КВАЗИПОЛИНОМЫ В ПОДПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Г. В. Арутюнян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 3, 2000

В вещественном и комплексном анализах хорошо известна теорема Мюнца о плотности множества квазиполиномов в пространстве $C_R[a,b]$ непрерывных, действительнозначных функций на замкнутом интервале $[a,b]$, $a \geq 0$. В настоящей статье исследуются версии теоремы Мюнца в случае, когда квазиполиномиальные коэффициенты берутся из заданной возрастающей последовательности положительных чисел.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\{\lambda_n\}_1^\infty$ – строго монотонно возрастающая последовательность положительных чисел. Конечная сумма $p(x) = \sum_{n=0}^m p_n x^{\lambda_n}$ с произвольными вещественными коэффициентами p_n, $n = 0, 1, \ldots, m$ называется **квазиполиномом** по системе функций $\{x^{\lambda_n}\}_0^\infty$ ($\lambda_0 = 0$, $x \geq 0$). Обозначим через $C_R[a,b]$ подпространство $C[a,b]$, состоящее из всех вещественнозначных функций. По известной теореме Мюнца [7], множество всех квазиполиномов по системе $\{x^{\lambda_n}\}_0^\infty$ плотно в $C_R[a,b]$ ($a \geq 0$) тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} = \infty. \tag{1}$$

Возникает естественный вопрос относительно версий теоремы Мюнца при различных ограничениях на коэффициенты p_n. В настоящей статье рассматривается случай, когда эти коэффициенты берутся из множества $\{\pm a_n\}_1^\infty$, где $\{a_n\}_1^\infty$ – строго монотонно возрастающая последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условиям

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty, \quad a_{n+1} - a_n \leq M, \tag{2}$$

где $M > 0$ – постоянная. Частный случай этой задачи, когда $\{a_n\}_1^\infty \subset \mathcal{N}$ ($\mathcal{N}$ есть множество всех натуральных чисел) был рассмотрен в [1], [4], [5], [8].

Основными результатами являются Теоремы 1 – 4, касающиеся аппроксимаций в $C_R^*[a,b]$ = функции $f \in C_R[a,b]$, удовлетворяющие условию $f(0)=f(1)=0$, если $[a,b]\cap\{0,1\}) \neq \emptyset$. Заметим, что $C_R^*[a,b]=C_R[a,b]$, если $[a,b]\cap\{0,1\}=\emptyset$. Теорема 4 обобщает и усиливает некоторые результаты из [2], [4].

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Лемма 1. Пусть $\{\lambda_n\}_1^\infty$ – строго монотонно возрастающая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию (1). Тогда системы функций

$$\left\{x^{\lambda_{2n-1}} - x^{\lambda_{2n}}\right\}_1^\infty \quad \text{и} \tag{3}$$

$$\left\{x^{\lambda_{2n}} - x^{\lambda_{2n+1}}\right\}_1^\infty \tag{4}$$

плотны в пространстве $C_R^*[0,b]$ для каждого $b \geq 1$.

Доказательство : Дадим доказательство для системы (3), случай системы (4) доказывается аналогично. Пусть ν – функция ограниченной вариации, удовлетворяющая соотношению

$$\int_0^b (x^{\lambda_{2n-1}} - x^{\lambda_{2n}})\, d\nu(x) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{5}$$

В полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ рассмотрим голоморфную функцию

$$\varphi(z) = \int_0^b x^z\, d\nu(x). \tag{5a}$$

Из (5) следует, что $\varphi(\lambda_{2n-1}) = \varphi(\lambda_{2n})$ при $n = 1, 2, \ldots$. Следовательно, существуют числа $\mu_n \in (\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$ такие, что

$$\varphi'(\mu_n) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{6}$$

Так как последовательность $\{\lambda_n\}_1^\infty$ монотонна, то из (1) получим

$$\sum_{n=1}^\infty \mu_n^{-1} = \infty. \tag{7}$$

При $\operatorname{Re} z > 0$ имеем неравенство

$$\left|x^{\operatorname{Re} z} \log x\right| \leq \frac{1}{e \operatorname{Re} z}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Тогда производная $\varphi'(z) = \int_0^b x^z \log x\, d\nu(x)$ является голоморфной функцией, удовлетворяющей неравенству

$$|\varphi'(z)| \leq C(\delta, b) b^{\operatorname{Re} z}, \quad \operatorname{Re} z \geq \delta \in (0, \lambda_1), \tag{8}$$

