АСИМПТОТИЧЕСКИ ТОЧНЫЕ ГРАНИЦЫ ДЛЯ МИНИМАКСНОГО РИСКА ОЦЕНОК ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

М. С. Гиновян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 3, 2000

Для вещественнозначного стационарного гауссовского процесса $X(t)$, $t \in \mathbb{Z}$ с нулевым средним и спектральной плотностью $f(\lambda)$ рассматривается задача непараметрического статистического оценивания линейного функционала $L(f)$ на основе выборки $X(1), \ldots, X(T)$. Для спектральных плотностей, принадлежащих классам Гёльдера $\mathrm{H}_p(\beta)$, получены асимптотически точные оценки для минимаксного среднеквадратического риска Δ_T^2. Доказано, что $\Delta_T^2 \asymp T^{-a}$ $(a > 0)$ при $T \to \infty$, где число a определяется параметрами p и β.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $X(t)$, $t \in \mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \ldots\}$ – вещественнозначный стационарный гауссовский процесс с нулевым средним и спектральной плотностью $f(\lambda)$ с $f(-\lambda) = f(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$. В работе рассматривается следующая общая задача непараметрического статистического оценивания ([2] — [4], [6] — [9]). Пусть наблюдается конечная частная реализация $\mathbf{X}_T = \{X(1), \ldots, X(T)\}$ процесса $X(t)$ с неизвестной спектральной плотностью $f(\lambda) \in \Sigma$, где Σ – некоторый заданный класс спектральных плотностей, причем $\Sigma \subset \mathbf{L}_p = \mathbf{L}_p[-\pi, \pi]$, $p > 1$. Пусть $L(\cdot)$ – линейный функционал, определенный на пространстве $\mathbf{L}_p$. Задача состоит в следующем : на основе наблюдений $\mathbf{X}_T$ оценить значение $L(f)$ функционала $L(\cdot)$ в точке $f \in \Sigma$.

Предполагается, что функционал $L(\cdot)$ непрерывен в $\mathbf{L}_p[-\pi, \pi]$, $p > 1$ и поэтому допускает представление (см. [11])

$$L(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)\, g(\lambda)\, d\lambda,$$

где $g(\lambda) \in \mathbf{L}_q[-\pi, \pi]$; $1/p + 1/q = 1$ и $\|L\| = \|g\|_q$. Здесь и ниже $\|\cdot\|_q$ обозначает $\mathbf{L}_q$-норму.

Для заданных чисел $1 \le p \le \infty$, $0 < \alpha < 1$ и $r \in \mathbb{N}_0$, где $\mathbb{N}_0$ обозначает множество неотрицательных целых чисел, положим $\beta = r + \alpha$, и обозначим через $\mathbf{H}_p(\beta)$ класс Гёльдера, т.е. класс функций $\psi(\lambda) \in \mathbf{L}_p$, обладающих r-ыми производными в $\mathbf{L}_p$ и удовлетворяющих условию

$$\|\psi^{(r)}(\cdot + h) - \psi^{(r)}(\cdot)\|_p \le C\,|h|^\alpha.$$

Здесь и ниже буквой C обозначаются различные положительные постоянные. Пусть $\Sigma_p(\beta)$ – множество всех спектральных плотностей, принадлежащих классу $\mathbf{H}_p(\beta)$. Статистическая оценка функционала $L(f)$ определяется как измеримое отображение $\widehat{L}_T = \widehat{L}_T(\mathrm{X}_T) : \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}^1$. Качество оценки $\widehat{L}_T$ функционала $L(f)$ измеряется риском

$$\Delta_T^2(\widehat{L}_T, f) = \mathbb{E}_f|\widehat{L}_T - L(f)|^2,$$

где $\mathbb{E}_f\{\cdot\}$ – математическое ожидание относительно меры, порожденной спектральной плотностью f. Пусть Δ_T^2 обозночает минимаксный среднеквадратический риск статистической оценки $\widehat{L}_T$, т.е.

$$\Delta_T^2 \stackrel{def}{=} \sup_{\|L\|=1} \inf_{\widehat{L}_T} \sup_{f \in \Sigma} \mathbb{E}_f|\widehat{L}_T - L(f)|^2.$$

В настоящей работе получены асимптотически точные оценки для риска Δ_T^2 при $T \to \infty$. Эти оценки зависят от свойств функционала $L(f)$ и множества Σ. Доказано, что $\Delta_T^2 \asymp T^{-a}$ $(a > 0)$, где число a определяется параметрами p и β. (Здесь и ниже $a_T \asymp b_T$ означает, что отношение a_T/b_T асимптотически (при $T \to \infty$) отделено от нуля и бесконечности).

