получим

$$(\mathbf{p}^k, \mathbf{p}^m)_\Omega = (\mathbf{q}^k, rot\ \mathbf{p}^m)_\Omega - \int_{S\cup\Sigma} (\mathbf{q}^k \times \mathbf{p}^m)\mathbf{n}\, d\sigma = (\mathbf{q}^k, \mathbf{w}^m)_\Omega = (q_z^k, \gamma_m^0)_\Sigma.$$

По определению $\widetilde{J}^{k,e}(\Omega)$ заключаем, что векторы $\{\mathbf{p}^k\}$ попарно ортогональны. Пусть теперь $\mathbf{v} \in \widetilde{J}_0(\Omega)$ допускают представление (2.10b) и

$$(\mathbf{v}, \mathbf{p}^k)_\Omega = 0, \quad k \geq 1. \tag{2.18}$$

В силу (2.10b) и (2.13) имеем

$$(\mathbf{v}, \mathbf{p}^k)_\Omega = (rot\ \mathbf{u}, rot\ \mathbf{q}^k)_\Omega = (\mathbf{u}, rot\ rot\ \mathbf{q}^k)_\Omega + \int_{S\cup\Sigma} [\mathbf{u} \times rot\ \mathbf{q}^k]\mathbf{n}\, d\sigma =$$

$$= (\mathbf{u}, \mathbf{w}^k)_\Omega = (u_z, \gamma_k^0)_\Sigma = \mu_k^{-2}(\mathbf{v}_t, \mathbf{G}_k^e)_\Sigma = 0, \quad k \geq 1.$$

Следовательно, $\mathbf{v}_t\big|_\Sigma = 0$. С другой стороны, из (2.10b) вытекает $\|\mathbf{v}_t\|_\Sigma \neq 0$ (см. [2]). Таким образом, равенства (2.18) будут иметь место только в случае $\mathbf{v} \equiv 0$, что означает полноту системы $\{\mathbf{p}^k\}_1^\infty$ в J_0^e. Таким образом, мы доказали, что система вектор-функций $\{\mathbf{p}^k\}_1^\infty$ образует ортогональный базис в J_0^e.

Рассмотрим теперь вектор-функции $\mathbf{q}^k \in \widetilde{J}^{k,e}(\Omega)$, удовлетворяющие (2.13). Согласно (2.10a) имеем

$$\mathbf{q}^k = rot\ \dot{\mathbf{h}}^k, \quad \dot{h}_n^k\big|_S = 0, \quad \dot{h}_z^k\big|_\Sigma = 0. \tag{2.19}$$

Вектор-функции $\dot{\mathbf{h}}^k \in \widetilde{J}_2^{k,e}(\Omega)$ удовлетворяют уравнениям $rot\ rot\ \dot{\mathbf{h}}^k = \mathbf{p}^k$. В силу (2.13) получим $\left.\dfrac{\partial \dot{\mathbf{h}}_t^k}{\partial z}\right|_\Sigma = 0$. Используя ортогональность линеалов $\widetilde{J}_2^{k,e}(\Omega)$ и $\widetilde{J}_2^{m,e}(\Omega)$, получим

$$(\mathbf{q}^k, \mathbf{q}^m)_\Omega = (\dot{\mathbf{h}}^k, rot\ \mathbf{q}^m)_\Omega - \int_{S\cup\Sigma} (\dot{\mathbf{h}}^k \times \mathbf{q}^m)\mathbf{n}\, d\sigma = (\dot{\mathbf{h}}^k, \mathbf{p}^m)_\Omega = \begin{cases} = 0, & m \neq k, \\ \neq 0, & m = k, \end{cases}$$

т.е. система $\{\mathbf{q}^k\}_1^\infty$ ортогональна. Имеем

$$(\mathbf{u}, \mathbf{q}^k)_\Omega = (\mathbf{v}, rot\ \mathbf{q}^k)_\Omega - \int_{S\cup\Sigma} (\mathbf{v} \times \mathbf{q}^k)\mathbf{n}\, d\sigma = (\mathbf{v}, \mathbf{p}^k)_\Omega.$$

Следовательно, ортогональность $\mathbf{u} \in \widetilde{J}^e(\Omega)$ ко всем векторам $\mathbf{q}^k \in \widetilde{J}^{k,e}(\Omega)$ эквивалентна ортогональности $\mathbf{v} \in \widetilde{J}_0^e(\Omega)$ к базису $\{\mathbf{p}^k\}_1^\infty$, т.е. $\mathbf{u} \equiv 0$. Мы доказали, что система ортогональных вектор-функций $\{\mathbf{q}^k\}_1^\infty$ полна в J^e, т.е. $\{\mathbf{q}^k\}_1^\infty$ является базисом в J^e.