где постоянная $C(\delta, b) \geq 1$ не зависит от z. По теореме единственности ограниченных функций, голоморфных в полуплоскости, из (6) – (8) следует $\varphi'(z) \equiv 0$ при $\operatorname{Re} z \geq \delta$. Следовательно, по теореме единственности аналитических функций, получим $\varphi'(z) = 0$, $\operatorname{Re} z > 0$. Таким образом

$$\varphi(z) \equiv C_1, \quad \operatorname{Re} z > 0. \tag{9}$$

Положив в (9) $\operatorname{Im} z = 0$ и перейдя к пределу под знаком интеграла при $\operatorname{Re} z \to +0$, получим $\int_0^b d\nu(x) = C_1$. Итак, (9) запишется в виде $\int_0^b (x^z - 1)\, d\nu(x) = 0$, $\operatorname{Re} z > 0$. Так как система $\{x^n - 1\}_1^\infty$ плотна в $C_R^*[0, b]$, то доказательство Леммы 1 следует из Теорем Хана–Банаха и Рисса.

Лемма 2. **Пусть $\{\lambda_j\}_{j=2i-1}^{2n+1}$ – положительные числа, причем $\lambda_{2i-1} < \lambda_{2i} < \ldots < \lambda_{2n} < \lambda_{2n+1}$. Для $i = 1, \ldots, n-1$ положим**

$$A_{i,n} = \min_{\{c_j\}_{j=i+1}^n} \left\| x^{\lambda_{2i-1}} - x^{\lambda_{2i}} - \sum_{j=i+1}^n c_j (x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) \right\|,$$

$$B_{i,n} = \min_{\{c_j\}_{j=i+1}^n} \left\| x^{\lambda_{2i}} - x^{\lambda_{2i+1}} - \sum_{j=i+1}^n c_j (x^{\lambda_{2j}} - x^{\lambda_{2j+1}}) \right\|,$$

где $\{c_j\}_{j=i+1}^n$ – вещественные числа, а $\|\cdot\|$ – норма в пространстве $C_R^*[0, b]$, $b \geq 1$. Тогда справедливы неравенства

$$A_{i,n} \leq C(\delta, b)(\lambda_{2i} - \lambda_{2i-1}) b^{\lambda_{2i}} \exp\left\{ -(\lambda_{2i-1} - \delta) \sum_{j=i+1}^n \lambda_{2j}^{-1} \right\},$$

$$B_{i,n} \leq C(\delta, b)(\lambda_{2i+1} - \lambda_{2i}) b^{\lambda_{2i+1}} \exp\left\{ -(\lambda_{2i} - \delta) \sum_{j=i+1}^n \lambda_{2j+1}^{-1} \right\},$$

где $\delta \in (0, \lambda_1)$ – произвольное число.

Доказательство : Докажем первую оценку (вторая доказывается аналогично). Как показано в [3], стр. 25, имеем

$$A_{i,n} = \sup_{\{\nu\}} A_{i,n}(\nu), \quad A_{i,n}(\nu) = \left| \int_0^b (x^{\lambda_{2i-1}} - x^{\lambda_{2i}})\, d\nu(x) \right|,$$

где ν – функция ограниченной вариации, для которой

$$\nu(0) = \nu(1) = 0, \quad \int_0^b |d\nu| \leq 1, \quad \int_0^b (x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}})\, d\nu(x) = 0, \quad j = i+1, \ldots, n.$$