Отметим, что эта задача ранее была рассмотрена автором в [3] (см. также [4]), где были получены асимптотически верхние границы, аналогичная задача для плотности вероятностей была рассмотрена Ибрагимовым и Хасьминским в [7].

§1. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Основным результатом работы является следующая теорема, которая содержит асимптотически точные границы для риска Δ_T^2.

Теорема 1. Для $\Sigma = \Sigma_p(\beta)$, $\beta > 0$, и любого непрерывного линейного функционала $L(f)$ в пространстве $\mathbf{L}_p[-\pi, \pi]$, $1 < p < \infty$ имеют место следующие утверждения :

А) Если $p \ge 2$ и $\beta > 1/p$, то

$$\Delta_T^2 \asymp T^{-3p\beta(p+2p\beta-2)^{-1}};$$

B) Если или $p \geq 2$ и $\beta \leq 1/p$, или $1 < p \leq 2$ и $\beta \leq 1/2$, то

$$\Delta_T^2 \asymp T^{-2\beta};$$

C) Если $1 < p \leq 2$ и $\beta \geq 1/2$, то

$$\Delta_T^2 \asymp T^{-1}.$$

Соответствующие верхние границы были получены в [3] (см. также [4]), где была доказана нижеследующая Теорема 2.

Теорема 2. При условиях Теоремы 1 имеем

$$\Delta_T^2 \leq \begin{cases} C_1 \cdot T^{-2p\beta(p+2p\beta-2)^{-1}}, & \text{для} \quad p \geq 2,\ \beta > 1/p \\ C_2 \cdot T^{-2\beta}, & \text{для} \quad p \geq 2,\ \beta \leq 1/p \\ C_3 \cdot T^{-2\beta}, & \text{для} \quad 1 < p \leq 2,\ \beta \leq 1/2 \\ C_4 \cdot T^{-1}, & \text{для} \quad 1 < p \geq 2,\ \beta \geq 1/2, \end{cases}$$

где C_k, $k = 1, 2, 3, 4$ суть положительные постоянные.

Следовательно, для доказательства Теоремы 1 нам необходимо доказать соответствующие нижние границы. С этой целью нам понадобятся некоторые вспомогательные результаты, которые приведены в следующем параграфе.

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Обозначим через $\psi_A(\lambda)$ сингулярный интеграл Дирихле, определенный для всех $\psi(\lambda) \in \mathbf{L}_p[-\pi, \pi]$ $(1 < p < \infty)$ по формуле (см. [1], [10])

$$\psi_A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin A(\lambda - x)}{\sin(\lambda - x)}\, \psi(x)\, dx. \tag{1}$$

Заметим, что $\psi_A(\lambda)$ является тригонометрическим многочленом степени не выше A. В лемме 1 приведены свойства функции $\psi_A(\lambda)$. Ниже через $C(h_1, \ldots, h_k)$ обозначаются различные положительные ограниченные постоянные, зависящие от параметров $h_1, \ldots, h_k$.

Лемма 1. Имеют место следующие утверждения :

a) Пусть $\psi(\lambda) \in \mathbf{H}_p(\beta)$, $1 < p < \infty$, $\beta > 0$. Тогда

$$\|\psi_A\|_p \leq C(p)\, \|\psi\|_p \quad \text{и} \quad \|\psi - \psi_A\|_p \leq C(p, \beta)\, A^{-\beta}.$$

b) Пусть $\psi(\lambda) \in \mathbf{L}_p$, $p \geq 1$. Тогда $\|\psi_A\|_q \leq 2\, A^{1/p-1/q}\, \|\psi_A\|_p$, где $p < q \leq \infty$.

c) Пусть $\psi(\lambda) \in \mathbf{H}_p(\beta)$ с $\beta = r + \alpha$, $r \in \mathbb{N}_0$, $0 < \alpha < 1$ и $p \geq 1$. Тогда $\|\psi^{(j)}\|_p \leq C < \infty$ для $j = \overline{1, r}$.

d) Пусть $\psi(\lambda) \in \mathrm{H}_p(\beta)$ с $p \geq 1$, $\beta > 0$, $q > p$ и $\beta \neq 1/p - 1/q$. Тогда

$$\|\psi_A\|_q \leq C \cdot \max\{1; A^{1/p-1/q-\beta}\}.$$

Доказательства утверждений a) – c) можно найти в [10] (см. также [1]), а доказательство d) – в работе [7].