Вернемся теперь к функциям $\mathbf{g}^k \in J^{k,e}(\Omega)$, которые являются решениями задачи (2.14). В силу (2.15), имеем

$$\mathbf{g}^k = C_1\widetilde{\mathbf{q}}^k + C_2\widetilde{\mathbf{w}}^k, \quad \widetilde{\mathbf{q}}^k = \frac{\mathbf{q}^k}{||\mathbf{q}^k||}, \quad \widetilde{\mathbf{w}}^k = \frac{\mathbf{w}^k}{||\mathbf{w}^k||}, \tag{2.20}$$

где C_1, C_2 – некоторые постоянные. Тогда

$$(\mathbf{g}^k, \mathbf{g}^m) = (C_1C_1' + C_2C_2')\delta_{k,m} + C_1C_2'(\widetilde{\mathbf{q}}^k, \widetilde{\mathbf{w}}^m) + C_1'C_2(\widetilde{\mathbf{w}}^k, \widetilde{\mathbf{q}}^m),$$

где $\delta_{k,m}$ – символ Кронекера. Так как

$$(\widetilde{\mathbf{q}}^k, \widetilde{\mathbf{w}}^m) = \frac{(\mathbf{q}^k, grad\ \gamma_m^0)}{||\mathbf{q}^k|| \cdot ||\mathbf{w}^m||} = \frac{(q_z^k, \gamma_m^0)_\Sigma}{||\mathbf{q}^k|| \cdot ||\mathbf{w}^m||} = \begin{cases} = 0, & m \neq k, \\ \neq 0, & m = k, \end{cases}$$

то система $\{\mathbf{g}^k\}_1^\infty$ ортогональна. Для произвольной вектор-функции $\mathbf{u} \in J^e(\Omega)$ имеем

$$||\mathbf{u}||^2 = \sum_{k=1}^\infty |(\mathbf{u}, \mathbf{g}^k)|^2 = \sum_{k=1}^\infty \left|(\mathbf{u}, C_1\mathbf{q}^k + C_2\mathbf{w}^k)\right|^2 \leq$$

$$\leq 2C_1^2 \sum_{k=1}^\infty \left|(\mathbf{u}, \widetilde{\mathbf{q}}^k)\right|^2 + 2C_2^2 \sum_{k=1}^\infty \left|(\mathbf{u}, \widetilde{\mathbf{w}}^k)\right|^2 < \infty.$$

Согласно равенству Парсеваля система $\{\mathbf{g}^k\}_1^\infty$ полна в J^e. Следовательно, ортогональное разложение (2.17) для J^e доказано. Аналогично можно доказать ортогональное разложение (2.17) для J_0^e. Теорема 2.2 доказана.

Рассуждая как в Теоремах 2.1 и 2.2, можно доказать следующие утверждения для индуцированных подпространств J_1^h, J_2^h и U_2.

Теорема 2.3. Пусть ζ_m – гармонические в Ω функции, удовлетворяющие граничным условиям

$$\zeta_m\Big|_\Sigma = \zeta_m^0, \qquad \frac{\partial \zeta_m}{\partial z}\Big|_S = 0.$$

Система вектор-функций $\{\mathbf{w}_m = grad\ \zeta_m\}$ образует ортогональный базис в индуцированном подпространстве U_2. Справедлива оценка $||\mathbf{w}_m||_\Omega \approx \nu_m^{-1}$ при $m \to \infty$, где ν_m^2 – собственные значения мембранной задачи (1.3b), отвечающие собственным функциям ζ_m^0, и $U_2 = \sum_{k=1}^\infty \oplus U_k^h$, где U_k^h – подпространства, индуцированные вектор-функциями $\mathbf{G}_k^h$.

Теорема 2.4. Индуцированные подпространства J_1^h и J_2^h допускают представления вида

$$J_1^h = \sum_{k=1}^{\infty} \oplus J^{k,h}, \quad J_2^h = \sum_{k=1}^{\infty} \oplus J_2^{k,h}.$$

Теперь докажем основной результат настоящей статьи.

Теорема 2.5. Пространства соленоидальных вектор-функций J и J_2 можно представить в виде ортогональных сумм индуцированных подпространств

$$J = J^e \oplus J_1^h, \quad J_2 = J_0^e \oplus J_2^h, \tag{2.21}$$

где J_0^e, J^e и J_1^h, J_2^h удовлетворяют условиям Теорем 2.2 и 2.4, соответственно.