Рассмотрим функцию (5а). Рассуждая как и в доказательстве Леммы 1, получим неравенство (8). Следовательно, $\varphi'(z)b^{-z} = B(z)f(z)$, $\operatorname{Re} z > 0$, где $B(z) = \prod_{j=i+1}^{n} \frac{z-\mu_j}{z+\mu_j}$, а $f(z)$ голоморфна в $\operatorname{Re} z > 0$. Так как

$$|B(\delta+iy)|^2 = \prod_{j=i+1}^{n} \frac{(\mu_j-\delta)^2+y^2}{(\mu_j+\delta)^2+y^2} \geq \prod_{j=i+1}^{n} \frac{(\mu_j-\delta)^2}{(\mu_j+\delta)^2}, \quad y \in [-\infty, +\infty],$$

то получим

$$|f(z)| \leq C(\delta, b) \prod_{j=i+1}^{n} \frac{\mu_j+\delta}{\mu_j-\delta}, \qquad \operatorname{Re} z \geq \delta.$$

Отсюда следует, что

$$|\varphi'(z)| \leq C(\delta, b) b^{\operatorname{Re} z} |B(z)| \prod_{j=i+1}^{n} \frac{\mu_j+\delta}{\mu_j-\delta}, \qquad \operatorname{Re} z \geq \delta. \tag{10}$$

Имеем

$$A_{i,n}(\nu) = |\varphi(\lambda_{2i-1}) - \varphi(\lambda_{2i})| = |\varphi'(\theta_i)|(\lambda_{2i} - \lambda_{2i-1}), \quad \theta_i \in (\lambda_{2i-1}, \lambda_{2i}).$$

Используя (10) и элементарное неравенство $1 - x \leq e^{-x}$, $x \geq 0$, получим

$$A_{i,n}(\nu) \leq C(\delta, b)(\lambda_{2i} - \lambda_{2i-1}) b^{\theta_i} \prod_{j=i+1}^{n} \frac{(\mu_j+\delta)(\mu_j-\theta_i)}{(\mu_j-\delta)(\mu_j+\theta_i)} \leq$$

$$\leq C(\delta, b)(\lambda_{2i} - \lambda_{2i-1}) b^{\theta_i} \exp\left\{-2 \sum_{j=i+1}^{n} \frac{\mu_j(\theta_i-\delta)}{(\mu_j-\delta)(\mu_j+\theta_i)}\right\}.$$

Следовательно

$$A_{i,n}(\nu) \leq C(\delta, b)(\lambda_{2i} - \lambda_{2i-1}) b^{\lambda_{2i}} \exp\left\{-(\lambda_{2i-1}-\delta) \sum_{j=i+1}^{n} \lambda_{2j}^{-1}\right\}.$$

Остается отметить, что правая часть последнего неравенства не зависит от ν. Лемма 2 доказана.

Для функции $f \in C_R^*[0, b]$, $b \geq 1$ положим

$$E_n(f) = \min_{\{c_j\}_1^n} \left\| f(x) - \sum_{j=1}^{n} c_j (x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) \right\|,$$

$$E_n^*(f) = \min_{\{c_j\}_1^n} \left\| f(x) - \sum_{j=1}^{n} c_j (x^{\lambda_{2j}} - x^{\lambda_{2j+1}}) \right\|,$$

где $\{c_j\}_1^n$ – вещественные числа.

Лемма 3. **Пусть $\{a_n\}_1^\infty$ – строго монотонно возрастающая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условиям (1), а r, s $(r < s)$ – произвольные натуральные числа. Для произвольной функции $f \in C_R^*[0,b]$, $b \geq 1$ и $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{2s}$ существуют числа $b_1, \ldots, b_s$ такие, что $\{|b_i|\}_1^s \subset \{a_n\}_1^\infty$ и**

$$\left\| f(x) - \sum_{j=1}^{s} b_j (x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) \right\| \leq E_s(f) + M \sum_{i=1}^{r} A_{i,s} +$$

$$+ M \max\left\{ \frac{\lambda_{2s} - \lambda_{2r+1}}{\lambda_{2s}}, (\lambda_{2s} - \lambda_{2r+1}) b^{\lambda_{2s}} \log b \right\},$$

$$\left\| f(x) - \sum_{j=1}^{s} b_j (x^{\lambda_{2j}} - x^{\lambda_{2j+1}}) \right\| \leq E_s^*(f) + M \sum_{i=1}^{r} B_{i,s} +$$

$$+ M \max\left\{ \frac{\lambda_{2s+1} - \lambda_{2r+2}}{\lambda_{2s+1}}, (\lambda_{2s+1} - \lambda_{2r+2}) b^{\lambda_{2s+1}} \log b \right\}.$$