Следующая лемма является теоремой вложения типа Харди–Литтлвуда для классов $\mathrm{H}_p(\beta)$ (см. [10], стр. 232).

Лемма 2. Имеют место следующие утверждения :

a) Пусть $\psi(\lambda) \in \mathrm{H}_p(\beta)$, $p \geq 1$ с $0 < \beta \leq 1/p$ и $p < p_1 < p/(1-\beta p)$. Тогда

$$\psi(\lambda) \in \mathrm{H}_{p_1}(\beta - 1/p + 1/p_1).$$

b) Пусть $\psi(\lambda) \in \mathrm{H}_p(\beta)$ с $p \geq 1$ и $\beta > 1/p$. Тогда $\psi(\lambda)$ непрерывна и $\|\psi\|_\infty < \infty$.

§3. НИЖНИЕ ГРАНИЦЫ

В следующей теореме приводятся нижние границы для риска Δ_T^2.

Теорема 3. Для $\Sigma = \Sigma_p(\beta)$, $\beta > 0$, и любого непрерывного линейного функционала $\varphi(f)$ в пространстве $\mathrm{L}_p[-\pi,\pi]$, $1 < p < \infty$ имеют место следующие утверждения :

A) Если $p \geq 2$ и $\beta > 1/p$, то

$$\Delta_T^2 \geq C_1 T^{-2p\beta(p+2p\beta-2)^{-1}};$$

B) Если $p \geq 2$ и $\beta \leq 1/p$ или $1 < p \leq 2$ и $\beta \leq 1/2$, то

$$\Delta_T^2 \geq C_2 T^{-2\beta};$$

C) Если $1 < p \leq 2$ и $\beta \geq 1/2$, то

$$\Delta_T^2 \geq C_3 T^{-1},$$

где C_k, $(k = 1, 2, 3)$ – некоторые положительные постоянные.

Доказательство : Рассмотрим статистическую оценку $\widehat{L}_{T,A}$ линейного функционала $L(f)$ (ср. [2] - [4], [8], [9]) :

$$\widehat{L}_{T,A} = \int_{-\pi}^{\pi} I_T(\lambda)\, g_A(\lambda)\, d\lambda,$$

где $A = A(T) \leq T$, $A(T) \to \infty$ при $T \to \infty$, $g_A(\lambda)$ – сингулярный интеграл Дирихле (1), порожденный функцией $g(\lambda)$, а $I_T(\lambda)$ – периодограмма процесса $X(t)$:

$$I_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi T}\left|\sum_{t=1}^{T} X(t)\, e^{-it\lambda}\right|^2.$$

Положим $\Sigma'_p(\beta) = \{f \in \Sigma_p(\beta);\ f(\lambda) \geq C > 0\}$ и

$$h_A(\lambda) = \frac{g_A(\lambda)}{T^{1/2}\|f\, g_A\|_2^2}. \tag{2}$$

Пусть $f(\lambda) \in \Sigma'_p(\beta)$ – некоторая спектральная плотность, удовлетворяющая условию $f(\lambda)h_A(\lambda) \in \mathrm{H}_p(\beta)$. Тогда для достаточно больших значений T функция

$$\theta(\lambda) = \theta_{T,h}(\lambda) \stackrel{def}{=} f(\lambda)\ (1 + h_A(\lambda))\,, \quad A = A(T)$$

является спектральной плотностью из класса $\Sigma'_p(\beta)$.