Доказательство : Для доказательства первой части (2.21), достаточно проверить, что линеал $\widetilde{J}(\Omega)$ можно однозначно представить в виде прямой суммы линеалов $\widetilde{J}^e(\Omega)$ и $\widetilde{J}_1^h(\Omega)$, $\widetilde{J}^e \cap \widetilde{J}_1^h = \emptyset$. Пусть $\mathbf{u} \in \widetilde{J}(\Omega)$ – гладкая вектор-функция, касательная компонента которой обращается в нуль на $S \cup \Sigma$. Линеал таких функций является плотным в J (см. [4]). Положим

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^e + \mathbf{u}^h, \quad \mathbf{u}^e \in \widetilde{J}^e(\Omega), \quad \mathbf{u}^h \in \widetilde{J}_1^h(\Omega), \tag{2.22}$$

и допустим, что $\mathbf{u} = 0$. Согласно Лемме 1.1 имеем

$$\mathbf{u}_t^e\big|_\Sigma \in \widetilde{M_0}(\Sigma), \quad \mathbf{u}_t^h\big|_\Sigma \in \widetilde{N}_1(\Sigma), \quad \mathbf{u}_t^e\big|_\Sigma \perp \mathbf{u}_t^h\big|_\Sigma,$$

откуда следует $\mathbf{u}_t^e\big|_\Sigma = \mathbf{u}_t^h\big|_\Sigma = 0$. Таким образом, $\mathbf{u}^h \in H$ = линеал гладких векторов $\mathbf{u} \in \widetilde{J}_1^h(\Omega)$, для которого $\mathbf{u}_r\big|_S = \mathbf{u}_t\big|_\Sigma = 0$ и $u_z\big|_\Sigma = 0$. Линеал H является плотным в $\widetilde{J}_1^h(\Omega)$. Однако, H является подмножеством $\widetilde{J}^{k,h}(\Omega) \cap \widetilde{J}^{m,h}(\Omega)$ для любых $m, k \geq 1$, пересечение которых пусто согласно Теореме 2.4. Следовательно, $\mathbf{u}^h = 0$, и поэтому $\mathbf{u}^e = 0$. Мы доказали однозначность представления (2.22).

Ортогональность подпространств J^e и J_1^h эквивалентна ортогональности их базисов $\{\mathbf{p}^k\}_1^\infty \in J^e$ и $\{\mathbf{q}^k\}_1^\infty \in J_1^h$, где $\mathbf{p}^k$ – решение краевой задачи

$$rot\ \mathbf{p}^k = \mathbf{w}^k, \quad p_r^k\big|_S = p_z^k\big|_\Sigma = 0, \quad k \geq 1,$$

а $\mathbf{q}^k$ допускают представление (2.19). Тогда

$$(\mathbf{p}^k, \mathbf{q}^m)_\Omega = (\dot{\mathbf{h}}^k, \mathbf{w}^m)_\Omega - \int_\Sigma (\dot{\mathbf{h}}_t^k \times \mathbf{q}_t^m)\mathbf{z}_0\, d\sigma = \int_{S\cup\Sigma} \dot{h}_n^k \zeta_m\, d\sigma - (\mathbf{F}_k^e, \mathbf{F}_m^h)_\Sigma.$$

Первое слагаемое в правой части равно нулю в силу краевого условия $\dot{h}^k_n\big|_S = \dot{h}^k_\tau\big|_\Sigma = 0$, а последнее слагаемое равно нулю согласно Лемме 1.1. Следовательно, $(\mathbf{p}^k, \mathbf{q}^m)_\Omega = 0$ при всех k и m, т.е. $\{\mathbf{p}^k\}_1^\infty$ и $\{\mathbf{q}^m\}_1^\infty$ ортогональны. Первое разложение в (2.21) доказано. Аналогично доказывается справедливость второго разложения. Доказательство завершено.

ABSTRACT. The paper considers the space of solenoidal vector-functions defined in a bounded three-dimensional domain Ω, whose surface possesses a planar part Σ. The latter contains orthogonal basis of two-dimensional vector-functions defined on Σ. We prove that any element of the basis generates a space of three-dimensional solenoidal vectors in Ω, and the corresponding space of solenoidal vectors admits an orthogonal expansion by thus induced function spaces.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Б. Быховский, "Решение смешанной задачи для системы уравнений Максвелла в случае идеально проводящей границы", вестник ЛГУ, том 13, стр. 50 – 66, 1957.
2. Э. Б. Быховский., "Оценка вектора через его ротор и начально-краевая задача электродинамики в случае смешанных граничных условий", Вестник ЛГУ, том 19, стр. 161 – 164, 1961.
3. Э. Б. Быховский, Н. В. Смирнов, "Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа", Труды МИАН СССР, том 59, стр. 5 – 36, 1960.
4. Г. Г. Джебеян, Э. Р. Цекановский, "Об одной несамосопряженной краевой задаче в теории волноводов", Изв. АН Арм.ССР, Математика, том 1, № 6, стр. 359 – 373, 1966.
5. Г. Г. Джебеян, "Об операторе Максвелла в ограниченной области при некоторых краевых условиях", Изв. АН АрмССР, Математика, том 2, № 5, стр. 318 – 328, 1967.
6. В. В. Никольский, Т. И. Никольская, Электродинамика и Распространение Радиоволн, Наука, Москва, 1989.

28 марта 2000

Ереванский физический институт
E-mail : rjh@arminco.com