Доказательство : Пусть $c_j(i,s)$ – последовательность, на которой $A_{i,s}$ достигает своего максимума, а $c_{j,0}$ – последовательность на которой $E_s(f)$ достигает своего максимума, т.е.

$$A_{i,s} = \left\| x^{\lambda_{2i-1}} - x^{\lambda_{2i}} - \sum_{j=i+1}^{s} c_j(i,s)(x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) \right\|,$$

$$E_s(f) = \left\| f(x) - \sum_{j=1}^{s} c_{j,0}(x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) \right\|.$$

Определим числа $b_1, \ldots, b_r$ по индукции. Обозначим через b_1 ближайший элемент к числу $c_{1,0}$ из последовательности $\{\pm a_n\}_1^\infty$. Далее

$$c_{j,1} = c_{j,0} + (c_{1,0} - b_1) c_j(1,s), \quad 2 \leq j \leq s.$$

Тогда

$$\left\| f(x) - b_1(x^{\lambda_1} - x^{\lambda_2}) - \sum_{j=2}^{s} c_{j,1}(x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) \right\| =$$

$$= \left\| f(x) - \sum_{j=1}^{s} c_{j,0}(x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) + (c_{1,0} - b_1)\left(x^{\lambda_1} - x^{\lambda_2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{j=2}^{s} c_j(1,s)(x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) \right) \right\| \leq \left\| f(x) - \sum_{j=1}^{s} c_{j,0}(x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) \right\| +$$

$$+ \left\| (c_{1,0} - b_1)\left(x^{\lambda_1} - x^{\lambda_2} - \sum_{j=2}^{s} c_j(1,s)(x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) \right) \right\| \leq E_s(f) + M A_{1,s}.$$

Пусть $b_1, \dots, b_k$ определяются из условия

$$\left\| f(x) - \sum_{j=1}^{k} b_j (x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) - \sum_{j=k+1}^{s} c_{j,k} (x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) \right\| \le E_s(f) + M \sum_{j=1}^{k} A_{j,s}.$$

Обозначим через b_{k+1} элемент из $\{\pm a_n\}_1^\infty$, ближайший к числу $c_{k+1,k}$, и положим $c_{j,k+1} = c_{j,k} + (c_{k+1,k} - b_{k+1}) c_j(k+1, s)$, $k+2 \le j \le s$. Тогда

$$\left\| f(x) - \sum_{j=1}^{k+1} b_j (x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) - \sum_{j=k+2}^{s} c_{j,k+1} (x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) \right\| =$$

$$= \Bigg\| f(x) - \sum_{j=1}^{k} b_j (x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) - \sum_{j=k+1}^{s} c_{j,k} (x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) -$$

$$- b_{k+1} (x^{\lambda_{2(k+1)-1}} - x^{\lambda_{2(k+1)}}) + c_{k+1,k} (x^{\lambda_{2(k+1)-1}} - x^{\lambda_{2(k+1)}}) -$$

$$- (c_{k+1,k} - b_{k+1}) \sum_{j=k+2}^{s} c_j(k+1, s) (x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) \Bigg\| \le$$

$$\le E_s(f) + M \sum_{j=1}^{k} A_{j,s} + M A_{k+1,s} = E_s(f) + M \sum_{j=1}^{k+1} A_{j,s}.$$

Таким образом, числа $b_1, \dots, b_r$ определены. Теперь определим $b_{r+1}, \dots, b_s$. Обозначим через b_j, $j = r+1, \dots, s$ элемент из последовательности $\{\pm a_n\}_1^\infty$, ближайший к числу $c_{j,r}$. Так как при $x \in [0,1]$

$$\left\| \sum_{j=r+1}^{s} (x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) \right\| = \sum_{j=r+1}^{s} (x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) \le x^{\lambda_{2r+1}} - x^{\lambda_{2s}} \le \frac{\lambda_{2s} - \lambda_{2r+1}}{\lambda_{2s}},$$