Пусть $\mathbb{P}_{T,\theta}$ – вероятностное распределение гауссовского вектора $\mathbf{X}_T = \{X(1), \ldots, X(T)\}$ со спектральной плотностью $\theta(\lambda)$. Согласно Теореме 1 из [5] (см. также пример 2.3 в [9]) семейство гауссовских распределений $\{\mathbb{P}_{T,\theta}, \theta \in \Sigma'_p(\beta)\}$ локально асимптотически нормально (ЛАН) в точке f в направлении пространства $\mathrm{L}_2[-\pi, \pi]$. Следовательно, используя Теорему 4.1 из [9], для функции потерь $w(x) = x^2$ получаем

$$\sup_{\theta \in \Sigma_p(\beta)} \inf_{\widehat{L}_T} \mathbb{E}_\theta|\widehat{L}_T - L(\theta)|^2 \geq \frac{C_0}{T}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(\lambda)\, g_A^2(\lambda)\, d\lambda, \tag{3}$$

где $\widehat{L}_T$ – произвольная статистическая оценка функционала $L(\theta)$, построенного на основе наблюдения $\mathbf{X}_T$, а C_0 – положительная постоянная.

Следовательно, для завершения доказательства Теоремы 3 нам остается подобрать $A = A(T)$ так, чтобы были выполнены следующие условия :

1) $f(\lambda)\, h_A(\lambda) \in \mathrm{H}_p(\beta)$;

2) правая сторона (3) имеет вид T^{-a}, где число a определяется Теоремой 3.

Доказательство утверждения C) тривиально, поэтому мы доказываем только утверждения A) и B).

Предположим, что $f(\lambda) \in \Sigma_p(\beta)$, где $p \geq 2$ и $\beta > 1/p$. Покажем, что $f(\lambda)\, h_A(\lambda) \in \mathrm{H}_p(\beta)$, где $h_A(\lambda)$ определяется формулой (2). Пусть $\beta = \alpha + r$, где $r \in \mathbb{N}_0$ и $0 < \alpha < 1$. Используя формулу Лейбница для вычисления производной $(fh_A)^{(r)}$, получаем

$$J \stackrel{def}{=} \left\|(fh_A)^{(r)}(\cdot+\delta)-(fh_A)^{(r)}(\cdot)\right\|_p \le$$
$$\le C\sum_{k=0}^{r}\left\|f^{(k)}(\cdot+\delta)h_A^{(r-k)}(\cdot+\delta)-f^{(k)}(\cdot)h_A^{(r-k)}(\cdot)\right\|_p. \tag{4}$$

Сперва рассмотрим случай $r\ge 1$. Имеем

$$\left(fh_A^{(r-k)}\right)(\cdot+\delta)-\left(fh_A^{(r-k)}\right)(\cdot)=$$
$$=f(\cdot+\delta)\left[h_A^{(r)}(\cdot+\delta)-h_A^{(r)}(\cdot)\right]+h_A^{(r)}(\cdot)\left[f(\cdot+\delta)-f(\cdot)\right]$$

и

$$f^{(k)}(\cdot+\delta)h_A^{(r-k)}(\cdot+\delta)-f^{(k)}(\cdot)h_A^{(r-k)}(\cdot)=$$
$$=f^{(k)}(\cdot+\delta)\left[h_A^{(r-k)}(\cdot+\delta)-h_A^{(r-k)}(\cdot)\right]+h_A^{(r-k)}(\cdot)\left[f^{(k)}(\cdot+\delta)-f^{(k)}(\cdot)\right].$$

Применяя неравенства Минковского и Гёльдера (см. [10]), из (4) получаем

$$J\le C\left\|f(\cdot+\delta)h_A^{(r)}(\cdot+\delta)-f(\cdot)h_A^{(r)}(\cdot)\right\|_p+$$
$$+C\sum_{k=1}^{r}\left\|f^{(k)}(\cdot+\delta)h_A^{(r-k)}(\cdot+\delta)-f^{(k)}(\cdot)h_A^{(r-k)}(\cdot)\right\|_p\le$$
$$\le C\|f\|_\infty\left\|h_A^{(r)}(\cdot+\delta)-h_A^{(r)}(\cdot)\right\|_p+$$
$$+C\|h_A^{(r)}\|_\infty\|f(\cdot+\delta)-f(\cdot)\|_p+ \tag{5}$$
$$+C\sum_{k=1}^{r}\|f^{(k)}\|_p\left\|h_A^{(r-k)}(\cdot+\delta)-h_A^{(r-k)}(\cdot)\right\|_\infty+$$
$$+C\sum_{k=1}^{r}\|h_A^{(r-k)}\|_\infty\left\|f^{(k)}(\cdot+\delta)-f^{(k)}(\cdot)\right\|_p.$$