а при $x \in (1, b]$

$$\left\| \sum_{j=r+1}^{s} (x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) \right\| = \sum_{j=r+1}^{s} (x^{\lambda_{2j}} - x^{\lambda_{2j-1}}) \le$$

$$\le x^{\lambda_{2s}} - x^{\lambda_{2r+1}} \le (\lambda_{2s} - \lambda_{2r+1}) b^{\lambda_{2s}} \log b,$$

то имеем

$$\left\| f(x) - \sum_{j=1}^{s} b_j (x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) \right\| = \Bigg\| f(x) - \sum_{j=1}^{r} b_j (x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) -$$

$$- \sum_{j=r+1}^{s} c_{j,r} (x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) + \sum_{j=r+1}^{s} (c_{j,r} - b_j)(x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) \Bigg\| \le$$

$$\le E_s(f) + M \sum_{j=1}^{r} A_{j,s} + M \left\| \sum_{j=r+1}^{s} (x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) \right\| \le$$

$$\le E_s(f) + M \sum_{j=1}^{r} A_{j,s} + M \max \left\{ \frac{\lambda_{2s} - \lambda_{2r+1}}{\lambda_{2s}}, (\lambda_{2s} - \lambda_{2r+1}) b^{\lambda_{2s}} \log b \right\}.$$

Лемма 3 доказана.

следует оценка

$$\|f\|_2 \le \left\| J^{-1}_{\mathcal{A},m}(I + J_{\mathcal{A},m})f \right\|_2 + \left\| \frac{\widetilde{f}(\xi)}{1 + |\xi_1|^{2m_1} \cdots |\xi_n|^{2m_n}} \right\|_2 .$$

Следовательно, если $J^{-1}_{\mathcal{A},m}(I+J_{\mathcal{A},m})f = 0$, то $f = 0$. Кроме того, оператор (1.10) – самосопряжен. Так как ограниченный самосопряженный инъективный оператор всегда имеет плотную область изменения, то заключаем, что $J^{-1}_{\mathcal{A},m}(I + J_{\mathcal{A},m})L_2$ плотно в L_2. Легко видеть, что $(I + J_{\mathcal{A},m})L_2$ является пространством Волевича–Панеяха (см. [12]), а функции из C_0^∞ плотны в нем [12]. Множество $J^{-1}_{\mathcal{A},m}C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ плотно в L_2 по норме $L_2(\mathbb{R}^n)$. Имеем

$$J^{-1}_{\mathcal{A},m} = J_{\mathcal{A}} D_1^{2m_1} \cdots D_n^{2m_n}, \tag{1.11}$$

где $D_j = \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ – обобщенные производные. Так как $D_1^{2m_1} \cdots D_n^{2m_n} C_0^\infty \subset \Phi_\Gamma(\mathbb{R}^n)$, то из (1.11) следует, что множество $J_{\mathcal{A}}\Phi_\Gamma$ плотно в $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Докажем теперь последнюю часть Теоремы 1.1. Оператор (1.7) по непрерывности продолжается на функции из S, ортогональные полиномам $p \in P_\Gamma^{1-\theta_0}$. Последние образуют замкнутое множество в S', и следовательно, сопряженное пространство можно отождествить с фактор-пространством $S'/P_\Gamma^{1-\theta_0}$. Так как область изменения оператора $J_{\mathcal{A}}$ плотна в L_2, то пространство линейных непрерывных функционалов на ней можно отождествить с L_2. Переходя к сопряженным, получим ограниченную инъекцию (1.8). Доказательство завершено.