Так как $f(\lambda)\in \mathbf{H}_p(\beta)$, $\beta=\alpha+r$, то согласно лемме 1 c) имеем

$$\|f^{(k)}\|_p\le C<\infty,\qquad k=1,2,\ldots,r. \tag{6}$$

Далее, так как $r\ge 1$, имеем $\beta>1/p$, и из леммы 2 b) получим

$$\|f\|_\infty\le C<\infty. \tag{7}$$

Функция $h_A(\lambda)$ является тригонометрическим многочленом степени A. Следовательно, по неравенству Бернштейна (см. [1], стр. 100), имеем

$$\|h_A^{(k)}\|_s\le 2^kA^k\|h_A\|_s,\qquad 1\le s\le\infty, \tag{8}$$

а по неравенству (см. лемму 1 b))

$$\|h_A\|_s\le C\,A^{1/t-1/s}\|h_A\|_t,\qquad t<s\le\infty, \tag{9}$$

имеем

$$\|h_A^{(k)}\|_\infty \leq 2^k A^k \|h_A\|_\infty \leq 2^k A^{k+1/q} \|h_A\|_q. \tag{10}$$

Из неравенств (8) — (10) для $q_1 > q$ и $k \leq r$ получаем

$$\begin{aligned} &\left\| h_A^{(k)}(\cdot+\delta) - h_A^{(k)}(\cdot) \right\|_{q_1} = \left\| \int_x^{x+\delta} h_A^{(k+1)}(y)\,dy \right\|_{q_1} \leq \\ &\leq \min\left(\delta \left\| h_A^{(k+1)} \right\|_{q_1}, 2 \left\| h_A^{(k)} \right\|_{q_1} \right) \leq \\ &\leq \min\left(\delta A^{k+1+1/q-1/q_1} \|h_A\|_q, A^{k+1/q-1/q_1} \|h_A\|_q \right). \end{aligned} \tag{11}$$

Следовательно, для $q_1 > q$ и $k \leq r$ имеем

$$\left\| h_A^{(k)}(\cdot+\delta) - h_A^{(k)}(\cdot) \right\|_{q_1} \leq C \cdot \delta^\alpha A^{\beta+1/q-1/p} \|h_A\|_q. \tag{12}$$

Согласно (5) — (7), (10) и (12), для $r \geq 1$, имеем

$$\left\| (fh_A)^{(r)}(\cdot+\delta) - (fh_A)^{(r)}(\cdot) \right\|_p \leq C \cdot \delta^\alpha A^{\beta+1/q-1/p} \|h_A\|_q. \tag{13}$$

Пусть теперь $r = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} &\|(fh_A)(\cdot+\delta) - (fh_A)(\cdot)\|_p \leq \|f\|_\infty \|h_A(\cdot+\delta) - h_A(\cdot)\|_p + \\ &+ \|h_A\|_\infty \|f(\cdot+\delta) - f(\cdot)\|_p \leq C \cdot \{\|h_A(\cdot+\delta) - h_A(\cdot)\|_p + \delta^\alpha \|h_A\|_\infty\}. \end{aligned} \tag{14}$$

По неравенству (12) имеем

$$\|h_A(\cdot+\delta) - h_A(\cdot)\|_p \leq C \cdot \delta^\alpha A^{\beta+1/q-1/p} \|h_A\|_q. \tag{15}$$

Принимая во внимание условие $\beta > 1/p$, из (10) получаем

$$\|h_A\|_\infty \leq C \cdot A^{1/q} \|h_A\|_q \leq C \cdot \delta^\alpha A^{1/q+\beta-1/p} \|h_A\|_q. \tag{16}$$

Комбинируя (14) — (16) находим

$$\|(fh_A)(\cdot+\delta) - (fh_A)(\cdot)\|_p \leq C \cdot \delta^\alpha A^{\beta+1/q-1/p} \|h_A\|_q. \tag{17}$$

Из (2), (13) и (17) следует, что для всех $r \in \mathbb{N}_0$, $p \geq 2$ и $\beta > 1/p$ справедливо неравенство

$$\left\| (fh_A)^{(r)}(\cdot+\delta) - (fh_A)^{(r)}(\cdot) \right\|_p \leq C \cdot M_T \delta^\alpha, \tag{18}$$

где

$$M_T \stackrel{def}{=} T^{-1/2} \cdot A^{\beta+1/q-1/p} \|fg_A\|_2^{-2}. \tag{19}$$

Следовательно, утверждение $f(\lambda)h_A(\lambda) \in \mathrm{H}_p(\beta)$ будет заведомо выполнено, если мы сможем подобрать A так, чтобы сделать величину M_A задаваемую по (19), столь малой, сколь нужно. Положим

$$g_A(\lambda) = A^{-1/p} \cdot \frac{\sin A\lambda}{\sin \lambda}.$$

Так как $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin A\lambda}{\sin \lambda}\, d\lambda = 2\pi A$, то из предположения $f(\lambda) \geq C > 0$ следует

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} g_A^2(\lambda) f^2(\lambda)\, d\lambda = A^{-2/p} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 A\lambda}{\sin^2 \lambda} f^2\left(\frac{\lambda}{A}\right) d\lambda \geq \\ \geq C \cdot A^{-2/p} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 A\lambda}{\sin^2 \lambda} = C \cdot A^{1-2/p}.\end{aligned} \tag{20}$$

Полагая $A = T^{p/(p-2+2p\beta)}$ и учитывая, что $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$, из (19) и (20) находим

$$M_T \leq C \cdot \frac{T^{-1/2} \cdot A^{\beta+1/q-1/p}}{A^{1-2/p}} = T^{(2-p)(4p\beta+2p-4)^{-1}}. \tag{21}$$

Из предположения $p \geq 2$, и из (18) и (21) заключаем, что $f(\lambda)h_A(\lambda) \in \mathrm{H}_p(\beta)$. Далее, полагая $A = T^{p/(p-2+2p\beta)}$, из (3) и (20) находим

$$\Delta_T^2 \geq \frac{C_0}{T} \int_{-\pi}^{\pi} g_A^2(\lambda) f^2(\lambda)\, d\lambda \geq C \cdot T^{-1} A^{1-2/p} \geq T^{-2p\beta(2p\beta+p-2)^{-1}}.$$

Это завершает доказательство утверждения A).

Прейдем к доказательству утверждения B). Пусть $f(\lambda) \in \Sigma_p(\beta)$, где $p \geq 2$ и $\beta \leq 1/p$. Вначале покажем, что $f(\lambda)h_A(\lambda) \in \mathrm{H}_p(\beta)$, где $h_A(\lambda)$ определена по формуле (2). В этом случае необходимо $r = 0$ и $\beta = \alpha < 1$. Поэтому нам необходимо оценить только величину $\|(fh_A)(\cdot+\delta) - (fh_A)(\cdot)\|_p$. Обозначая через $f_A(\lambda)$ интеграл Дирихле спектральной плотности $f(\lambda)$, из неравенств Минковского и Гёльдера получаем

$$\begin{aligned}\|(fh_A)(\cdot+\delta) - (fh_A)(\cdot)\|_p \leq \|h_A\|_\infty \|f(\cdot+\delta) - f(\cdot)\|_p + \\ + \|f(\cdot) - f_A(\cdot)\|_p \|h_A(\cdot+\delta) - h_A(\cdot)\|_\infty + \|f_A\|_\infty \|h_A(\cdot+\delta) - h_A(\cdot)\|_p.\end{aligned} \tag{22}$$

Используя неравенство (9) для $s = \infty$ и $t = q$, получаем

$$\|h_A\|_\infty \|f(\cdot+\delta) - f(\cdot)\|_p \leq C \cdot \delta^\alpha A^{1/q} \|h_A\|_q. \tag{23}$$

Согласно второму неравенству из леммы 1 a) имеем

$$\|f(\cdot) - f_A(\cdot)\|_p \leq C \cdot A^{-\beta} = C \cdot A^{-\alpha}.$$

Следовательно, используя неравенство (11) для $k=0$ и $q_1=\infty$, находим

$$\begin{aligned}&\|f(\cdot)-f_A(\cdot)\|_p\,\|h_A(\cdot+\delta)-h_A(\cdot)\|_\infty \le \\ &\le C\cdot A^{-\alpha}\min\left(\delta A^{1+1/q}\|h_A\|_q, 2A^{1/q}\|h_A\|_q\right)\le C\cdot\delta^\alpha A^{1/q}\|h_A\|_q.\end{aligned}\tag{24}$$