Определение 3. Пусть $\mathcal{A}$ – произвольный набор векторов с неотрицательными компонентами, имеющий точки на каждой координатной оси $\mathbb{R}^n_{++}$. Пространство $\dot{w}_2^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)$ является образом оператора $J_{\mathcal{A}}$ на пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ с нормой

$$\left\| J_{\mathcal{A}}\varphi, \dot{w}_2^{\mathcal{A}} \right\| = \|\varphi\|_2. \tag{1.12}$$

Очевидно, если $\mathcal{A} = \{0\}$, то $\dot{w}_2^{\mathcal{A}} = L_2$. По Теореме 1.1, пространство $\dot{w}_2^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n) = J_{\mathcal{A}}(L_2)$ является подпространством фактор-пространства $S'/P_\Gamma^{1-\theta_0}$. Если $\theta_0 > 1$ (т.е. если $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ является допустимым многогранником), то $\dot{w}_2^{\mathcal{A}} \subset S'$, если же $0 < \theta_0 \le 1$, то элементами $\dot{w}_2^{\mathcal{A}}$ будут классы, в которых функции, отличающиеся на многочлен $p \in P_\Gamma^{1-\theta_0}$, отождествляются.

Норма (1.12) на C_0^∞ имеет удобный эквивалентный вид

$$\left\| f, \dot{w}_2^{\mathcal{A}} \right\| = \left\| \left(\sum_{r \in \mathcal{A}} \prod_{k=1}^{n} |\xi_k|^{r_k} \right) \widetilde{f} \right\|_2, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{1.13}$$

Теорема 2. **Пусть $\{a_n\}_1^\infty$ и $\{\lambda_n\}_1^\infty$ – строго монотонно возрастающие последовательности положительных чисел, $\{a_n\}_1^\infty$ удовлетворяет условиям (2), а $\{\lambda_n\}_1^\infty$ удовлетворяет условию**

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{\log n}=0, \tag{15}$$

и $b>1$. Произвольную функцию $f\in C_R^*[0,b]$ можно равномерно аппроксимировать на $[0,b]$ квазиполиномами вида (11).

Доказательство : Положим $l_n=\lambda_n/\log n$, $n=2,3,\ldots$. Так как числа $l_n>0$ удовлетворяют (15), то существует (см. [6], стр. 40, 107) последовательность натуральных чисел $\{n_i\}_{i=1}^\infty$ такая, что

$$\lim_{i\to\infty} l_{n_i}=0,\quad l_{n_i}<l_s,\quad s=2,3,\ldots,n_i-1,\quad i=1,2,\ldots.$$

Не умаляя общности можем считать, что $n_i=2s_i$ (s_i – натуральное число). Определим последовательность натуральных чисел $\{m_i\}_{i=1}^\infty$, где $m_i=2r_i+1=n_i-\left[\sqrt{n_i}\right]$ или $n_i-\left[\sqrt{n_i}\right]-1$, а $[a]$ – целая часть числа a. Так как λ_n монотонна, то для достаточно больших i имеем

$$\sum_{j=r_i+1}^{s_i}\lambda_{2j}^{-1}\geq\frac{s_i-r_i}{\lambda_{2s_i}}\geq C\frac{\sqrt{2s_i}}{\log 2s_i}, \tag{16}$$

где $C>0$ – постоянная. Докажем равенство

$$\lim_{i\to\infty} b^{\lambda_{2s_i}}(\lambda_{2s_i}-\lambda_{2r_i+1})=0. \tag{17}$$

Так как λ_n монотонно возрастают и

$$\lim_{i\to\infty} l_{2s_i}=\lim_{i\to\infty}\frac{b^{\lambda_{2s_i}}}{\sqrt{2s_i}}=0,$$

то достаточно показать, что

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}\sqrt{2s_i}(\lambda_{2s_i}-\lambda_{2r_i})<\infty. \tag{18}$$

Легко проверить, что

$$0<\lambda_{2s_i}-\lambda_{2r_i}=l_{2s_i}\log\frac{s_i}{r_i}-(l_{2r_i}-l_{2s_i})\log 2r_i.$$

Так как $l_{2r_i}-l_{2s_i}>0$, то получим

$$0<\lambda_{2s_i}-\lambda_{2r_i}<l_{2s_i}\log(1+(2s_i-2r_i)/2r_i),\quad i=1,2,\ldots,$$

откуда следует (18).