Согласно лемме 1 d) имеем $\|f_A\|_\infty \le C\cdot A^{1/p-\beta} = C\cdot A^{1/p-\alpha}$. Следовательно, применяя неравенство (11) для $k=0$ и $q_1=p$, получаем

$$\begin{aligned}&\|f_A\|_\infty\,\|h_A(\cdot+\delta)-h_A(\cdot)\|_p \le \\ &\le C\cdot A^{1/p-\alpha}\min\left(\delta A^{1+1/q-1/p}\|h_A\|_q, 2A^{1/q-1/p}\|h_A\|_q\right)\le C\cdot\delta^\alpha A^{1/q}\|h_A\|_q.\end{aligned}\tag{25}$$

Комбинируя (22) — (25), находим

$$\|(fh)(\cdot+\delta)-(fh_A)(\cdot)\|_p \le C\cdot\delta^\alpha A^{1/q}\|h_A\|_q.\tag{26}$$

Следовательно, из (2) и (26) получаем

$$\|(fh_A)(\cdot+\delta)-(fh_A)(\cdot)\|_p \le C\cdot M_T\delta^\alpha,\tag{27}$$

где

$$M_T \stackrel{def}{=} T^{-1/2}\cdot A^{1/q}\|fg_A\|_2^{-2}.\tag{28}$$

Полагая $g_A(\lambda) = A^{-\beta}\cdot\dfrac{\sin A\lambda}{\sin\lambda}$ и учитывая соотношения $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin A\lambda}{\sin\lambda}\,d\lambda = 2\pi A$ и $f(\lambda)\ge C>0$, находим

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi} g_A^2(\lambda)f^2(\lambda)\,d\lambda = A^{-2\beta}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2 A\lambda}{\sin^2\lambda}f^2\left(\frac{\lambda}{A}\right)d\lambda \ge \\ &\ge C\cdot A^{-2\beta}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2 A\lambda}{\sin^2\lambda} = C\cdot A^{1-2\beta}.\end{aligned}\tag{29}$$

Полагая $A=T$, из (28) и (29) получим

$$M_T \le C\cdot T^{-1/2+1/q-1+2\beta} = C\cdot T^{2(\beta-1/p)+(2-p)/(2p)}.\tag{30}$$

Учитывая, что по предположению $p\ge 2$ и $\beta\le 1/p$, из (27) и (30) заключаем $f(\lambda)\,h_A(\lambda)\in \mathrm{H}_p(\beta)$. Вновь полагая $A=T$, из (3) и (29) получаем

$$\Delta_T^2 \ge \frac{C_0}{T}\int_{-\pi}^{\pi} g_A^2(\lambda)f^2(\lambda)\,d\lambda \ge C\cdot T^{-1}A^{1-2\beta}\ge C\cdot T^{-2\beta}.$$

Таким образом, утверждение B) для $p\ge 2$ и $\beta\le 1/p$ доказано.

Теперь докажем B) для $1<p\le 2$ и $\beta\le 1/2$. Из предыдущих рассуждений следует, что нам нужно доказать лишь аналог неравенства (26).

Используя неравенства Минковского и Гёльдера, получаем следующий аналог неравенства (22) :

$$\begin{aligned}\|(fh_A)(\cdot+\delta)-(fh_A)(\cdot)\|_p &\le \|h_A\|_\infty\,\|f(\cdot+\delta)-\\ -f(\cdot)\|_p &+ \|f(\cdot)-f_A(\cdot)\|_p\,\|h_A(\cdot+\delta)-h_A(\cdot)\|_\infty + \\ &+\|f_A\|_{2q/(q-2)}\,\|h_A(\cdot+\delta)-h_A(\cdot)\|_2 \stackrel{def}{=} J_1+J_2+J_3.\end{aligned} \tag{31}$$

Величины J_1 и J_2 совпадают, соответственно, с первым и вторым слагаемыми из (22). Следовательно, из (23) и (24) имеем

$$J_1 \le C\cdot\delta^\alpha A^{1/q}\|h_A\|_q \quad \text{и} \quad J_2 \le C\cdot\delta^\alpha A^{1/q}\|h_A\|_q. \tag{32}$$

Теперь оценим J_3. Полагая $q_1=\frac{2q}{q-2}$, имеем $q_1>p=\frac{q}{q-1}$. Следовательно