Заметим теперь, что в силу условия (15), $\{\lambda_n\}_1^\infty$ удовлетворяет (1). По теореме Мюнца при $s \to \infty$ имеем $E_s(f) \to 0$. С учетом (16) и (17), для произвольного $\varepsilon > 0$ существует натуральное число s_i такое, что

$$E_{s_i}(f) < \varepsilon, \tag{19}$$

$$s_i - r_i \geq 1, \quad 2s_i b^{\lambda_{2s_i}} \exp\left\{-(\lambda_1 - \delta)\sum_{j=r_i+1}^{s_i} \lambda_{2j}^{-1}\right\} < \varepsilon, \tag{20}$$

$$(\lambda_{2s_i} - \lambda_{2r_i+1}) \max(\lambda_{2s_i}^{-1}, b^{\lambda_{2s_i}} \log b) < \varepsilon. \tag{21}$$

Согласно Лемме 3, существуют числа $b_1, \ldots, b_{s_i}$ из $\{\pm a_n\}_1^\infty$ такие, что

$$\left\| f(x) - \sum_{j=1}^{s_i} b_j (x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) \right\| \leq E_{s_i}(f) + M \sum_{k=1}^{r_i} A_{k,s_i} +$$

$$+ M(\lambda_{2s_i} - \lambda_{2r_i+1}) \max(\lambda_{2s_i}^{-1}, b^{\lambda_{2s_i}} \log b).$$

Отсюда и из (19) – (21) получим

$$\left\| f(x) - \sum_{j=1}^{s_i} b_j (x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) \right\| < (2M+1)\varepsilon.$$

Доказательство завершено.

Замечание 2. В частом случае $\lim_{n\to\infty} \lambda_n < \infty$, Теорема 2 непосредственно следует из (14).

Теорема 3. Пусть $\{a_n\}_1^\infty$ и $\{\lambda_n\}_1^\infty$ – строго монотонно возрастающие последовательности положительных чисел, $\{a_n\}_1^\infty$ удовлетворяет условиям (2), а $\{\lambda_n\}_1^\infty$ условию

$$\lambda_n / \log n \downarrow a \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

и $b < e^{1/a}$. Тогда любую функцию $f \in C_{\mathbb{R}}^{\circ}[0, b]$ можно равномерно аппроксимировать на $[0, b]$ квазиполиномами вида (11).

Доказательство : Положим

$$l_n = \frac{\lambda_n - a \log n}{\log n}, \quad n = 2, 3, \ldots .$$

Так как $l_n > 0$ и $\lim_{n\to\infty} l_n = 0$, то существует, как и в доказательстве Теоремы 2, последовательность $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ натуральных чисел такая, что

$$\lim_{i\to\infty} l_{n_i} = 0, \quad l_{n_i} < l_s, \quad s = 2, 3, \ldots, n_i - 1.$$

Не умаляя общности можем считать, что $n_i = 2s_i$ (s_i – натуральное число), $i = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим последовательность натуральных чисел $\{m_i\}_{i=1}^{\infty}$, где

$$m_i = 2r_i + 1 = n_i - [n_i^{1-p_0}] \quad \text{или} \quad n_i - [n_i^{1-p_0}] - 1, \quad a\log b < p_0 < 1.$$

Так как λ_n монотонно возрастают, то для достаточно большого i получим

$$\sum_{j=r_i+1}^{s_i} \lambda_{2j}^{-1} \geq \frac{s_i - r_i}{\lambda_{2s_i}} \geq C\frac{(2s_i)^{1-p_0}}{\log 2s_i},$$

где $C > 0$ – постоянная. Чтобы доказать (17) заметим, что для достаточно малого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\frac{b^{\lambda_{2s_i}}}{(2s_i)^{p_0}} \leq \frac{b^{(a+\varepsilon)\log 2s_i}}{(2s_i)^{p_0}} = \frac{(2s_i)^{(a+\varepsilon)\log b}}{(2s_i)^{p_0}} \to 0, \quad i \to \infty.$$

Поскольку λ_n монотонны, то достаточно доказать, что

$$\overline{\lim_{i\to\infty}} (2s_i)^{p_0}(\lambda_{2s_i} - \lambda_{2r_i}) < \infty. \tag{22}$$