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{q_1}-\beta=\frac{1}{2}-\beta>0.$$

Поэтому по лемме 1 d) и лемме 2 a) имеем

$$\|f_A\|_{q_1} \le C\cdot A^{1/p-1/q_1-\beta}. \tag{33}$$

Далее, так как $q\ge 2$, из (9) для $s=2$ и $t=q$ получаем

$$\|h_A\|_2 \le C\cdot A^{1/q-1/2}\|h_A\|_q. \tag{34}$$

Используя неравенства (33), (34) и (8) для $s=2$ и $k=1$, находим

$$\begin{aligned}J_3 &= \|f_A\|_{q_1}\,\|h_A(\cdot+\delta)-h_A(\cdot)\|_2 \le C\cdot A^{1/p-1/q_1-\beta}\min\left(\delta\|h'_A\|_2,\, 2\|h_A\|_2\right) \le \\ &\le C\cdot A^{1/p-(q-2)/(2q)-\beta}\min(A\delta,\,1)\,\|h_A\|_2 \le \\ &\le C\cdot A^{1/p-(q-2)/(2q)-\beta}A^{1/q-1/2}\|h_A\|_q \le C\cdot\delta^\alpha A^{1/q}\|h_A\|_q.\end{aligned} \tag{35}$$

Комбинируя (31), (32) и (35) получаем (26). Оставшаяся часть доказательства повторяет предыдущий случай. Теорема 3 доказана.

Доказательство Теоремы 1. Комбинируя Теоремы 2 и 3 получаем требуемый результат.

ABSTRACT. For a zero mean real-valued stationary Gaussian process $X(t)$, $t\in\mathbb{Z}$ possessing a spectral density $f(\lambda)$ the paper considers the problem of nonparametric statistical estimation of a linear functional $L(f)$ on the basis of a sample $X(1),\dots,X(T)$. For spectral densities from Hölder classes $\mathrm{H}_p(\beta)$ we obtain asymptotically exact bounds for the minimax mean square risk Δ_T^2. We prove that $\Delta_T^2 \asymp T^{-a}$ $(a>0)$ as $T\to\infty$, where the number a is determined by the parameters p and β.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. L. Butzer and R. J. Nessel, Fourier Analysis and Approximation, Vol. I, Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgard, 1971.
2. М. С. Гиновян, "Асимптотически эффективное непараметрическое оценивание функционалов от спектральной плотности, имеющей нули", Теория вероятн. и ее примен., том 33, стр. 315 — 322, 1988.
3. M. S. Ginovian, "On Toeplitz Type Quadratic Functionals in Gaussian Stationary Process", Probability Theory and Related Fields, vol. 100, pp. 395 — 406, 1994.
4. М. С. Гиновян, "Асимптотические верхние границы для риска оценок линейных функционалов от спектральной плотности", Известия НАН Армении, серия Математика, том 31, № 5, стр. 5 — 13, 1996.
5. М. С. Гиновян, "Локально асимптотически нормальные семейства гауссовских распределений", Известия НАН Армении, серия Математика, том 34, № 4, стр. 18 — 28, 1999.
6. I. A. Ibragimov and R. Z. Khas'minskii, Statistical Estimation : Asymptotic Theory, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1981.
7. И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский, "Об оценке значения линейного функцио--нала от вероятностной плотности", Зап. Науч. Сем. ЛОМИ, том 153, стр. 45 — 59, 1986.
8. R. Z. Has'minskii and I. A. Ibragimov, "Asymptotically Efficient Nonparametric Estimation of Functionals of Spectral Density Function", Probability Theory and Related Fields, vol. 73, pp. 447 — 461, 1986.
9. I. A. Ibragimov and R. Z. Khas'minskii, "Asymptotically normal families of distributions and efficient estimation", The Annals of Statistics, vol. 19, no. 4, pp. 1681 — 1724, 1991.
10. С. М. Никольский, Приближение Функций Нескольких Переменных и Теоремы Вложения, Наука, Москва, 1977.
11. F. Riesz and B. Sz. Nagy, Lecons d'Analyse Fonctionnelle, Akademiai Kiado, Budapest, 1972.

25 сентября 1999

Институт математики
Национальной Академии Наук Армении
E-mail : mamgin@instmath.sci.am