Легко проверить, что

$$0 < \lambda_{2s_i} - \lambda_{2r_i} = l_{2s_i}\log\frac{s_i}{r_i} - (l_{2r_i} - l_{2s_i})\log 2r_i + a\log\frac{s_i}{r_i}.$$

Так как $l_{2r_i} - l_{2s_i} > 0$, то получим

$$0 < \lambda_{2s_i} - \lambda_{2r_i} < l_{2s_i}\log\frac{s_i}{r_i} + a\log\frac{s_i}{r_i} = (l_{2s_i} + a)\log(1 + (2s_i - 2r_i)/2r_i), \quad i = 1, 2, \ldots,$$

откуда вытекает (22). Остальная часть доказательства совпадает с заключительной частью доказательства Теоремы 2. Теорема 3 доказана.

Замечание 3. Условие $b < e^{1/a}$ в Теореме 3 является точным (см. [5]).

Теорема 4. Пусть $\{\lambda_n\}_1^{\infty}$ – строго монотонно возрастающая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условиям

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \lambda_n/\lambda_{n+1})^2 < \infty,$$

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty,\quad 1-\lambda_n/\lambda_{n+1}\downarrow 0 \quad \text{при } n\to\infty.$$

Тогда любую функцию $f\in C_R^*[0,1]$ можно равномерно аппроксимировать на $[0,1]$ квазиполиномами вида (11).

Доказательство : Согласно Лемме 3 из [4], для любого $\varepsilon>0$ существует число n_0 такое, что

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}|x^{\lambda_n}-2x^{\lambda_{n+1}}+x^{\lambda_{n+2}}|<\frac{\varepsilon}{2},\quad x\in[0,1]. \tag{23}$$

По Лемме 2 из [4] существует многочлен с действительными коэффициентами

$$p_1(x)=\sum_{n=n_0}^{N}c_n(x^{\lambda_n}-2x^{\lambda_{n+1}}+x^{\lambda_{n+2}})$$

такой, что $|f(x)-p_1(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$, $x\in[0,1]$. Заменяя числа $|c_n|$, $n=n_0,\dots,N$ соответствующим ближайшим элементом последовательности $\{a_n\}_1^\infty$, из $p_1(x)$ получим квазиполином $p(x)$ вида (11). Так как имеет место (23), то получим

$$|p(x)-p_1(x)|\le M\sum_{n=n_0}^{N}|x^{\lambda_n}-2x^{\lambda_{n+1}}+x^{\lambda_{n+2}}|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, $|f(x)-p(x)|<\varepsilon$. Теорема 4 доказана.

ABSTRACT. **Muntz theorem on density of the set of quasipolynomials in the space $C_R[a,b]$ of continuous real-valued functions on a closed interval $[a,b]$, $a\ge 0$ is well known in real and complex analysis. The present paper studies the question about versions of Muntz theorem in the situation, where quasipolynomial coefficients are taken from a given increasing sequence of positive numbers.**

ЛИТЕРАТУРА

1. O. Ferguson, M. Golitschek, "Muntz-Satz theorem with integer coefficients. II", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 213, pp. 115 – 126, 1975.
2. А. О. Гельфонд, "О приближении многочленами со специально выбранными коэффициентами", УМН, том 21, № 3, стр. 225 – 229, 1966.
3. Н. П. Корнейчук, Экстремальные Задачи Теории Приближений, Наука, Москва, 1976.
4. В. А. Мартиросян, "О равномерном приближении многочленами по системе Мюнца с целыми коэффициентами", Изв. АН АрмССР, Математика, том 8, № 2, стр. 167 – 175, 1973.
5. В. А. Мартиросян, "Равномерные приближения квазиполиномами с целыми коэффициентами", Мат. заметки, том 27, № 2, стр. 237 – 243, 1980.
6. Г. Полиа, Г. Сегё, Задачи и Теоремы из Анализа, Москва, ГИТТЛ. 1, 1956.
7. W. Rudin, Real and Complex Analysis, Mc.Graw-Hill, London, 1966.
8. J. Tzimbalario, "Approximation by generalized polynomials with integer coefficients", Can. Math. Bull., vol. 20, no. 1, pp. 129 – 131, 1977.

20 марта 2000 Ереванский государственный университет